

الكهر ومغناطيسيات الهندسية

تأليف

وليام . هـ . هايت ، چونيور
استاذ الهندسة الكهربائية
جامعة بيردو

ترجمة

الدكتور عادل عبد القادر محسن
قسم الرياضيات والفيزياء الهندسية - كلية الهندسة
جامعة القاهرة
جمهورية مصر العربية

مراجعة

الأستاذ الدكتور مختار ناشد فهمي
رئيس قسم الرياضيات والفيزياء الهندسية - كلية الهندسة
جامعة القاهرة
جمهورية مصر العربية

دار ماكجرو هيل للنشر جمهورية مصر العربية - القاهرة



نيويورك . سانت لويس . سان فرانسيسكو . أوكلاند . بوجوتا . دوسلدورف . جوهانسبرج .
لندن . مدريد . مكسيكو . مونتريال . نيودلهي . بناما . باريس . ساو بوللو . سنغافورة . سيدني .
طوكيو . تورنتو .

حقوق التأليف © ١٩٥٨ ، ١٩٦٧ ، ١٩٧٤ ، ١٩٨١ دار ماكجروهيل للنشر ، انك .
جميع الحقوق محفوظة

Engineering Electromagnetics

William H. Hayt, Jr.

الطبعة العربية ١٩٨٢ تصدر بالتعاون مع مؤسسة الأهرام بالقاهرة . لا يجوز نشر أى
جزء من هذا الكتاب أو اختزان مادته بطريقة الاسترجاع أو نقله على أى وجه أو بأى طريقة
سواء كانت الإلكترونية أو ميكانيكية أو بالتصوير أو التسجيل أو خلاف ذلك إلا بموافقة
الناشر على هذا كتابة ومقدما .

ISBN 084270 1

المحتويات

الموضوع	صفحة
مقدمة	٥
١ - تحليل المتجهات	٩
المقياسات والمتجهات / جبر المتجهات / نظام الإحداثيات الكرتيزية / مركبات المتجه وحدات المتجهات / المجال المتجه / الضرب بالنقطة / الضرب بعلامة X / نظم إحداثيات أخرى : الإحداثيات الاسطوانية الدائرية / نظام الإحداثيات الكروية / مراجع مقترحة / مسائل .	
٢ - قانون كولوم وشدة المجال الكهربى	٣٩
قانون كولوم التجريبي / شدة المجال الكهربى / مجال E من الشحنات النقطية / المجال النشأء من توزيع حجمى متصل للشحنة / مجال خط من الشحنة / مجال لوح من الشحنة / خطوط الانسياب والرسوم التخطيطية للمجالات / مراجع مقترحة / مسائل .	
٣ - كثافة التدفق الكهربى ، قانون جاوس ، والانفراج	٦٧
كثافة التدفق الكهربى / قانون جاوس / تطبيق قانون جاوس : بعض التوزيعات المتتالة للشحنة / تطبيق قانون جاوس : عنصر حجم تفاضلى / الانفراج / معادلة ماكسويل الأولى (كهروستاتيكية) / العامل المتجه ∇ ونظرية الانفراج / مراجع مقترحة / مسائل .	
٤ - الطاقة والجهد	٩٨
الطاقة المستنفذة فى تحريك شحنة نقطية فى مجال كهربى / التكامل الخطى / تعريف فرق الجهد والجهد / مجال الجهد لشحنة نقطية / مجال الجهد لنظام من الشحنات : خاصية المحافظة / تدرج الجهد / ثاى القطب / كثافة الطاقة فى المجال الكهروستاتيكي / مراجع مقترحة / مسائل .	
٥ - الموصلات ، العوازل ، والسعة	١٣٧
التيار وكثافة التيار / استمرارية التيار / الموصلات المعدنية / خواص الموصل وشروط الحدود / طريقة الصور / أشباه الموصلات / طبيعة المواد العازلة / شروط الحدود لمواد عازلة مثالية / السعة / أمثلة سعة عديدة / سعة خط ذى سلكين / مراجع مقترحة / مسائل .	
٦ - طرق التخطيط التجريبية	١٨٧
المربعات المتتحة الخطوط / طريقة التكرار / تناظرات بالتيار / نماذج مادية / مراجع مقترحة / مسائل .	
٧ - معادلتا بواسون ولاپلاس	٢١٥
معادلتا بواسون ولاپلاس / نظرية الوجدانية / أمثلة لحل معادلة لاپلاس / مثال لحل معادلة بواسون / حل معادلة لاپلاس فى صورة ضرب / مراجع مقترحة / مسائل .	
٨ - المجال المغناطيسى الثابت	٢٤٧
قانون بيو - سافار / قانون أمبير الدائرى / التواء / نظرية ستوكس / التدفق المغناطيسى وكثافة التدفق المغناطيسى / الجهود المغنطيسية المقاييسية والمتجهة / استنباط قوانين المجال المغناطيسى الثابت / مراجع مقترحة / مسائل .	

الموضوع

صفحة

٣٠٤	٩ - القوى المغناطيسية ، المواد ، والمحالة.....
	القوة على شحنة متحركة/ القوة على عنصر تيار تفاضلى/ القوة بين عناصر تيار تفاضلية/ القوة وعزم التدوير على دائرة مغلقة/ طبيعة المواد المغناطيسية/ التعميط والانفاذية/ شروط الحدود المغناطيسية/ الدائرة المغناطيسية/ طاقة الجهد والقوى على المواد المغناطيسية/ المحالة والمحالة المتبادلة/ مراجع مقترحة/ مسائل .
٣٥٥	١٠ - المجالات المتغيرة مع الزمن ومعادلات ماكسويل.....
	قانون فاراداي/ تيار الازاحة/ معادلات ماكسويل فى الصورة التفاضلية/ معادلات ماكسويل فى الصورة التكاملية/ الجهود المؤخرة/ مراجع مقترحة/ مسائل .
٣٨٥	١١ - الموجة المستوية المنتظمة.....
	الحركة الموجية فى الفضاء الحر/ الحركة الموجية فى العوازل الناعمة/ الموجات المستوية فى العوازل ذات الفقد/ منتهج بويتنجن واعتبارات القدرة/ الانتشار فى الموصلات الجديدة : الظاهرة السطحية/ انعكاس الموجات المستوية المنتظمة/ نسبة الموجة الواقة/ مراجع مقترحة/ مسائل .
٤٣٦	١٢ - خطوط النقل.....
	معادلات خط النقل/ بارامترات خط النقل/ بعض أمثلة خط النقل/ طرق تخطيطية/ عدة مسائل علمية/ مراجع مقترحة/ مسائل .
٤٧١	١٣ - عدة تطبيقات أخرى لمعادلات ماكسويل.....
	قوانين نظرية الدوائر/ الفجوة المحورية (متحدة المحور) الرنانة/ الاشعاع/ مراجع مقترحة/ مسائل .
٥٠١	الملحق (أ) تحليل المنحنيات.....
	إحداثيات الخطوط المنحنية العامة/ الانفرج ، التدرج والالتواء فى إحداثيات الخطوط المنحنية العامة/ متطابقات متجهة .
٥٠٦	الملحق (ب) الوحدات.....
٥١٤	الملحق (جـ) ثوابت المواد.....
٥١٩	الملحق (د) إجابات المسائل الفردية الرقم.....
٥٢٥	قائمة المصطلحات العلمية.....
٥٧٥	الفهرس الأبجدي.....

مقدمة

رغم أن أغلب مناهج الهندسة الكهربائية تبدأ بدراسة الدوائر الكهربائية والمغناطيسية ، فإنه من المعترف به الآن أن النظرية الأساسية أكثر للمجالات الكهربائية والمغناطيسية تستحق اهتماما لاحقا في هذه المناهج . إن بعض الاعتقاد على مفاهيم الدوائر بالإضافة الى معلومات لحساب التفاضل والتكامل تسمح بمعالجة نظرية المجال في السنوات الجامعية الأولى التي تنبع من خلال معادلات ماكسويل وتبرر التفريبات المؤدية إلى نظرية الدوائر .

يستخدم هذا الكتاب معادلات ماكسويل كمركز الموضوع . وتظهر هذه المعادلات من طريق تاريخي ، وفيه تدخل القوانين التجريبية الهامة تدريجيا وتعالج باستخدام معلومات متزايدة باطراد عن حساب التفاضل والتكامل للمتجهات . وتُميز معادلات ماكسويل حيث تظهر ، حتى عندما تنطبق على المجالات الاستاتيكية ، ويجب الشعور باحساس خاص بالانجاز ، وربما حتى بالاعتقاد عندما تكمل النظرية في النهاية . وسنشرح تطبيقات عدة لهذه المعادلات في الفصول النهائية متضمنة الحركة الموجية والظاهرة السطحية وظواهر خط النقل ونظرية الدوائر والفجوة الرنانة . وأيضا يشتمل الكتاب على نظرية أولية للاشعاع والهوائيات .

ومادة الكتاب أكثر من كافية لمقرر في فصل دراسي واحد . وقد يكون من المرغوب فيه حذف أجزاء من الفصول في طرق التخطيط التجريبية وحلول معادلات لابلاس وخطوط النقل أو تطبيق معادلات ماكسويل وذلك على حسب المستوى التعليمي .

وقد كتب الكتاب بهدف جعله سهلا بقدر الامكان ليتعلم الطالب بمفرده . ولقد تم ذلك باتباع تدرج مختار بعناية في الصعوبة خلال كل فصل وفيما بين الفصول نفسها بإعطاء أمثلة عديدة كلما أمكن ، وأمثلة عدة تشرح وتطبق كل نتيجة أساسية ، وأيضا يتضمن عدد كبير من المسائل التدريبية وأجوبتها . ولقد تجنب الاعتماد الزائد على التحليل وهندسة المتجهات واستخدامها في تفسير المجالات .

ولقد وضعت المادة الأكثر صعوبة قرب نهايات الفصول أو عند نهاية دراسة مرحلة معينة من الموضوع . والطالب الأبطأ ، الذي لا يستطيع أن يستوعب نفس كمية المعلومات كالطالب الأسرع ، سوف يُجذب للمادة الأكثر أساسية عند بداية كل فصل .

وحيث أن المحتوى الموضوعي للفصل التالى ليس مبنيا عادة على المادة الأكثر تقدما فى الفصل السابق ، فإنه يمكن للطلاب التقدم بدون الاستيعاب الكامل لهذه المادة . وتقدم المادة الأكثر تقدما تحديدا مطلوبا للطلبة الأحسن .

توجد مسائل تدريبية عند نهايات معظم الأقسام حيث تقدم صيغة أو قانون ممكن التعبير عنه فى هيئة مسألة . وتحتوى هذه المسائل عادة على أجزاء عدة ، وكمساعدة للدراسة المستقلة فإن الاجابات تعطى فى الحال تحت المسألة بنفس ترتيب اجزاء المسألة . المسائل الموجودة عند نهايات الفصول أكثر صعوبة قليلا أو ربما أكثر أهمية قليلا . وتظهر إجابات المسائل الفردية فى الملحق د ، وحلول جميع المسائل معطاة فى كتيب يمكن للمدرس طلبه من الناشر . وترتيب المسائل يقابل تلك لمادة الكتاب .

وجميع المسائل فى هذه الطبعة جديدة ماعدا أربع أو خمس مسائل أحسن استخدامها لتعطى بعض الخطوات المفقودة فى النظرية . وقد أعيد استخدام بعض المسائل القليلة المفضلة للمؤلف بعد تحريرها . وهناك أيضا حوالى أربعين مسألة فى هذه الطبعة أكثر من أى طبعة سابقة . وملاحظة ثانوية للمدرس : أن معظم المسائل فى الطبعات الأخرى مازالت مطبقة برغم الحاجة أحيانا لتغيير رمز . ولقد يسرت وفرة آلات النسخ وطرق الطبع استخدام هذه المسائل القديمة والناشر يعطى بحرية تصريحه لاستهلاك الطبعات السابقة . وملاحظة ثانوية للطلاب ، أن أى شخص يحل كل المسائل فى جميع الطبعات يصعب مفاجئته فى الاختبار بعد ذلك .

ومازالت معظم أهداف الطبعات الثلاث الأولى قائمة فى هذه الطبعة . على أن أكثر من عشرين عاما من الاستعمال قد حثت عدیدا من الطلبة والمعلمين والمراسلين أن يقترحوا تحسينات أصبحت الآن جزءا من الكتاب . حقا ، لم تعان هذه الطبعة أى حذف كبير فى المادة . ولقد إختفى القسم الخاص بالتحويل بين نظم الاحداثيات فى الفصل الأول ، ولكنها قد أدمجت بطريقة أبسط فى أجزاء أخرى لذلك الفصل . ولقد تقلص القسم الخاص بتخطيط انسياب الموائع الى فقرة فى جزء مبكر من الفصل السادس وتغير ترتيب المحتوى فى ذلك الفصل .

وأضيف قسم عن الصور إلى الفصل الخامس ، وهناك مادة جديدة عن الهوائيات القصيرة ، ثنائى القطب نصف الموجى وأحادى القطب ربع الموجى . ويحتوى الملحق ج الآن على جدول قصير يُعطى قيمة دقيقة للثوابت الفيزيائية المستخدمة فى الكتاب وتظهر أمثلة عديدة جديدة أو محسنة فى مناقشات التحويل بين نظم الاحداثيات ، نظرية الانفراج ، اختزان الطاقة الكهروستاتيكية ، نظرية ستوكس ، القوة بين عناصر التيار ، ونسبة الموجة الواقعة للموجة المستوية المنتظمة .

تتضمن المناقشات التى خضعت لبعض المحاوله فى تحقيق معالجة محسنة كلا من المواد العازلة والمغناطيسية ، وعزم التدوير واستخدام الحاسب الآلى فى التكرار والمحانة الداخلية للخط المحورى .

وتشمل التغييرات المنسقة الموجودة فى الطبعة الرابعة العد التابعى للمعادلات خلال كل فصل ، واستبدال p ب r فى الاحداثيات الاسطوانية ، واستخدام v محل U للسرعة ، واستخدام أكثر توافقا لـ r لتحديد موقع نقطة المجال و' r لنقطة المنبع .

وكجهد إضافى للتوضيح ، فقد زاد عدد التوضيحات المستخدمة فى هذه الطبعة بحوالى ثلاثين فى المائة ولو أن جزءا كبيرا منها يظهر فى المسائل .

ولقد روجعت جداول قيم ثوابت المواد الموجودة فى الملحق (جـ) وصُححت حيث لزم ذلك .

وتشمل بيانات المراجع التى تظهر فى نهايات كل الفصول كتبا حديثة عديدة والآن مذكورا آخر طبعة لكل عمل .

والمؤلف يعترف بامتنان بالقراءة الشاملة للمخطوطة التى قام بها الاستاذ و . ل . وكىز بجامعة بورديو ، فقد أعطى اقتراحات كثيرة مفيدة . وكثير من النقاد الذين لم تذكر أسمائهم قد اقترحوا أيضا عددا من التغييرات التى عملت فى هذه الطبعة . وأيضا أشار طلبة إلى أخطاء وحددوا بعض الفقرات المربكة . وكل هذه المساعدة لها تقديرها العظيم ويأمل المؤلف باختلاص أن يستمر هذا المجهود الجماعى .

وليام هـ . هايت ،

الفصل الأول

تحليل المتجهات

إن تحليل المتجهات موضوع رياضى ، وهو يُدرس بواسطة الرياضيين أفضل من المهندسين . ولكن معظم طلبة الهندسة فى السنوات الأولى والأعلى لم يكن عندهم الوقت (أوريا الميل) لأخذ مقرر فى تحليل المتجهات ، برغم احتمال أن تكون كثير من المفاهيم والعمليات الأولية للمتجهات قد أدخلت فى مقررات الرياضة المبكرة . وهذه المفاهيم الأساسية والعمليات قد تم تغطيتها فى هذا الفصل ويجب أن يعتمد الوقت المخصص لها على التعرض السابق .

إن وجهة النظر هنا هى للمهندس أو الفيزيائى وليست للرياضى حيث أن الإثباتات مبينة أكثر من شرحها بدقة بالغة مع تأكيد التفسير الفيزيائى . ومن السهل للمهندس أن يأخذ منها أكثر دقة واكتمالا فى قسم الرياضيات بعد إعطائه قليلا من الصور الفيزيائية والتطبيقات .

ومن الممكن دراسة الكهربية والمغناطيسية دون استخدام تحليل المتجهات ، وربما قد فعل بعض طلبة الهندسة ذلك فى مقرر سابق فى الهندسة الكهربية أو الفيزياء الأساسية . ولكن الاستمرار فى هذا العمل الأولى سيؤدى الى كتابة معادلات كثيرا ما تتكون من حدود تبدو متشابهة . وإن إلقاء نظرة سريعة على إحدى هذه المعادلات الطويلة يشف عن قليل من الطبيعة الفيزيائية للمعادلة وربما يؤدى الى الاستخفاف بالمألوف .

إن تحليل المتجهات هو طريقة اختزال رياضية ، لها بعض الرموز الجديدة وبعض القواعد الجديدة أيضا وشرك هنا وهناك كما فى معظم المجالات الجديدة ، ولذلك يتطلب التركيز والانتباه والممارسة . والمسائل التدريبيه ، التى يبدأ ظهورها فى نهاية القسم ١ - ٤ يجب أن تعتبر جزءا متكاملا من مضمون الكتاب كما يجب أن تحل جميعا . وهذه المسائل لن تكون صعبة مادامت المادة فى الجزء الخاص بها قد فهمت كاملا . وقد تستغرق قراءة الفصل بهذه الطريقة وقتا أطول قليلا ، ولكن استثمار هذا الوقت سوف يؤدى الى فوائد مذهلة .

١ - ١ المقاييسات والمتجهات :

يعبر المقياس عن كمية تحدد قيمتها بعدد حقيقى واحد . والكميات x, y, z التى نستخدمها فى أساسيات الجبر هى مقاييسات . والكميات التى تمثلها هى مقاييسات أيضا . وإذا تحدثنا عن جسم يسقط مسافة L فى زمن t أو عن درجة حرارة T عند أى نقطة فى قدر من الحساء لها الاحداثيات x, y, z فإن L, t, x, y, z كلها مقاييسات . والكتلة والكثافة والضغط (وليست القوة) والحجم والمقاومة النوعية الحجمية هى كميات مقياسية أخرى . والجهد هو أيضا كمية مقياسية ، رغم أن التعبير المركب للجهد الجيبى ، وهو طريقة مصطنعة ، يُنتج مقياسيا مركبا أو مطورا ويتطلب تمثيله وجود عددين حقيقيين مثل الاتساع ، وزاوية الطور ، أو جزء حقيقى وجزء تخيلى .

تتكون الكمية المتجهة من مقدار^(١) ، واتجاه فى الفراغ . وسوف ينحصر اهتمامنا فى الفراغ الثنائى أو الثلاثى البعد فقط ، ولكن فى التطبيقات الأكثر تقدما قد تُعرف المتجهات فى فراغ له n من الأبعاد . القوة والسرعة والعجلة والخط المستقيم من الطرف الموجب الى السالب لبطارية شحن هى أمثلة للمتجهات . وكل كمية منها تعين بكل من المقدار والاتجاه .

وسوف نهتم أساسا بالمجالات المقياسية والمتجهة . ويُعرف المجال (المقياسى أو المتجه) رياضيا كدالة مالدلك المتجه الذى يصل نقطة اصل اختيارية الى نقطة عامة فى الفراغ . وعادة ما يمكننا ربط تأثير فيزيائى بالمجال مثل القوة على إبرة بوصلة فى مجال الأرض المغناطيسى أو حركة ذرات الدخان فى المجال المعرف بالسرعة الاتجاهية للهواء فى منطقة ما من الفراغ . ولاحظ أن مفهوم المجال دائما يرتبط بمنطقة . ونعرفنا كمية ماعند كل نقطة فى منطقة . وكل من المجالات المقياسية والمتجهة موجود . درجة الحرارة خلال قدر من الحساء ، أو الكثافة عند أى نقطة فى الأرض هى أمثلة للمجالات المقياسية . ومجال الجاذبية والمجال المغناطيسى للأرض وتدرج الجهد فى كابل وتدرج درجة الحرارة فى طرف كاوية لحام هى أمثلة للمجالات المتجهة . وتتغير قيمة المجال عامة مع الوضع والزمن .

وفى هذا الكتاب ، كما فى أغلب الكتب الأخرى التى تستخدم التدوين الاتجاهى ، سوف يميز المتجه بالخط الأسود مثل A . وتطبع المقاييسات بالخط المائل

(١) سوف نبنى الاصطلاح القائل أن المقدار يدل على القيمة المطلقة ، وعليه فإن مقدار أى كمية تكون موجبة دائما .

مثل A . عند الكتابة بخط اليد العادى أو باستخدام آلة كاتبة ، فإنه من المعتاد أن يوضع خط أو سهم فوق الكمية المتجهة لتبين الخاصية الاتجاهية . (تحذير : هذا أول شرك . فإن الإهمال فى الرمز مثل حذف الخط أو السهم رمز المتجه هو السبب الرئيسى للأخطاء فى تحليل المتجهات) .

١ - ٢ جبر المتجهات :

بعد الانتهاء من تعريف المتجهات والمجالات المتجهة ، يمكن أن نستمر لتعريف قواعد حساب المتجهات وجبر المتجهات ، وفيما بعد حساب التفاصيل والتكامل للمتجهات . وسوف تكون بعض القواعد مشابهة لجبر المقياسيات وبعضها مختلف قليلا ، والبعض الآخر سيكون جديدا تماما وغير معتاد عليه . هذا من المتوقع ، حيث أن المتجه يمثل معلومات أكثر مما تمثله الكمية المقياسية ، وحاصل ضرب متجهين ، على سبيل المثال ، سيكون أكثر تعقيدا من ضرب مقياسيين .

والقواعد هى تلك الخاصة بفرع من الرياضيات راسخ القواعد والكل يلعب بنفس القواعد . ونحن طبعاً سوف نقوم بمجرد النظر الى هذه القواعد ونفسرها . ولكن من المشجع أن نحسب أنفسنا روادا فى هذا المجال . فسنعمل قواعد خاصة بنا ، كما يمكننا أن نعمل قواعد نرغب فيها . المطلوب الوحيد هو أن تكون القواعد غير متناقضة . وبالطبع فمن المستحسن أن تتفق القواعد مع جبر المقياسيات كلما أمكن ذلك ، والأحسن إذا مكنتنا هذه القواعد من حل قليل من المسائل العملية .

ولا يجب أن يسقط الشخص فى مصيدة « عبادة الجبر » ويعتقد أن قواعد الجبر التى تُدرس بالكليات قد أنزلت على الإنسان عند بدء الخليقة . إن هذه القواعد مجرد تتابع منطقى بالغ الفائدة . وهناك أنواع من الجبر أقل شيوعاً ولكن بقواعد مختلفة كلية . ففى الجبر البوليني حاصل الضرب AB يمكن أن يكون فقط إما واحداً ، أو صفراً . ولجبر المتجهات قواعد الخاصة به ، ويجب أن نكون دائماً على حذر من الدوافع الفكرية المسلحة علينا من قواعد جبر المقياسيات الأكثر شيوعاً .

ويتبع جمع المتجهات قانون متوازى الأضلاع . وهذا يمكن أن يتم بيانياً ، إذا لم نطلب الدقة . ويبين الشكل ١ - ١ جمع متجهين A و B . ويُرى بسهولة أن : $A + B = B + A$ أى أن جمع المتجهات يتبع قانون التبادل . وأيضاً يتبع جمع المتجهات قانون التجميع

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$



شكل ١ - ١ يمكن جمع متجهين بيانيا إما برسم كلا المتجهين من نقطة أصل مشتركة ، واستكمال متوازي الأضلاع ، أو ببناء المتجه الثانى من رأس الأول واستكمال المثلث ، وكلتا الطريقتين يمكن تميمها بسهولة إلى ثلاثة متجهات أو أكثر .

لاحظ أنه عندما يرسم المتجه كسهم ذى طول محدود ، فإن موضعه يعرف بأنه عند طرف ذيل السهم .

وبالنسبة للمتجهات المشتركة المستوى ، أى التى تقع فى مستوى واحد كالمبينة فى الشكل ١ - ١ ، والتى تقع كلها فى مستوى الورقة ، فيمكن جمعها بالتعبير عن كل متجه بدلالة مركبة أفقية ، ومركبة رأسية وجمع المركبات المتناظرة .

ويمكن بالمثل جمع المتجهات فى الأبعاد الثلاثة بالتعبير عنها بدلالة ثلاثة مركبات ، وجمع المركبات المتناظرة . وستعطى أمثلة لتلك الطريقة فى الجمع بعد مناقشة مركبات المتجه فى القسم ١ - ٤ .

ونتج قاعدة طرح المتجهات بسهولة من قاعدة الجمع حيث أننا يمكننا أن نعبّر دائما عن $A - B$ فى الصورة $A + (-B)$ حيث انعكست إشارة واتجاه المتجه الثانى ، وبعد ذلك يضاف هذا المتجه إلى الأول باستخدام قاعدة جمع المتجهات .

ويمكن ضرب المتجهات بالمقاييس . وتتغير قيمة المتجه ولا يتغير اتجاهه عندما يكون المقياس موجبا بينما ينعكس الاتجاه عندما تضرب بمقياس سالب . ويتبع ضرب المتجه بمقياس قانونى التجميع والتوزيع للجبر ، مما يؤدى إلى

$$(r + s)(A + B) = r(A + B) + s(A + B) = rA + rB + sA + sB$$

وقسمة متجه على مقياس ليست الا ضربا بمقلوب ذلك المقياس .

وسيناقش ضرب متجه بمتجه فى القسمين ١ - ٦ و ١ - ٧ .

ويقال إن المتجهين متساويين إذا كان الفرق بينهما صفرا ، أو $A = B$ إذا كان

$$A - B = 0$$

وفى استخدامنا للمجالات المتجهة سنجمع دائما ونطرح المتجهات المعرفة عند نفس النقطة . وعلى سبيل المثال سيتبين لنا أن المجال المغناطيسى الكلى حول حدود مغناطيسية صغيرة هو مجموع المجالات الناتجة من الأرض والمغناطيس الدائم ، والمجال الكلى عند أى نقطة هو مجموع كلا المجالين المفردين عند تلك النقطة .

ولكن إذا لم تكن بصدد مجال متجه فيمكننا أن نجعل أو نطرح المتجهات غير المعرفة عند نفس النقطة . فمثلا مجموع قوة الجاذبية المؤثرة على رجل وزنه ١٥٠ ثقل باوند عند القطب الشمالي ، وعلى رجل وزنه ١٧٥ ثقل باوند عند القطب الجنوبي يمكن الحصول عليها بنقل كل من متجهي القوة الى القطب الجنوبي قبل الجمع . والمحصلة هي قوة ٢٥ ثقل باوند موجهة لمركز الأرض عند القطب الجنوبي . وإذا أردنا أن تكون صعبة ، فنستطيع أن نصف القوة كذلك أنها ٢٥ ثقل باوند موجهة خارجة من مركز الأرض (أوالى أعلى) عند القطب الشمالي^(١) .

١ - ٣ نظام الاحداثيات الكرتيزية :

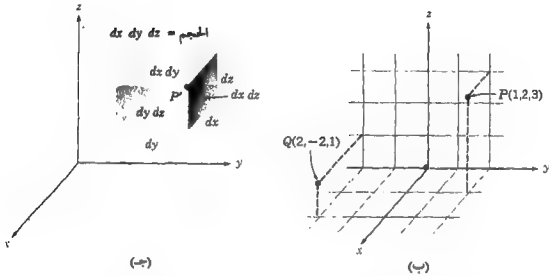
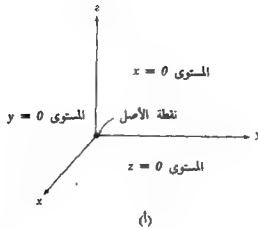
لكي نصف متجها بدقة ، فيجب إعطاء أطوال خاصة واتجاهات وزوايا ومسافات ، أو مركبات وهناك ثلاثة طرق بسيطة لعمل ذلك ، وحوالي ثمانية أو عشرة طرق أخرى مفيدة في حالات خاصة جدا . وسنكتفي باستخدام الطرق الثلاثة البسيطة ، وأكثرها بساطة هو نظام الاحداثيات الكرتيزية ، أو الاحداثيات المتعامدة .

في نظام الاحداثيات الكرتيزية نقيم ثلاثة محاور إحداثية متعامدة على بعضها . البعض ونسميها المحاور x ، y و z . ومن المعتاد اختيار نظام إحداثيات يميني ، والذي فيه دوران (خلال الزاوية الأصغر) المحور x الى المحور y سيسبب تقدم برصة يمينية في اتجاه المحور z . وباستخدام اليد اليمنى فان الابهام والسبابة والأوسط يمكن أن تطابق المحاور x ، y و z بالترتيب . ويوضح الشكل ١ - ٢ أ نظام إحداثيات كرتيزي يميني .

وتوقع النقطة بإعطاء إحداثياتها x ، y و z . وهذه هي الأبعاد من نقطة الأصل الى تقاطعات الأعمدة الساقطة من النقطة على المحاور x ، y و z بالترتيب . وكطريقة أخرى لشرح قيم الاحداثيات ، وكطريقة تناظر تلك التي يجب أن تستخدم في كل نظم الاحداثيات الأخرى ، هي أن نعتبر النقطة كنقطة تقاطع ثلاثة أسطح ، وهي المستويات $x = \text{ثابت}$ ، $y = \text{ثابت}$ و $z = \text{ثابت}$ والثوابت هي قيم إحداثيات النقطة .

ويوضح شكل ١ - ٢ ب النقطتين P و Q اللتين لهما الاحداثيات $(1, 2, 3)$ و $(-2, 1, 2)$ بالترتيب . وعليه فان النقطة P تقع عند نقطة الالتقاء المشتركة بين المستويات $x = 1$ ، $y = 2$ و $z = 3$ بينما تقع النقطة Q عند ملتقى المستويات $x = 2$ ، $y = -2$ و $z = 2$.

(١) قد أشار بعضهم الى أن القوة يمكن أن توصف عند خط الاستواء بأنها موجهة شماليا ومر على حق (ولكن الكافي يكفي)



شكل ١-٢ (أ) نظام إحداثيات كرتيزي يميني . إذا مثلت الأصابع المقوسة لليد اليمنى الاتجاه الذي يدور فيه المحور x لكي يتطابق مع المحور y فإن الأصابع بين اتجاه المحور z . (ب) موقع النقطتين $P(1, 2, 3)$ و $Q(2, -2, 1)$. (ج) عنصر الحجم التفاضلي في الإحداثيات الكرتيزية حيث dx و dy و dz تفاضلات مستقلة .

وأيضاً تعرضنا لنظم الإحداثيات الأخرى في القسمين ١-٨ و ١-٩ يجب أن نتوقع نطقاً يتحدد موقعها بالتقاطع المشترك لثلاثة أسطح ، ليست بالضرورة مستويات ، ولكنها مازالت متعامدة على بعضها البعض عند نقطة التقاطع .

إذا تخيلنا ثلاثة مستويات متقاطعة عند نقطة عامة P ، إحداثياتها x, y, z ، فيمكن أن نزيد قيمة كل إحداثي بمقدار تفاضلي لنحصل على ثلاثة مستويات مزاحة قليلاً عند النقطة P' ، إحداثياتها $x + dx, y + dy, z + dz$. وتحدد المستويات الستة متوازي سطوح قائم حجمه هو $dv = dx dy dz$ والأسطح لها المساحات التفاضلية

ds وقيمها $dx dy$ ، $dy dz$ ، $dz dx$. وأخيراً فإن المسافة dL من P إلى P' هي قطر متوازي الأسطح وطولها $\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$. والمجموع التفاضلي موضح بشكل ١ - ٢ ج ، وفيه نقطة P' مينة ولكن نقطة P تقع عند الركن الوحيد غير المرئى .

كل ذلك معروف من حساب المثلثات أو الهندسة الفراغية ويشمل حتى الآن كميات مقياسية فقط . وسنبداً بشرح المتجهات بدلالة نظام للإحداثيات في القسم التالي .

١ - ٤ مركبات المتجه ووحدات المتجهات :

لكي نصف متجهاً في الإحداثيات الكرتيزية ، دعنا نعتبر متجهاً r متداً للخارج من نقطة الأصل . وكطريقة منطقية لتحديد هذا المتجه هي إعطاء ثلاث مركبات متجهة تقع في اتجاه المحاور الإحداثية ، والتي يكون مجموعها بالضرورة هو المتجه المعطى . فإذا كانت المركبات المتجهة للمتجه r هي x ، y ، z فإن $r = x + y + z$. والمركبات المتجهة مينة في شكل ١ - ١٣ . وبدلاً من متجه واحد ، فلدينا الآن ثلاثة ، ولكن ذلك خطوة إلى الأمام ، لأن المتجهات الثلاثة ذات طبيعة بسيطة ، فكل منها موجه دائماً في اتجاه أحد المحاور الإحداثية .

وبتعبير آخر : فإن المركبات المتجهة لها مقادير تعتمد على المتجه المعطى (مثل r آنفاً) ، ولكن كل منها لها اتجاه معروف وثابت . ويوحى هذا باستخدام وحدات متجهات مقدارها الوحدة ، بالترميز ، وموجهة في موازاة المحاور الإحداثية في اتجاه زيادة قيم الإحداثيات . وسنحتفظ بالرمز a لوحدة المتجه ونحدد اتجاه وحدة المتجه برمز سفلى مناسب . وعلى ذلك فإن a_x ، a_y و a_z هي وحدات المتجهات في نظام الإحداثيات الكرتيزية ^(١) . وهي موجهة في اتجاه المحاور x ، y و z بالترتيب كما هو مبين في شكل ١ - ٣ ب .

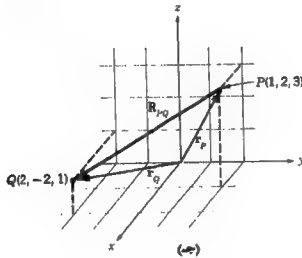
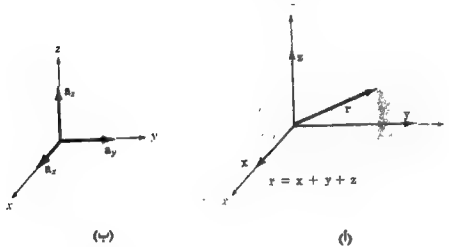
فإذا حدث أن كانت للمركبة المتجهة r وحدتين في المقدار وموجهة في اتجاه زيادة y ، فيجب حينئذ أن تكتب $r_y = 2a_y$. وبالنسبة لمتجه r موجه من نقطة الأصل إلى النقطة $P(1, 2, 3)$ فإنه يكتب $r = a_x + 2a_y + 3a_z$. والمتجه من P إلى Q يمكن الحصول عليه بتطبيق قاعدة جمع المتجهات . وهذه القاعدة تشير إلى أن المتجه من نقطة الأصل إلى P بالإضافة إلى المتجه من P إلى Q يساوي المتجه من نقطة الأصل إلى Q . ولذا يكون المتجه المطلوب من $P(1, 2, 3)$ إلى $Q(2, -2, 1)$ هو

(١) تستخدم الرموز i ، j و k أيضاً لعدة لوحدات المتجهات في الإحداثيات الكرتيزية .

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{PQ} = \mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_P &= (2 - 1)\mathbf{a}_x + (-2 - 2)\mathbf{a}_y + (1 - 3)\mathbf{a}_z \\ &= \mathbf{a}_x - 4\mathbf{a}_y - 2\mathbf{a}_z \end{aligned}$$

والمتجهات \mathbf{r}_Q و \mathbf{r}_{PQ} مبنية في شكل ١ - ٣ ج .

هذا المتجه الأخير لا يمتد خارجا من نقطة الأصل مثل المتجه \mathbf{r} الذى اعتبرناه فى البداية . ومع ذلك فقد تعلمنا أن المتجهات التى لها نفس المقدار ، والتى تشير الى نفس الاتجاه متساوية ، ولذا نرى أنه لكى نساعد طرق تصورنا فإن لنا حرية نقل أى متجه الى نقطة الأصل قبل تعيين مركباته الاتجاهية . وطبعاً يجب أن نحافظ على التوازي أثناء عملية النقل .



شكل ١ - ٣ (أ) المركبات المتجهة x, y, z للمتجه \mathbf{r} . (ب) وحدات المتجهات لنظام الإحداثيات الكرتيزية لها مقدار الوحدة وتوجه في اتجاه زيادة متغيراتها الخاصة بها . (ج) المتجه \mathbf{r}_{PQ} يساوى الفرق الاتجاهى $\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_P$.

وإذا كنا نناقش قوة متجهة F ، أو الأخرى أى متجه غير متجه إزاحى مثل r ، فستظهر مشكلة استخدام حروف مناسبة للمركبات الاتجاهية الثلاثة . ولن يجدى أن نسميهم x ، y ، z لأنهم إزاحات أو مسافات موجهة وهى تقاس بالامتار (وتختصر m) أو أى وحدة أطوال أخرى . وغاليا ما نتحاشى هذه المشكلة باستخدام مركبات مقياسية أو ببساطة المركبات F_x ، F_y ، و F_z .

وتكون المركبات هى المقادير بإشارتها لمتجهات المركبات . وحينئذ يمكننا كتابة $F = F_x a_x + F_y a_y + F_z a_z$ وتكون متجهات المركبات هى $F_x a_x$ ، $F_y a_y$ ، و $F_z a_z$.

وعلى ذلك فيمكن كتابة أى متجه B فى الصورة $B = B_x a_x + B_y a_y + B_z a_z$ ومقدار B ، ويكتب $|B|$ ، أو ببساطة B ، ويعطى بـ

$$(1) \quad |B| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}$$

وكل من نظم الاحداثيات الثلاث التى نناقشها سيكون لها وحدات متجهة أساسية ومتعامدة على بعضها تستخدم لتحليل أى متجه الى مركباته المتجهة . ولكن وحدات المتجهات ليست مقصورة على هذا التطبيق . وغاليا ما تكون امكانية كتابة وحدة المتجه فى اتجاه محدد مفيدة . وهذا يمكن عمله ببساطة ، حيث أن وحدة المتجه فى اتجاه معطى ، هو مجرد متجه فى ذلك الاتجاه ، مقسوم على مقداره . فوحدة المتجه فى اتجاه r هى $r / \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ، ووحدة المتجه فى اتجاه المتجه B هى

$$(2) \quad a_B = \frac{B}{\sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}} = \frac{B}{|B|}$$

وعلى سبيل المثال ، فوحدة المتجه الموجه من نقطة الاصل الى النقطة $G(2, -2, -1)$ يمكن الحصول عليها بتحديد ما يلى : أولا متجه G ممدود من نقطة الاصل الى $G(2, -2, -1)$ ،

$$G = 2a_x - 2a_y - a_z$$

ثم إيجاد مقدار G ،

$$|G| = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = 3$$

وباختصاراً بالتعبير عن وحدة المتجه المطلوبة كناتج القسمة ،

$$a_G = \frac{G}{|G|} = \frac{2}{3}a_x - \frac{2}{3}a_y - \frac{1}{3}a_z$$

ويلزمنا رمز مميز خاص لوحدة المتجه بحيث تكون صفتها ظاهرة مباشرة . والرموز التي سبق استخدامها هي u_B , a_B , 1_B , أو حتى b . وسوف نستخدم دائما الحرف الصغير a مع رمز سفلى مناسب .

(ملحوظة : في كل الكتاب نظهر تمارين تدريبية تلى الأقسام التي يقدم فيها مبدأ جديد لكى يسمح للطلاب باختيار فهمه أو فهمها للحقيقة الأساسية نفسها . والمسائل مفيدة في اكتساب تعود على المصطلحات والأفكار الجديدة ويجب أن تحل جميعها . ونظهر مسائل أكثر عمومية في آخر الفصول . وحلول المسائل التدريبية معطى بنفس ترتيب أجزاء المسألة) .

ت ١-١ - إذا أعطيت النقط الثلاث $A(2, -3, 1)$, $B(-4, -2, 6)$, و $C(1, 5, -3)$: أوجد : (أ) المتجه من A الى C , (ب) وحدة المتجه من B الى A , (ج) المسافة من B الى C , (د) المتجه من A الى منتصف الخط المستقيم الواصل من B الى C .
الاجابة : $-0.635a_x - 0.127a_y + 0.762a_z$; 12.45 ; $0.5a_x + 4.5a_y + 3.5a_z$.
 $-ax + 8a_y - 4a_z$.

١ - المجال المتجه :

لقد تم تعريف المجال المتجه بأنه : دالة اتجاهية لمتجه الموضع . وعامة سيغير مقدار واتجاه الدالة مع تحركنا خلال المنطقة ، ويجب تحديد مقدار الدالة الاتجاهية من قيم إحداثيات النقطة المعنية . وحيث أننا اعتبرنا فقط نظام الإحداثيات الكرتيزية ، فعلىنا أن نتوقع أن المتجه سيكون دالة للمتغيرات x , y , و z .

وإذا فحصنا سرعة الماء في المحيط في منطقة ما بالقرب من السطح حيث يكون المد والتيارات هامة ، فقد نقرر أن نمثلها بمتجه سرعة والتي تكون في أى اتجاه حتى إلى أعلى أو إلى أسفل . فإذا أخذ المحور z الى أعلى والمحور x في اتجاه الشمال والمحور y الى الغرب ونقطة الأصل على السطح فيكون لدينا نظام إحداثيات يميني ، ويمكننا كتابة متجه السرعة في الصورة $v_x a_x + v_y a_y + v_z a_z = v$ حيث كل من المركبات v_x , v_y , و v_z قد تكون دالة للمتغيرات الثلاثة x , y , و z . فإذا بسطت المسألة بافتراض أننا في جزء من « تيار الخليج » حيث يتحرك الماء شمالا فقط فإن v_y و v_z يكونان أصفارا . ويمكن إضافة افتراضات تسهيلية أخرى ، إذا كانت السرعة متناقصة مع العمق وتغير ببطء شديد كلما تحركنا شمالا ، جنوبا ، شرقا أو غربا . ويمكن أن يكون $v = 2e^{z/100} a_x$ تعبيراً مناسباً . فتكون السرعة 2 m/s (2 m/s تعنى مترا لكل ثانية) عند السطح والسرعة 0.368×2 أو 0.736 m/s عند عمق 100 m (أى $z = -100$) وتستمر السرعة فى التناقص مع العمق ، وفي هذا المثال لمتجه السرعة اتجاه ثابت .

وبينما المثال السابق بسيط نوعاً وهو تقريب كبير لحالة فيزيائية ، فإن أى تعبير أكثر دقة سيكون بالنتيجة أكثر تعقيداً وصعوبة فى التحليل . وسنواجه كثيراً من المجالات فى دراستنا للكهرربية والمغناطيسية أبسط من مثال السرعة ، حيث كانت فيه مركبة واحدة ومتغير واحد (المركبة x والمتغير z) . وسندرس أيضاً مجالات أكثر تعقيداً ، وحينئذ سنناقش طرقاً لشرح هذه الصيغ فيزيائياً .

ت ١ - ٢ - مجال متجه معطى بـ $W = 4x^2y a_x - (7x + 2z) a_y + (4xy + 2z)^2 a_z$ (أ) مامقدار المجال عند النقطة $P(2, -3, 4)$. (ب) إعط وحدة المتجه التى تبين اتجاه المجال عند P . (ج) عند أى نقطة أو نقط على المحور z يكون مقدار W مساوياً للوحدة ؟

الاجابة : $53.4 ; 0.150a_x - 0.412a_y - 0.899a_z ; \pm 0.455$.

١ - ٦ الضرب بالنقطة :

سنبحث الآن الطريقة الأولى من طريقتين لضرب المتجهات . وستناقش الطريقة الثانية فى القسم التالى .

إذا أعطينا متجهين A, B فإن الضرب بالنقطة أو الضرب المقياسى يُعرف بأنه حاصل ضرب مقدار A ومقدار B وجيب تمام الزاوية الصغرى بينهما ،

$$(٣) \quad A \cdot B = |A| |B| \cos \theta_{AB}$$

وتظهر النقطة بين المتجهين ، ويجب أن تكون ثقيلة للتأكيد . والضرب بالنقطة أو الضرب المقياسى هو كمية مقياسية كما تدل عليه إحدى التسميتين ، وينطبق عليه قانون التبادل .

$$(٤) \quad A \cdot B = B \cdot A$$

لأن إشارة الزاوية لا تؤثر على حد جيب التمام . ويقرأ $A \cdot B$ « نقطة A و B » .

ربما يكون التطبيق الأكثر انتشاراً لحاصل الضرب بالنقطة هو فى الميكانيكا ، حيث تعمل قوة ثابتة F طوال إزاحة مستقيمة L قدرها من الشغل θ $FL \cos$ ، والتى من الأسهل أن تكتب $F \cdot L$. ويمكن أن نعطى مسبقاً إحدى نتائج الفصل الرابع بالإشارة الى أنه إذا تغيرت القوة على طول المسار فإن التكامل يكون ضرورياً لإيجاد الشغل الكلى ، وتصبح النتيجة

$$\text{الشغل} = \int F \cdot dL$$

ويمكن أن يؤخذ مثال آخر من المجالات المغناطيسية ، وهو موضوع سنقول حوله الكثير فيما بعد . التدفق الكلى Φ الذى يعبر سطحاً مساحته S يعطى بـ BS إذا كانت كثافة التدفق المغناطيسى B عمودية على السطح ومتنتظمة عليه . ونحن نعرف سطحاً متجهها S على أن له مقداراً بقدر المساحة المعتادة ، وله اتجاه عمودى على السطح (مع تجنب مشكلة اختيار أى من العمودين الممكنين حالياً) . وحينئذ يكون التدفق الذى يعبر السطح هو $B \cdot S$. وهذا التعبير صالح لأى اتجاه لكثافة التدفق المغناطيسى المنتظم . ولكن إذا كانت كثافة التدفق ليست ثابتة على السطح ، فإن التدفق الكلى يكون $\Phi = \oint B \cdot dS$. وستظهر تكاملات بهذه الصورة العامة فى الفصل الثالث .

إن إيجاد الزاوية بين متجهين فى الفراغ الثلاثى الأبعاد غالباً ما يكون عملاً نفضل تحاشيه ، ولهذا السبب فإن تعريف الضرب بالنقطة عادة لا يستخدم فى صيغته الأساسية . ويمكن الحصول على نتيجة أكثر نفعاً باعتبار متجهين تعطى مركباتهما الكرتيزية مثل $A = A_x a_x + A_y a_y + A_z a_z$ و $B = B_x a_x + B_y a_y + B_z a_z$. وينطبق قانون التوزيع أيضاً على الضرب بالنقطة ، ولذلك ، فإن $A \cdot B$ يعطى مجموع تسعة حدود مقياسية ، يشمل كل منها حاصل الضرب بالنقطة لوحدة متجهين . وحيث أن الزاوية بين أى وحدتى متجهين مختلفتين فى نظام الإحداثيات الكرتيزية هو 90° فإننا نحصل على

$$a_x \cdot a_y = a_y \cdot a_x = a_x \cdot a_z = a_z \cdot a_x = a_y \cdot a_z = a_z \cdot a_y = 0$$

ما الحدود الثلاثة المتبقية ، فتشمل حاصل الضرب بالنقطة لوحدة متجه مع نفسها ، وهى الوحدة ، وتعطى فى النهاية

$$(5) \quad A \cdot B = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

وهو تعبير لا يحتوى زوايا .

وإذا ضرب متجه فى نفسه مقياسياً يعطى مقداره مربعاً ، أو

$$(6) \quad A \cdot A = A^2 = |A|^2$$

وأى وحدة متجه مضروبة مقياسياً فى نفسها تعطى الوحدة ،

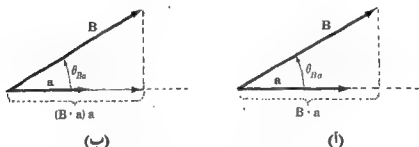
$$a_i \cdot a_i = 1$$

وأحد التطبيقات الكبيرة الأهمية للضرب بالنقطة هو إيجاد مركبة متجه فى اتجاه معين . وبالمرجوع إلى شكل ١ - ٤ ، يمكننا إيجاد المركبة (المقياسية) للمتجه B فى الاتجاه المحدد بوحدة المتجه a كما يلى :

$$B \cdot a = |B| |a| \cos \theta_{Ba} = |B| \cos \theta_{Ba}$$

وتكون إشارة المركبة موجبة إذا كان $\theta_{Ba} < 90^\circ$ ، وسالبة إذا كان $90^\circ < \theta_{Ba} \leq 180^\circ$

ولكى نوجد المركبة المتجهة لـ B فى اتجاه a . فاننا ببساطة نضرب المركبة (المقياسية) فى a ، كما هو موضح فى شكل ١ - ٤ ب . فمثلا ، مركبة B فى اتجاه a_x هى $B \cdot a_x = B_x$ والمركبة المتجهة هى $B_x a_x$ أو $(B \cdot a_x) a_x$.



شكل ١ - ٤ (أ) المركبة (المقياسية) للمتجه B فى اتجاه وحدة المتجه a هى $B \cdot a$ (ب) المركبة المتجهة لـ B فى اتجاه وحدة المتجه a هى $(B \cdot a) a$

وعلى ذلك ، فان مشكلة إيجاد مركبة متجه فى أى اتجاه مرغوب تؤول الى مشكلة إيجاد وحدة المتجه فى هذا الاتجاه ، وذلك يمكننا عمله .

والتعبير الهندسى مسقط يستخدم أيضا مع الضرب بالنقطة . أى ان $B \cdot a$ هو مسقط R فى اتجاه a .

١ - ٣ - إذا أعطيت $F = 2a_x - 5a_y - 4a_z$ و $G = 3a_x + 5a_y + 2a_z$. أوجد :
(أ) $F \cdot G$ ، (ب) الزاوية بين F و G ؛ (ج) طول مسقط F على G (د) المسقط المتجه لـ F على G .

الاجابة : 27.0 ؛ 130.8° ؛ 4.38 ؛ $1.42a_x - 3.55a_y - 2.13a_z$

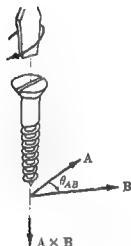
١ - ٧ الضرب بعلامة \times

سُعرِف الضرب بعلامة \times أو الضرب الاتجاهى لمتجهين معطين A و B ، ويكتب بوضع علامة \times بين المتجهين بالصورة $A \times B$ وتقرأ « A فى B » . وحاصل الضرب الاتجاهى $A \times B$ هو متجه ، مقداره يساوى حاصل ضرب مقدارى A و B وجيب الزاوية الصغرى بين A و B ، واتجاهه عمودى على المستوى الذى يشمل A و B وعلى امتداد أحد الممودين الممكنين ، والذى يكون فى اتجاه تقدم برصة يمينية عندما يدور A إلى اتجاه B . وهذا الاتجاه موضح فى شكل ١ - ٥ . ونذكر أن أيا من المتجهين

يمكن تحريكه كما تريد مع بقاء اتجاهه ثابتاً الى أن يكون للمتجهين « نقطة أصل مشتركة ». وهذا يحدد المستوى الذى يحتويهما . ومع ذلك ، فان أغلب تطبيقاتنا ستتعلق بمتجهات معرفة عند نفس النقطة .
وكمعادلة يمكننا كتابة

$$(V) \quad \mathbf{A} \times \mathbf{B} = a_B |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin \theta_{AB}$$

حيث مازال من المطلوب نص إضافي ، مثل ذلك المعطى آنفاً ، لشرح اتجاه وحدة المتجه \mathbf{a}_N . والرمز السفلى يقوم مقام « عمودى » .



شكل ١ - اتجاه $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ هو اتجاه
لقدم برودة يمينية عندما يدور
إلى \mathbf{B} .

وعكس ترتيب المتجهين \mathbf{A} و \mathbf{B} يعطى وحدة متجه فى الاتجاه المضاد ، ونرى أن حاصل الضرب الاتجاهى ليس تبادلياً ، لأن $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = -(\mathbf{B} \times \mathbf{A})$.

وإذا طبق تعريف حاصل الضرب الاتجاهى على وحدات المتجهات \mathbf{a}_x و \mathbf{a}_y نرى أن $\mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_z$ لأن كل متجه مقداره الوحدة والمتجهين متعامدين ، ودوران \mathbf{a}_x إلى \mathbf{a}_y يدل على الاتجاه الموجب لـ z بتعريف نظام الإحداثيات اليميني . وبالمثل : $\mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_x$ و $\mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_x = \mathbf{a}_y$. لاحظ التماثل الأبجدي . وطالما أن المتجهات الثلاثة \mathbf{a}_x ، \mathbf{a}_y و \mathbf{a}_z مكتوبة بالترتيب (وبفرض أن \mathbf{a}_x يلى \mathbf{a}_z ، كتلاثة أفعال فى دائرة يمسك كل منها ذيل سابقه ، يمكننا كتابة \mathbf{a}_y ، \mathbf{a}_z و \mathbf{a}_x أو \mathbf{a}_x ، \mathbf{a}_y و \mathbf{a}_z) فإنه يمكن وضع علامة \times وعلامة التساوى فى أى من الفراغين الخاليين . وكأمر حقيقى فإن من الأسهل الآن تعريف نظام إحداثيات كرتيزى يمينى بقول أن $\mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_z$.

وكمثال بسيط على استخدام الضرب الاتجاهي يمكن أخذه من الهندسة أو حساب المثلثات . فلإيجاد مساحة متوازي الأضلاع فإن حاصل ضرب طولَي ضلعين متجاورين ي ضرب بجيب الزاوية بينهما . وباستخدام الرموز المتجهة للضلعين ، فيمكننا التعبير عن المساحة (المقياسية) كمقدار $A \times B$ أو $|A \times B|$.

ويمكن استخدام الضرب الاتجاهي ليحل محل قاعدة اليد اليمنى المألوفة لدى كل مهندس الكهرياء . اعتبر القوة على موصل مستقيم طوله L ، حيث اتجاه L يناظر اتجاه التيار المستمر I مع وجود مجال مغناطيسي منتظم كثافة تدفقه B وباستخدام رموز المتجهات ، يمكننا كتابة النتيجة في الصورة $F = I L \times B$. وسنحصل على هذه العلاقة فيما بعد في الفصل التاسع .

من الواضح يحتاج إيجاد حاصل الضرب الاتجاهي بواسطة تعريفه مجهوداً أكثر من إيجاد حاصل الضرب المقياسي من تعريفه ، فليس فقط علينا إيجاد الزاوية بين المتجهين ، ولكن علينا إيجاد تعبيراً لوحدة المتجه a_n . ولكن هذا المجهود يمكن تفاديه باستخدام المركبات الكرتيزية للمتجهين A و B وفك حاصل الضرب الاتجاهي كمجموع تسعة حواصل ضرب اتجاهية أكثر سهولة ، كل منها يشمل وحدتي متجهين ،

$$\begin{aligned} A \times B = & A_x B_y a_z - A_y B_x a_z + A_z B_x a_y - A_x B_z a_y \\ & + A_y B_z a_x - A_z B_y a_x + A_z B_x a_y - A_x B_z a_y \\ & + A_z B_x a_y - A_x B_z a_y \end{aligned}$$

ولقد وجدنا أن $a_x \times a_x = a_y \times a_y = a_z \times a_z = 0$ ، $a_x \times a_y = a_z$ ، $a_y \times a_z = a_x$ ، $a_z \times a_x = a_y$ ، $a_x \times a_z = -a_y$ ، $a_y \times a_x = -a_z$ ، $a_z \times a_y = -a_x$. والثلاثة حدود المتبقية أصفاراً ، لأن حاصل الضرب الاتجاهي لأي متجه في نفسه هو صفر ، حيث أن الزاوية المحصورة تساوي صفراً . ويمكن جمع هذه النتائج لتعطي

$$(A) \quad A \times B = (A_y B_z - A_z B_y) a_x + (A_z B_x - A_x B_z) a_y + (A_x B_y - A_y B_x) a_z$$

أو بكتابتها كمحددة في صورة يمكن تذكرها بسهولة أكثر ،

$$(9) \quad A \times B = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

فإذا كان $A = 2a_x - 3a_y + a_z$ و $B = -4a_x - 2a_y + 5a_z$ ، فإننا نحصل على :

$$\begin{aligned} A \times B &= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ 2 & -3 & 1 \\ -4 & -2 & 5 \end{vmatrix} \\ &= [(-3)(5) - (1)(-2)]a_x - [(2)(5) - (1)(-4)]a_y \\ &\quad + [(2)(-2) - (-3)(-4)]a_z \\ &= -13a_x - 14a_y - 16a_z \end{aligned}$$

ولأولئك الذين نسوا ، فإن مفكوك المحددة مشروح في الملحق الثاني للمرجع 1
المدرج في آخر الفصل .

ت ١ - ٤ إذا كان $G = 4a_x - 3a_y + 2a_z$ و $F = -45a_x + 70a_y + 25a_z$
أوجد : (أ) $F \times B$ (ب) $a_x \times (a_y \times a_z)$ (ج) $a_x \times F$ (د) وحدة متجه
عمودي على كل من F و G .
الاجابة :

$$\pm (0.669a_x + 0.591a_y - 0.451a_z) ; -70a_x - 45a_y ; 215a_x + 190a_y - 145a_z$$

٨ - ١ نظم إحداثيات أخرى : الإحداثيات الأسطوانية الدائرية :

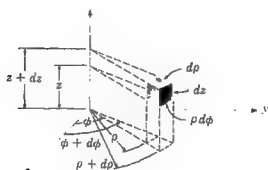
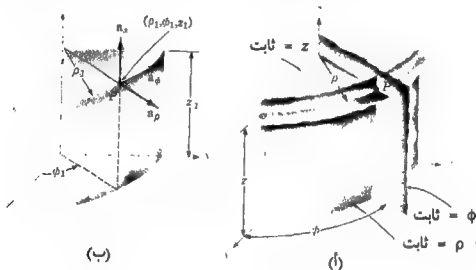
إن نظام الإحداثيات الكرتيزية ، هو عامة ما يفضل الطالب حل جميع المسائل
فيه . ولكن غالبا ما يعنى هذا شغلا أكثر للطالب حيث أن مسائل كثيرة لها نوع من التماثل
يفتضى استخدام معالجة أكثر منطقية . ومن السهل أن نعمل الآن ، بصفة نهائية ، العمل
المطلوب لنعتمد على الإحداثيات الأسطوانية والكروية بدلا من بذل جهد مساو أو أكثر
لكل مسألة تشمل تماثلا اسطوانيا أو كرويا فيما بعد . ومع وضع هذا التوفير في الجهد
المستقبلي في أذهاننا ، ستلقى نظرة متأنية وبعناية على الإحداثيات الأسطوانية
والكروية .

ونظام الإحداثيات الأسطوانية الدائرية ، هو الصورة في الأبعاد الثلاثة للإحداثيات
القطبية في الهندسة التحليلية . ففي الإحداثيات القطبية ذات البعدين وُقعت النقطة في
مستوى بإعطاء مسافتها ρ من نقطة الأصل ، والزاوية ϕ بين الخط الواصل من النقطة إلى
نقطة الأصل ، وبين خط نصف قطري اختياري ، مأخوذ ليكون $\phi = 0$. ويمكن

(١) المتغيران في الإحداثيات القطبية غالبا ما يسميان ρ و θ . ولكن الأكثر شيوعا في الإحداثيات الثلاثة هو أن
نستخدم ρ للمتغير النصف قطري في الإحداثيات الأسطوانية و ϕ للمتغير النصف قطري (المختلف عنه) في
الإحداثيات الكروية . وكذلك فإن المتغير الزاوي في الإحداثيات الأسطوانية عادة يسمى ϕ لأن الكل يستخدم θ
لزاوية مختلفة في الإحداثيات الكروية . والزاوية ϕ مشتركة بين كل من الإحداثيات الأسطوانية ، والكروية .

الحصول أيضا على نظام إحداثيات ثلاثي الأبعاد ، وهو الإحداثيات الأسطوانية الدائرية ، بتحديد المسافة z للنقطة من مستوى اختياري $z = 0$ كمستوى إسناد عمودي على الخط $p = 0$ وللتبسيط فاننا عادة نشير للإحداثيات الأسطوانية الدائرية ببساطة كإحداثيات أسطوانية . وسوف لايسبب ذلك أى ارتباك فى قراءة هذا الكتاب ، ولكن من الانصاف أن نشير الى أن هناك نظما مثل الإحداثيات الأسطوانية الناقصية المقطع ، والإحداثيات الأسطوانية زائدية المقطع ، والإحداثيات الأسطوانية مكافئة المقطع وغيرها .

لم نعد نقيم ثلاثة محاور كما فى الإحداثيات الكرتيزية ، ولكن يجب بدلا من ذلك أن نعتبر أى نقطة كتقاطع ثلاثة أسطح متعامدة معاً . وهذه الأسطح هى أسطوانة دائرية



(جـ)

شكل ٦-١ - (أ) الأسطح الثلاثة المتعامدة فيما بينها فى نظام الإحداثيات الأسطوانية الدائرية . (ب) وحدات المتجهات الثلاثة فى نظام الإحداثيات الأسطوانية الدائرية . (جـ) وحدة الحجم التفاضلية فى نظام الإحداثيات الأسطوانية الدائرية ، dp ، $p d\phi$ و dz كلها عناصر أطوال .

(p = ثابت) ومستوى (ϕ = ثابت) ومستوى آخر (z = ثابت) . وهذا يناظر تعيين نقطة في نظام الإحداثيات الكرتيزية بتقاطع ثلاثة مستويات (x = ثابت ، y = ثابت و z = ثابت) .
الأسطح الثلاثة للأحداثيات الأسطوانية الدائرية مبنية في شكل ١ - ٦ . لاحظ أن ثلاثا من هذه الأسطح يمكن إمرارها بأى نقطة إلا إذا وقعت على المحور z حيث يكفى مستوى واحدا في هذه الحالة .

ويجب أيضا تعريف ثلاث وحدات لمتجهات ، ولكن لم نعد نوجهها في موازاة المحاور الإحداثية لأن مثل هذه المحاور توجد فقط في الأحداثيات الكرتيزية . وبدلا من ذلك نأخذ نظرة أوسع لوحدات المتجهات في الأحداثيات الكرتيزية وتحقق أنها موجودة في اتجاه زيادة قيم الأحداثيات ، وأنهم متعاملون على السطح الذى يكون فيه قيمة ذلك الاحداثى ثابتة ، أى أن وحدة المتجه e_r عمودى على المستوى x = ثابت ، ونتجه نحو القيم المتزايدة لـ x . وبطريقة مناظرة ، يمكننا أن نعرف الآن وحدات المتجهات في الأحداثيات الأسطوانية e_ρ ، e_ϕ و e_z .

وحدة المتجه e_ρ عند نقطة $P(\rho, \phi, z)$ تكون في اتجاه نصف القطر للخارج عمودية على السطح الأسطوانى $\rho = \rho$. وتقع في المستويات $\phi = \phi$ و $z = z$.
وحدة المتجه e_ϕ عمودية على المستوى $\phi = \phi$ ، وتشير في اتجاه تزايد ϕ ، وتقع في المستوى $z = z$ مماسة للسطح الأسطوانى $\rho = \rho$. ووحدة المتجه e_z مثل وحدة المتجه e_z في نظام الأحداثيات الكرتيزية . وبين شكل ١ - ٦ ب وحدات المتجهات الثلاثة في الأحداثيات الأسطوانية .

وحدات المتجهات في الأحداثيات الكرتيزية ليسوا دوال في الأحداثيات ولكن اثنين من وحدات المتجهات في الأحداثيات الأسطوانية ، e_ρ و e_ϕ ، تتغيران فعلا مع الاحداثى ϕ لأن اتجاهيهما يتغيران . ولذا يجب عند التكامل أو التفاضل بالنسبة لـ ϕ ألا نعامل e_ρ و e_ϕ ككوابت .

ومرة أخرى ، وحدات المتجهات متعامدة على بعضها البعض ، لأن كلا منها عمودى على أحد الأسطح الثلاثة المتعامدة فيما بينها ، ويمكننا أن نعرف نظام إحداثيات أسطوانى يمينى بأنه ذلك الذى فيه $e_\rho \times e_\phi = e_z$ ، أو (لأولئك الذين لديهم أصابع مرنة) إنه الذى فيه الإبهام والسبابة والأوسط يشيرون في اتجاه زيادة ρ ، ϕ و z بالترتيب .

ويمكن الحصول على عنصر حجم تفاضلى في الأحداثيات الأسطوانية بزيادة ϕ و ρ بزيادات تفاضلية $d\phi$ و $d\rho$. الأسطوانتان ذواتا نصفى القطرين ρ و $\rho + d\rho$

والمستويان نصف القطرين عند الزاويتين ϕ و $d\phi + \phi$ والمستويان الأفقيان عند « الارتفاعين » z و $z + dz$ تحصر الآن حجما صغيرا كما هو مبين بالشكل (١-٦ ج) له شكل أسفين ممتور . وعندما يصبح عنصر الحجم صغيرا جدا يقترب شكله من متوازي مستطيلات له جوانب أطوالها dp , $pd\phi$ و dz . ولاحظ أن dp و dz لهما أبعاد أطوال ، أما $d\phi$ فليست كذلك ، ولكن $pd\phi$ هو طول . والأسطح لها المساحات $dpdz$, $pdpd\phi$ و $pd\phi dz$ ويصبح الحجم هو $pdpd\phi dz$

وبسهولة ترتبط المتغيرات فى نظامى الاحداثيات الكرتيزية والأسطوانية معا .
ويالرجوع الى شكل ١-٧ نرى أن

$$x = \rho \cos \phi$$

$$(١٠) \quad y = \rho \sin \phi$$

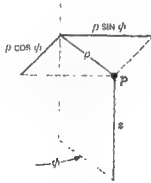
$$z = z$$

ومن وجهة النظر الأخرى يمكننا التعبير عن المتغيرات الأسطوانية بدلالة x و y و z

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\rho \geq 0)$$

$$(١١) \quad \phi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

$$z = z$$



شكل ١-٧ الملاقة بين المتغيرات الكرتيزية x , y , z ومتغيرات الاحداثيات الاسطوانية ρ , ϕ , z . ليس هناك تغير فى المتغير z بين النظامين

سنعتبر أن المتغير ρ موجب أو صفر ، ولذا استخدمنا الاشارة الموجبة فقط للجذر فى (١١) . والقيمة الصحيحة للزاوية ϕ تحدد بفحص اشارات x و y . فاذا كان $x = -3$ و $y = 4$ نجد أن النقطة تقع فى الربع الثانى ، ولذا فان $\rho = 5$ و $\phi = 126.9^\circ$. وبالنسبة الى $x = 3$ و $y = -4$ نجد $\phi = 53.1^\circ$ أو $\phi = 306.9^\circ$ ، أيهما مناسب أكثر .

باستخدام (١٠) أو (١١) تحول بسهولة الدوال المقياسية المعطاة فى نظام احداثيات الى النظام الآخر .

إلا أن الدالة الاتجاهية فى إحدى نظم الاحداثيات تتطلب خطوتين ، لكى نحولها إلى نظام إحداثى آخر ، لأن ذلك يتطلب عامة مجموعة مركبات متجهة مختلفة . أى أننا قد نعطي متجها كرتيزيا .

$$A = A_x a_x + A_y a_y + A_z a_z$$

حيث كل مركبة معطاة كدالة فى x , y و z ونحتاج متجها فى الاحداثيات الأسطوانية

$$A = A_\rho a_\rho + A_\phi a_\phi + A_z a_z$$

حيث كل مركبة معطاة كدالة فى ρ , ϕ و z .

ولكى نوجد أى مركبة مرغوبة لمتجه ، فتذكر من مناقشة حواصل الضرب المقياسى أن مركبة فى اتجاه معين يمكن الحصول عليها بضرب المتجه مقياسيا بوحدة المتجه فى الاتجاه المطلوب وعلى ذلك

$$A_\phi = A \cdot a_\phi \quad \text{و} \quad A_\rho = A \cdot a_\rho$$

وبفك حواصل الضرب هذه نحصل على

$$(١٢) \quad A_\rho = (A_x a_x + A_y a_y + A_z a_z) \cdot a_\rho = A_x a_x \cdot a_\rho + A_y a_y \cdot a_\rho$$

$$(١٣) \quad A_\phi = (A_x a_x + A_y a_y + A_z a_z) \cdot a_\phi = A_x a_x \cdot a_\phi + A_y a_y \cdot a_\phi$$

$$(١٤) \quad A_z = (A_x a_x + A_y a_y + A_z a_z) \cdot a_z = A_x a_x \cdot a_z = A_z$$

لأن $a_x \cdot a_\rho$ و $a_x \cdot a_\phi$ و $a_x \cdot a_z$ تساوى أصفارا .

ولكى نستكمل تحويل المركبات ، فمن الضرورى معرفة حواصل الضرب القياسية $a_x \cdot a_\rho$, $a_y \cdot a_\rho$, $a_x \cdot a_\phi$, $a_y \cdot a_\phi$ و $a_y \cdot a_z$. ويتطبيق تعريف الضرب المقياسى نجد ونحن بصدد وحدات متجهة أن النتيجة هى مجرد جيب تمام الزاوية بين وحدتى المتجهين المعنيين . وبالرجوع الى شكل (١-٧) نبين أن الزاوية بين a_x و a_ρ هى ϕ وعليه $a_x \cdot a_\rho = \cos \phi$ ، ولكن الزاوية بين a_y و a_ρ هى $90^\circ - \phi$ و $a_y \cdot a_\rho = \cos(90^\circ - \phi) = \sin \phi$ وحواصل الضرب المقياسية المتبقية بين الوحدات المتجهة يمكن إيجادها بطريقة مماثلة والنتائج مجدولة كدالة فى ϕ فى الجدول ١-٤ .

	a_x	a_y	a_z
$a_x \cdot$	$\cos \phi$	$-\sin \phi$	0
$a_y \cdot$	$\sin \phi$	$\cos \phi$	0
$a_z \cdot$	0	0	1

جدول ١-١ : ضرب المقياس لوحدة المتجهات في نظمتى الإحداثيات الأسطوانية والكرتزية

وعلى ذلك : فإن تحويل المتجهات من الإحداثيات الكرتزية إلى الأسطوانية أو العكس يُنجز باستخدام (١٠) أو (١١) لتغيير المتغيرات ، وباستخدام حاصل الضرب المقياسي لوحدة المتجهات المعطاة في جدول ١-١ لتغيير المركبات . ويمكن أخذ الخطوتين بأي ترتيب .

كمثال ، دعنا نحول المتجه $B = y a_x - x a_y + z a_z$ إلى الإحداثيات الأسطوانية . المركبات الجديدة هي

$$\begin{aligned} B_\rho &= B \cdot a_\rho = y(a_x \cdot a_\rho) - x(a_y \cdot a_\rho) \\ &= y \cos \phi - x \sin \phi = \rho \sin \phi \cos \phi - \rho \cos \phi \sin \phi = 0 \\ B_\phi &= B \cdot a_\phi = y(a_x \cdot a_\phi) - x(a_y \cdot a_\phi) \\ &= -y \sin \phi - x \cos \phi = -\rho \sin^2 \phi - \rho \cos^2 \phi = -\rho \\ B &= -\rho a_\phi + z a_z \end{aligned}$$

على ذلك

ت ١-٥ - إذا أعطيت $P(\rho=6, \phi=125^\circ, z=-3)$ و $Q(x=3, y=-1, z=4)$ أوجد المسافة من : (أ) P إلى نقطة الأصل ، (ب) Q عموديا على المحور z (ج) P إلى Q .

الإجابة : 6.71 ; 3.16 ; 11.20

ت ١-٦ (أ) عبر عن المجال الحراري $T = 240 + z^2 - 2xy$ في الإحداثيات الأسطوانية . (ب) أوجد الكثافة عند $P(-2, -5, 1)$ إذا كانت الكثافة هي : $e^{-x}(2 + \rho^3 \cos^2 \phi)$

الإجابة : $8.66 ; 240 + z^2 - \rho^2 \sin 2\phi$.

ت ١-٧ (أ) عبر عن المجال المتجه $W = (x-y)a_y$ في الإحداثيات الأسطوانية (ب) أعط المجال F في الإحداثيات الكرتزية إذا كان $F = \rho \cos \phi a_\rho$ (ج) أوجد الكثافة عند $P(-2, -5, 1)$ إذا كانت الكثافة هي : $(x/\sqrt{x^2+y^2})(x a_x + y a_y)$; $\rho(\cos \phi - \sin \phi)(\sin \phi a_\rho + \cos \phi a_\phi)$

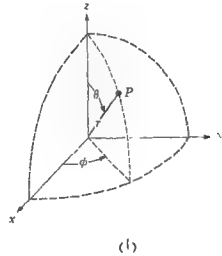
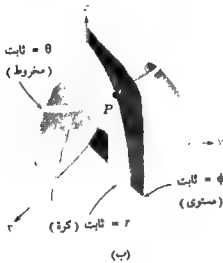
١ - ٩ نظام الاحداثيات الكروية :

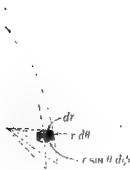
ليس لدينا نظام إحداثيات ذو بعدين لمساعدتنا على فهم نظام الاحداثيات الكروية الثلاثي الأبعاد ، كما هو لدينا في نظام الاحداثيات الاسطوانية الدائرية . وفي نواح معينة يمكننا الاستمانة بمعلوماتنا عن نظام خطوط العرض وخطوط الطول المستخدم في إيجاد مكان على سطح الأرض ، ولكننا عادة نعتبر فقط نقطة على السطح وليست تحت أو فوق الأرض .

دعنا نبدأ ببناء نظام إحداثيات كروي على المحاور الكرتيزية الثلاثة (شكل ١ - ٨) . نعرف أولا المسافة من نقطة الأصل إلى أى نقطة على أنها r السطح $r =$ ثابت هو كرة .

الاحداثى الثانى هو زاوية θ بين المحور z والخط المرسوم من نقطة الأصل الى النقطة المعنية . السطح $\theta =$ ثابت هو مخروط ، والسطحان ، المخروط والكرة ، متعامدان على طول خط تقاطعهما ، وهو دائرة نصف قطرها $r \sin \theta$. الاحداثى θ يناظر زاوية خط العرض إلا أن زاوية خط العرض مقاسة من خط الاستواء بينما θ مقاسة من « القطب الشمالى » .

الاحداثى الثالث ϕ هو زاوية أيضا وهو بالضبط نفس الزاوية ϕ فى الاحداثيات الاسطوانية ، وهى الزاوية بين المحور x والمسقط فى المستوى $z = 0$ للخط المرسوم من نقطة الأصل الى النقطة . وهى تناظر زاوية خط الطول ، ولكن الزاوية ϕ تزيد فى اتجاه « الشرق » . السطح $\phi =$ ثابت هو مستوى مار بالخط $\theta = 0$ (أو المحور z) .





(أ)



(ب)

شكل ١- ٨ (أ) الاحداثيات الكروية الثلاث . (ب) الأسطح الثلاثة المتعامدة مع بعضها في نظام الاحداثيات الكروية . (ج) وحدات المتجهات الثلاثة في الاحداثيات الكروية $\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\rho \times \mathbf{e}_\phi$. (د) عنصر الحجم التفاضلي في نظام الاحداثيات الكروية .

ويجب علينا ثانية أن نعتبر أى نقطة كتقاطع ثلاثة أسطح متعامدة مع بعضها : كرة ومخروط ومستوى ، وكل منها موجه بالكيفية المشروحة سابقا . والأسطح الثلاثة مبنية في شكل ١- ٨ ب .

وثانية يمكن تعريف ثلاث وحدات متجهة عند أى نقطة . كل وحدة متجه تكون متعامدة على أحد الأسطح المتعامدة مع بعضها وموجهة في الاتجاه الذى يزيد فيه الاحداثى . فوحدة المتجه \mathbf{e}_r تكون في اتجاه نصف القطر للخارج عمودية على الكرة $r = \text{ثابت}$ وتقع في المخروط $\theta = \text{ثابت}$ والمستوى $\phi = \text{ثابت}$ ووحدة المتجه \mathbf{e}_θ عمودية على السطح المخروطى ، وتقع في المستوى مماسة للكرة . وهى موجهة في اتجاه « خط طول » مشيرا « إلى الجنوب » . أما وحدة المتجه الثالث \mathbf{e}_ϕ فهى نفسها مثل الاحداثيات الاسطوانية ، وتكون عمودية على المستوى ومماسية لكل من المخروط والكرة . وهى موجهة إلى « الشرق » .

وحدات المتجهات الثلاث موضحة في شكل ١- ٨ جـ . وهى بطبيعة الحال متعامدة مع بعضها ، ويحدد نظام احداثيات يمينى بجعل $\mathbf{e}_\phi \times \mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_r$. يظهر فحص شكل ١- ٨ جـ ، بتطبيق تعريف الضرب الاتجاهى ، أن نظامنا يمينى . وتستخدم قاعدة اليد اليمنى في تطابق الابهام والسبابة والوسطى لاتجاهات زيادة r ، θ و ϕ على الترتيب (لاحظ أن التطابق في الاحداثيات الاسطوانية كان مع ρ ، ϕ و z ، وفي الاحداثيات الكرتيزية مع x ، y و z) .

ويمكن إنشاء عنصر حجم تفاضلى في الاحداثيات الكروية بزيادة r ، θ و ϕ بمقادير dr ، $d\theta$ و $d\phi$ كما هو مبين في شكل (١- ٨ د) . والمسافة بين

السطحين الكرويين ذوى نصفى القطرين r و $r + dr$ هى dr والمسافة بين المخروطين اللذين لهما الزاويتان الراسمتان θ و $\theta + d\theta$ هى $r d\theta$ ، والمسافة بين المستويين النصف قطريين عند الزاويتين ϕ و $\phi + d\phi$ يمكن اثبات أنها $r \sin \theta d\phi$ بعد فكر سريع لحساب المثلثات. والأسطح لها مساحات $r \sin \theta d\theta d\phi$ و $r \sin \theta d\theta d\phi$ والحجم هو $r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$

وتحويل المقاييسات من نظام الاحداثيات الكرتيزية الى الكروية يمكن إيجادها بسهولة باستخدام شكل ١ - أ لربط مجموعتى المتغيرات :

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi \\ (١٥) \quad y &= r \sin \theta \sin \phi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned}$$

بينما التحويل فى الاتجاه العكسى يُنجز بمساعدة

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (r \geq 0) \\ (١٦) \quad \theta &= \cos^{-1} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ) \\ \phi &= \tan^{-1} \frac{y}{x} \end{aligned}$$

المتغير النصف قطرى r غير سالب ، وتتحصر θ بين 0° و 180° متضمنة . ونقع الزوايا فى الأرباع الصحيحة بفحص إشارات x , y و z .

وتتطلب تحويل المتجهات تحديد حواصل ضرب وحدات المتجهات فى الاحداثيات الكرتيزية والكروية . وسننتج هذه الحواصل من شكل ١ - أ ج. ويقدر من حساب المثلثات . وحيث أن حاصل الضرب المقياسى لآى وحدة متجه كروى مع وحدة متجه كرتيزية هى مركبة المتجه الكروى فى اتجاه المتجه الكرتيزى فان حواصل الضرب مع a_z هى

$$\begin{aligned} a_x \cdot a_r &= \cos \theta \\ a_z \cdot a_\theta &= -\sin \theta \\ a_z \cdot a_\phi &= 0 \end{aligned}$$

وحواصل الضرب المقياسى المشتملة على a_x و a_y تتطلب أولاً : إسقاط وحدة المتجه الكروية على المستوى xy ، ثم الإسقاط على المحور المطلوب . فمثلا $a_r \cdot a_x$ يمكن الحصول عليه بإسقاط a_r على المستوى xy ، معطياً $\sin \theta$ ، ثم إسقاط $\sin \theta$ على المحور x والذى تعطى $\sin \theta \cos \phi$. وحواصل الضرب المقياسية الأخرى توجد بكيفية مماثلة وكلها معطاة فى جداول ١ - ٢ .

	a_r	a_θ	a_ϕ
$a_x \cdot$	$\sin \theta \cos \phi$	$\cos \theta \cos \phi$	$-\sin \phi$
$a_y \cdot$	$\sin \theta \sin \phi$	$\cos \theta \sin \phi$	$\cos \phi$
$a_z \cdot$	$\cos \theta$	$-\sin \theta$	0

جدول ٢-١. حواصل الضرب المقياسية لوحدة المتجهات في نظامي الإحداثيات الكروية والكرتيزية

ويمكن توضيح طريقة التحويل باعتبار المتجه $a_x = (xz/y)$. نوجد المركبات الكروية الثلاث بضرب G مقياسيا مع وحدة المتجه المناسب مع تغيير المتغيرات أثناء العملية :

$$G_r = G \cdot a_r = \frac{xz}{y} a_x \cdot a_r = \frac{xz}{y} \sin \theta \cos \phi$$

$$= r \sin \theta \cos \theta \frac{\cos^2 \phi}{\sin \phi}$$

$$G_\theta = G \cdot a_\theta = \frac{xz}{y} a_x \cdot a_\theta = \frac{xz}{y} \cos \theta \cos \phi$$

$$= r \cos^2 \theta \frac{\cos^2 \phi}{\sin \phi}$$

$$G_\phi = G \cdot a_\phi = \frac{xz}{y} a_x \cdot a_\phi = \frac{xz}{y} (-\sin \phi)$$

$$= -r \cos \theta \cos \phi$$

ويجمع هذه النتائج نحصل على

$$G = r \cos \theta \cos \phi (\sin \theta \cot \phi a_r + \cos \theta \cot \phi a_\theta - a_\phi)$$

ويصف الملحق (أ) نظم الإحداثيات المنحنية الخطوط العامة ومنها نظم الإحداثيات الكرتيزية والاسطوانية والدائرية والكروية كحالات خاصة . والقسم الأول من هذا الملحق يمكن الآن التمعن فيه جيدا .

١-٨- إذا أعطيت $Q(x=3, y=-1, P(r=6, \theta=110^\circ, \phi=125^\circ)$ و $z=4$ أوجد المسافة من (أ) Q إلى نقطة الأصل ، (ب) P إلى المستوى $y=0$ ، (ج) P إلى Q .

٣٣ - الكهرومغناطيسية

الإجابة : 5.10 ; 4.62 ; 10.35

ت ١ - ٩. (أ) عبر عن المجال الحراري $T = 240 + x^2 - 2xy$ في الإحداثيات الكروية. (ب) أوجد الكثافة عند $P(-2, -5, 1)$ إذا كانت الكثافة هي $re^{-r/2}(5 + \cos \theta + \sin \theta \cos \phi)$

$$1.706 ; 240 + r^2(\cos^2 \theta - \sin 2\phi \sin^2 \phi) ; 2.46$$

ت ١ - ١٠ - (أ) عبر عن المجال المنتهى $W = (x + y)a_y$ فى الاحداثيات الكروية .
(ب) اعط المجال F فى الاحداثيات الكرتيزية اذا كانت $F = r \cos \phi \, a_r$

الإجابة :

$$r \sin \theta (\cos \phi - \sin \phi) [\sin \phi (\sin \theta a_r + \cos \theta a_\theta) + \cos \phi a_\phi];$$

$$(x/\sqrt{x^2 + y^2})(x a_x + y a_y + z a_z)$$

مراجعہ مقترحة :

- 1 - Grossman, S.I. "Calculus" Academic Press, New York, 1977.
- يتناقش جبر المتجهات في أجزاء من الفصول الخامس عشر الى السابع عشر ، ونظم الاحداثيات الثلاث التي نستخدمها مشروحة في الفصل السابع عشر .
- 2 - Purcell, E.J. : "Calculus with Analytic Geometry", 3rd ed., Appleton-Century-Crofts, New York, 1978.
- يغطي الفصل السادس عشر من هذا المدخل لحساب التفاضل والتكامل جبر المتجهات المناقش في هذا الفصل . وبعض حساب التفاضل والتكامل للمتجهات موجود في الفصل الثامن عشر .
- 3 - Spiegel, M.R. : "Vector Analysis", Schaum Outline Series, McGraw-Hill Book Company, New York, 1959.
- عدد كبير من الأمثلة والمسائل مع أجوبتها مزود في هذا العضو المختصر والرخيص من سلسلة موجزة .
- 4 - Thomas, G.B., Jr., and R.L. Finney : "calculus and Analytic Geometry," 5th ed. Addison - Wesley Publishing Company, Reading, Mass., 1979.
- يتناقش جبر المتجهات ونظم الاحداثيات الثلاث التي نستخدمها في الفصل الحادي عشر . كما يناقش أيضا عمليات أخرى على المتجهات في الفصلين الثالث عشر والخامس عشر .

مسائل

١ - إذا أعطيت المتجهين $A = -6a_x + 2a_y - 4a_z$ و $B = 4a_x + 3a_y - 2a_z$ أوجد (أ) وحدة متجه في اتجاه $A + 2B$ (ب) مقدار $A + 2B$ (ج) المتجه C بحيث أن

$$A + B + C = 0$$

٢ - الرأس للثلاثة لثلث تقع عند :

(أ) أوجد طول محيط المثلث . $A(-1, 2, 5)$, $B(-4, -2, 3)$ و $C(1, 3, -2)$.

(ب) أوجد وحدة المتجه الموجب من منتصف الضلع AB الى منتصف الضلع BC .

(ج) أثبت أن وحدة المتجه هذه مضروبة بكمية مقياسية يساوى المتجه من A الى C

وبالتالى فإن وحدة المتجه هذه توازى الضلع AC .

٣ - المتجهان $A = 4a_x + 5a_y - 2a_z$ و $B = 2a_x + 8a_y + 3a_z$ ممثلان بقطع خطية

متجهة ممتدة خارجة من نقطة الأصل لنظام إحداثيات كرتيزى . (أ) ماهى المسافة

بين رأسى هذين المتجهين ؟ (ب) أوجد وحدة المتجه فى اتجاه A (ج) أوجد

المتجه C الموازى لـ A وله طول B

٤ - (أ) أوجد مركبات المتجه B إذا كان $|B| = 2$ و $a_B = 0.5a_x - 0.4a_y + na_z$ ، حيث

a_B وحدة المتجه فى اتجاه B و n كمية مقياسية أكبر من الصفر . (ب) إذا كان $C =$

$$C = 8a_x - 3a_y - c_2a_z$$
 حدد c_2 بحيث يكون $|C - a_x - a_y - a_z|$ أقل ما يمكن .

٥ - مجال السرعة لغاز معطى بالصورة $V = 5(xa_x + ya_y + za_z) / (x^2 + y^2 + z^2 + 2)$

أوجد عند النقطة $P(-2, 3, 1)$: (أ) مقدار السرعة . (ب) وحدة المتجه المحددة

لاتجاهها . (ج) عين معادلة السطح الذى عليه قيمة السرعة تساوى الوحدة .

٦ - مجال اتجاهاى معين معطى بـ

$$A = \frac{100(x-y+z)}{x^2+y^2+z^2}a_x - xyz a_y + 8(x+y-z)a_z$$

بالنسبة للمسافة $0 \leq x \leq 10$ على الخط $y = 1$ و $z = 2$. إرسم رسماً تخطيطياً

لتغير : (أ) A_x مع x ، (ب) $|A|$ مع x .

٧ - إذا كانت $G = (2x-y)a_x + (4y+z)a_y + (4x-2z)a_z$. (أ) عين وحدة المتجه

الذى يبين اتجاه G عند $P(1, 1, 1)$. (ب) أين يكون اتجاه G مثل اتجاه المتجه

$$9a_x + a_y + a_z$$

٨ - مجال مقياسى معطى بـ $T = 2xy - 5z$ (أ) أوجد المجال المتجه :

$$S = (\delta T / \delta x) a_x + (\delta T / \delta y) a_y + (\delta T / \delta z) a_z$$

$$P(1, 2, 3) \quad T \text{ (ب) } ; \quad S \text{ (ج) } ; \quad |S| \text{ (د) } ; \quad a_z \text{ (هـ)}$$

٩ - إذا أعطيت المجالات المتجهة $F = 2x^2a_x - 4yz^2a_y + 3(x + y - z)a_z$ و $G = (ya_x + za_y + xa_z) / (x^2 + y^2 + z^2)$ أوجد : (أ) $F(2, -1, 3)$ ؛ (ب) $a_F(-1, 2, -2)$ ؛ (ج) $F \cdot G$ عند $(2, -2, 4)$ ؛ (د) الزاوية بين F و G عند $(2, -2, 4)$.

١٠ - دع $C = 4a_x - 2a_y$ و $B = a_x + 3a_y - 4a_z$ ، $A = -2a_x + 3a_y + 5a_z$. (أ) أوجد مقدار $A + 3B$. (ب) عين وحدة متجه في اتجاه $B - C$. (ج) عين المركبة المتجهة لـ C في اتجاه B . (د) أوجد الزاوية بين A و C .

١١ - (أ) عين الزاوية بين $A_xa_x - 7a_y + 4a_z$ و $A_xa_x - 3a_y - 5a_z$ إذا كانت $A_x = 10$. كم يجب أن تكون قيمة A_x لكي تكون الزاوية : (ب) 90° ، (ج) 62.1° ؟

١٢ - إذا أعطيت المتجهين $B = -6a_x - 8a_y + 9a_z$ و $C = 5a_x - 3a_y + 4a_z$ ، أوجد : (أ) B_1 و B_2 حيث : $B = B_1 + B_2$ و B_1 يوازي C ومتعامدا على B_2 (ب) الزاوية بين B والمتجه من P الى Q .

١٣ - إذا أعطيت $A = 3a_x - 4a_y + 5a_z$ و $B = -a_x + 2a_y - 3a_z$ ، أوجد : (أ) $A \times B$ ؛ (ب) $(A \times B) \cdot A$ ؛ (ج) $A \times (A \times B)$ ؛ (د) الزاوية بين A و B باستخدام تعريف أى من حاصل الضرب المقياسى والاتجاهى .

١٤ - دع $A = -2a_x + 3a_y + 5a_z$ و $B = a_x + 3a_y - 4a_z$ و $C = 4a_x - 2a_y$ ، أوجد (أ) $A \times B$ ؛ (ب) $C \cdot (A \times B)$ ؛ (ج) $A \cdot (B \times C)$ ؛ (د) وحدة المتجه العمودية على كل من B و C .

١٥ - النقط الثلاث $A(-1, 6, 2)$ و $B(2, 4, -3)$ و $C(4, 1, -5)$ تعرف مثلثا ومستويا . وبمعرفه أن المثلث هو نصف متوازي اضلاع ، أوجد : (أ) مساحة المثلث ؛ (ب) وحدة متجه عمودية على المستوى .

١٦ - دع متجهات تمتد من نقطة الأصل الى $A(4, 7, -5)$ و $B(2, -3, 6)$ وهذه المتجهات تحدد ضلعين لمتوازي اضلاع . (أ) عين إحداثيات النقطة C الركن الرابع . (ب) عين مساحة متوازي الاضلاع (ج) أوجد الزوايا الداخلية الأربع .

١٧ - عُبر عن متجه A عند نقطة $C(2, 30^\circ, 5)$ فى الاحداثيات الاسطوانية بالصورة $20a_\rho - 30a_\phi + 10a_z$. (أ) أوجد $|A|$ عند C . (ب) أحسب المسافة من نقطة الأصل الى C . (ج) أحسب الزاوية بين A عند C والسطح $\rho = 2$.

١٨ - متجهان معرفان عند نقطة معينة فى الاحداثيات الاسطوانية بالصورة :

$$M = 5a_\rho - 8a_\phi + 3a_z \quad \text{و} \quad N = -4a_\rho + 2a_\phi + 10a_z$$

(أ) $M \cdot N$. (ب) المركبة المقياسية لـ M فى اتجاه B (ج) المركبة لـ M فى اتجاه N (د) $M \times N$

(هـ) وحدة متجه عمودية على كل من M و N .

١٩ - مجال متجه قوة معطى بـ $F = 15a_p + 12a_\phi - 20a_z$ عند $P(8, 120, 5)$. أوجد المركبة المتجهة لـ F التى : (أ) تتعامد على الاسطوانة $\rho = 8$ (ب) تمس الاسطوانة $\rho = 8$ ؛ (ج) تمس المستوى $\phi = 120^\circ$. (د) أوجد وحدة المتجه العمودية على F وتمس الاسطوانة $\rho = 8$.

٢٠ - أسطح حجم مامحلدة بـ $\rho = 5$ ، $\rho = 12$ و $\phi = 0.1\pi$ ، $\phi = 0.4\pi$ ، $z = -1$ ، $z = 3$. (أ) أوجد طول الخط المستقيم الموصل قطرياً ركنين متقابلين للحجم .

(ب) أوجد مساحة كل من الأوجه الستة . (ج) أوجد الحجم المحصور .

٢١ - مجال كهبرى معطى بـ $E = (50/\rho)a_\rho - 4a_z$. (أ) أوجد وحدة المتجهة فى . مركبات كرتيزية عند $P(10, 20, 2)$. (ب) أعطى معادلة السطح الذى عليه $|E| = 10$.

٢٢ - مجال متجه معطى بـ $G = 10z \cos \phi a_\rho - 5_\rho \sin \phi a_\phi + 4za_z$. (أ) أوجد $|G(2, 30^\circ, 1.5)|$ (ب) أوجد TG و NG بمركبات اسطوانية إذا كان : $G = G_N + G_T$ يوازى a_x وعمودى على G_N عند $(2, 30^\circ, 1.5)$.

٢٣ - نقطتان معرفتان فى الاحداثيات المتعامدة بـ $P(8, 2, 1)$ و $Q(-2, 7, 4)$ (أ) أعط الاحداثيات الاسطوانية لكل من النقطتين . (ب) حدد المتجه الذى يمتد من P الى Q بمركبات اسطوانية عند P . (ج) حدد المتجه الذى يمتد من Q الى P بمركبات اسطوانية عند Q . لاحظ أن النتيجة الأخيرة ليست السالبة للنتيجة السابقة وذلك لأن a_ρ و a_ϕ لهما اتجاهات مختلفة عند النقطتين .

٢٤ - عبر عن متجه C عند النقطة $(r = 2, \theta = 30^\circ, \phi = 160^\circ)$ فى الاحداثيات الكروية بالصورة $C = 20a_r - 30a_\theta + 10a_\phi$. (أ) أوجد $|C|$ عند K . (ب) أحسب المسافة من نقطة الأصل الى K . (ج) احسب الزاوية بين C عند K والمخروط $\theta = 30^\circ$.

٢٥ - عرف متجهين عند نقطة P بالصورة $F = 10a_r - 3a_\theta + 5a_\phi$ و $G = 2a_r + 5a_\theta + 3a_\phi$. (أ) $F \cdot G$ (ب) المركبة المقياسية لـ G فى اتجاه F عند P ، (ج) المركبة المتجهة لـ G فى اتجاه F عند P ؛ (د) $G \times F$ ؛ (هـ) وحدة متجه عمودية على كل من F و G عند P .

٢٦ - يوجد عند النقطة $B(r = 5, \theta = 120^\circ, \phi = 75^\circ)$ مجال متجه قيمته : $A = -12a_r - 5a_\theta + 15a_\phi$. أوجد المركبة المتجهة لـ A والى تكون : (أ) عمودية على السطح $r = 5$ ؛ (ب) مماسة للسطح $r = 5$ ؛ (ج) مماسة للمخروط $\theta = 120^\circ$ ؛ (د) أوجد وحدة المتجه التى تتعامد على A وتمس المخروط $\theta = 120^\circ$.

٢٧ - أسطح حجم معرفه بـ $r = 5$ و $r = 12$ ، $\theta = 20^\circ$ و $\theta = 80^\circ$ و $\phi = 0.1\pi$ و $\phi = 0.4\pi$. (أ) أوجد طول الخط المستقيم الذى يصل قطرياً ركتين متقابلين لل حجم . (ب) أوجد مساحة كل سطح من الأوجه الستة . (ج) أوجد الحجم المحصور .

٢٨ - مجال متعلى فى الاحداثيات الكروية بالصورة :
 a_z, a_y, a_x, z, y, x بدلالة F عبر عن $F = [\cos \theta / r^2] a_r + [\sin \theta / r] a_\theta$.
 (ب) أوجد قيمة F عند $(1, 2, 3)$.

٢٩ - إذا أعطيت النقطتين $P(4, 7, 3)$ و $Q(-3, 6, -5)$: (أ) عين موضع P فى الاحداثيات الاسطوانية ، (ب) عين موضع P فى الاحداثيات الكروية ؛ (ج) عبر عن المتجه R_{PQ} بمركبات اسطوانية عند P .

٣٠ - حول المجال المتجه $A = x a_r$ إلى : (أ) الاحداثيات الاسطوانية ثم (ب) أوجد قيمته عند $P(2, -5, 3)$. (ج) حول A الى الاحداثيات الكروية ، ثم (د) أوجد قيمته عند P

٣١ - عبر عن المجال المتجه $W = (x^2 - y^2) a_y + xz a_z$ فى : (أ) الاحداثيات الاسطوانية عند $P(\rho = 6, \phi = 60^\circ, z = -4)$ ، (ب) الاحداثيات الكروية عند $Q(r = 4, \theta = 30^\circ, \phi = 120^\circ)$.

الفصل الثانى

قانون كولوم وشدة المجال الكهربى

والآن وقد صفنا لغة جديدة فى الفصل الأول ، سوف نرسم قليلا من المبادئ الأساسية فى الكهرباء ، ونحاول أن نصفها بدلالة هذه اللغة . فلو كنا قد استخدمنا حساب التفاضل والتكامل للمتجهات لعدة سنين ، ولدينا القليل من الأفكار الصحيحة عن الكهربائية والمغناطيسية لاستطعنا التعمق وتقديم عديد من المعادلات متضمنة معادلات ماكسويل ، وقليلا من المعادلات المساعدة الأخرى ، ونمضى لنصفها فيزيائيا بفضل معلوماتنا عن تحليل المتجهات . وربما يكون هذا هو الطريق المثالى ، البدء بأكثر النتائج عمومية ، ثم نبين أن قوانين أوم وجاوس وكولوم وفاراداي وأمبير وبايوسافار وكيرشوف ، وقليل من القوانين الأخرى أقل تداولاً هي جميعها حالات خاصة لهذه المعادلات . وإنه لمن المرغى فلسفياً أن يكون لدينا النتيجة الأكثر عمومية ، وأن نشعر أننا نستطيع الحصول على نتائج أى حالة خاصة نشاء . على أن مثل هذه القفزة قد تؤدى الى صيحات استغاثة كثيرة للمساعدة ، وليس بقليل من الطلبة الغارقين .

ويدلنا من ذلك فسندقم على فترات مناسبة القوانين التجريبية المذكورة آنفاً ، معبرين عن كل باستخدام التدوين الاتجاهى ، ونستخدم هذه القوانين لحل عدد من المسائل البسيطة . وبهذه الطريقة فإن اعتيادنا على كل من تحليل المتجهات ، والمجالات الكهربائية والمغناطيسية سوف يزداد تدريجياً ، ومع الوقت نصل أخيراً الى عدة معادلات عامة ، سوف تحتاج لقليل من الشرح الإضافى .

وعندئذ يكون كل مجال النظرية الكهرومغناطيسية مفتوحاً لنا ، ويمكننا أن نستخدم معادلات ماكسويل لشرح انتشار الموجات ، الاشعاع من الهوائيات ، الظاهرة السطحية أدلة الموجات وخطوط النقل ، وأنابيب الموجة المتنقلة وحتى للحصول على عمق نظر جديد لمحاولات القوى العادية .

وفى هذا الفصل سنقصر إهتمامنا على المجالات الكهربائية الاستاتيكية فى الفراغ أو الفضاء الحر . وهذه المجالات ، على سبيل المثال ، توجد فى نظم التركيز والانحراف فى أنابيب شعاع- الكاثود الكهروستاتيكية . ولجميع الأغراض العملية ، ستطبق نتائجنا أيضاً فى الهواء والغازات الأخرى . وستدخل مواد أخرى فى الفصل الخامس بينما ستدخل المجالات المتغيرة مع الزمن فى الفصل العاشر .

وسنبداً بوصف تجربة كمية أجريت فى القرن السابع عشر .

٢-١ - قانون كولوم التجريبي :

تبين السجلات من سنة ٦٠٠ ق . م . على الأقل أن هناك شواهد على معرفة الكهروستاتيكية . وكان الاغريق هم المسئولون عن تسمية « الكهرباء » المشتقة من تسميتهم للكهرمان ، وكانوا يقضون كثيرا من وقت فراغهم يدلكون جزءا صغيرا منه على أكمامهم ومراقبة كيف أنها بعد ذلك تلتقط قطعاً من الوبر والنسيج . ولكن كان أغلب اهتمامهم في الفلسفة والمنطق ، وليس في العلم التجريبي ، ومضت عدة قرون قبل أن يعتبر تأثير الجذب شيئا آخر غير السحر أو قوة حيلة .

ولقد كان الدكتور جلبرت ، طبيب صاحبة الجلالة ملكة انجلترا ، أول من قام بتجربة حقيقية لهذا التأثير وفي عام ١٦٠٠ أوضح أن الزجاج والكبريت والكهرمان ومواد أخرى ذكرها يمكنها « ليس فقط أن تجذب اليها القش والتبن ، بل كل المعادن والخشب وورق الشجر والحجر والأرضيات وحتى الماء والزيت » .

وبعد ذلك بقليل أجرى الكولونيل شارلس كولوم من مهندسي الجيش الفرنسي - وهو ضابط دقيق منظم الفكر - سلسلة تجارب مستفيضة مستخدما ميزان التواء حساس اخترعه بنفسه ، ليحدد كمية القوة المبذولة بين جسمين لكل منهما شحنة كهربية ساكنة . ونتائج المنشورة معروفة الآن لكثير من طلبة المدارس الثانوية وتحمل تماثلا كبيرا مع قانون نيوتن للجاذبية (والذي اكتشف قبله بمائه عام) . وذكر كولوم أن القوة بين جسمين صغيرين جدا ، يفصلهما في الفراغ أو الفضاء الحر مسافة كبيرة بالنسبة لمقاييسها ، تتناسب مع الشحنة على كل منهما وتتناسب عكسيا مع مربع المسافة بينهما ، أو

$$F = k \frac{Q_1 Q_2}{R^2}$$

حيث Q_1 و Q_2 الكميات الموجبة أو السالبة للشحنة و R هي المسافة بينهما و K ثابت تناسب . إذا استعملنا نظام الوحدات الدولي ^(١) (SI) ، فإن Q تقاس بالكولوم (C) coulombs ، و R بالمتر (meters) ، والقوة يجب أن تكون بالنيوتون (N) newtons وستحقق ذلك إذا كتب ثابت التناسب K بالصورة

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

العامل 4π سيظهر في مقام قانون كولوم ولكن لن يظهر في المعادلات الأكثر فائدة (متضمنة معادلات ماكسويل) والتي سنحصل عليها بمساعدة قانون كولوم . والثابت

(١) نظام الوحدات الدولي (نظام م ك ث mks) مشروح في الملحق (ب) . واختصارات الوحدات معطلة في الجدول (ب-١) . التحولات إلى نظم الوحدات الأخرى معطلة في الجدول (ب-٢) ، بينما البادئات التي تسمى قوى العشرة في SI تظهر في الجدول (ب-٣) .

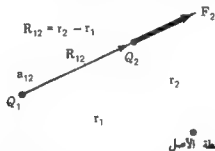
الجديد ϵ_0 يسمى **سمحية الفضاء الحر** ولها المقدار ، مقاس بالفاراد لكل متر
farads per meter (F/m)

$$(١) \quad \epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \pm \frac{1}{36\pi} 10^{-9} \quad \text{F/m}$$

الكمية ϵ_0 ليست عديمة الأبعاد حيث أن قانون كولوم يظهر أن لها الوصف $C^2 / N.m^2$. وسوف نعرف فيما بعد الفاراد ونظهر أن له الأبعاد $C^2 / N \cdot m$ ولقد سبقتنا هذا التعريف باستخدام الوحدة F/m في (١) آنفا .
ويكون قانون كولوم الآن

$$(٢) \quad F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

وليس كل وحدات SI معروفة مثل الوحدات الانجليزية التي نستخدمها يوميا ، ولكنها أصبحت الآن معايير في الهندسة الكهربائية والفيزياء . والنيتون وحدة قوة تساوي $0.22481b$ ، وهي القوة المطلوبة لاعطاء كتلة مقدارها واحد كيلو جرام (kg) عجلة قدرها متر واحد لكل ثانية لكل ثانية m/s^2 . والكولوم وحدة كبيرة جدا للشحنة ، لأن أصغر كمية شحنة معروفة وهي للإلكترون (سالب) أو البروتون (موجب) قدرها : 1.60219×10^{-19} معطاة بوحدة mks ، وعلى ذلك فإن شحنة سالبة مقدارها كولوم تمثل ما يقرب من 6×10^{18} الكترونا^(١) . ويبين قانون كولوم أن القوة بين شحنتين كلا منهما مقدارها كولوم واحد يفصلهما متر هي $9 \times 10^9 N$ ، أو مليون طن تقريبا .



شكل ١-٢ إذا كان Q_1 و Q_2 لهما نفس الإشارة فإن متجه القوة F_2 على Q_2 يكون في نفس اتجاه المتجه R_{12}

وللإلكترون كتلة عند السكون مقدارها $9.10956 \times 10^{-31} kg$ ونصف قطري رتبة مقدار $3.8 \times 10^{-15} m$. ولا يعني هذا أن الإلكترون كروي الشكل ، ولكن لمجرد استخدامه

(١) شحنة وكتلة الإلكترون وغيرها من الثوابت الفيزيائية مسجلة في الجدول (جـ- ٤) بالملاحق (جـ)

لوصف حجم المنطقة التي فيها أكبر احتمال لوجود الكترون يتحرك ببطء . وكل الجسيمات المشحونة الأخرى متضمنة البروتون ، لها كتل أكبر وأنصاف أقطار أكبر وتشغل حجما احتماليا أكبر من الالكترون .

ولكى نكتب الصيغة المتجهة لمعادلة (٧) ، نحتاج الحقيقة الإضافية (المقدمة أيضا بالكولونيل كولوم) أن القوة تعمل على الخط الذي يصل الشحنتين وتكون طاردة إذا كانت الشحنتان متماثلتي الإشارة وجاذبة إذا كانتا متضادتي الإشارة . دع المتجه r_1 يعين موضع Q_1 بينما r_2 يعين موضع Q_2 . فلذلك المتجه $R_{12} = r_2 - r_1$ يمثل الجزء الخطي الموجه من Q_1 الى Q_2 ، كما هو مبين في شكل ٧ - ١ . والمتجه F_2 هو القوة على Q_2 وهي مينة في حالة أن Q_2 و Q_1 لهما نفس الإشارة . والصيغة الاتجاهية لقانون كولوم هي

$$(٧) \quad F_2 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{12}^2} \mathbf{a}_{12}$$

حيث \mathbf{a}_{12} = وحدة متجه في اتجاه r_{12} ، أو

$$(٨) \quad \mathbf{a}_{12} = \frac{\mathbf{R}_{12}}{|\mathbf{R}_{12}|} = \frac{\mathbf{R}_{12}}{R_{12}} = \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}$$

وكمثال لاستخدام الصيغة الاتجاهية لقانون كولوم ، اعتبر شحنة مقدارها $3 \times 10^{-4} \text{ C}$ عند $p(1, 2, 3)$ وشحنة مقدارها -10^{-4} C عند $Q(2, 0, 5)$ في فراغ فلذا

$$Q_1 = 3 \times 10^{-4} \quad Q_2 = -10^{-4}$$

$$\mathbf{R}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = (2 - 1)\mathbf{a}_x + (0 - 2)\mathbf{a}_y + (5 - 3)\mathbf{a}_z = \mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{a}_{12} = \frac{\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z}{3}$$

$$\begin{aligned} F_2 &= \frac{3 \times 10^{-4}(-10^{-4})}{4\pi(1/36\pi)10^{-9} \times 9} \left(\frac{\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z}{3} \right) \\ &= -30 \left(\frac{\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z}{3} \right) \text{ N} \end{aligned}$$

مقدار القوة هو 30 N (أو حوالي 7 lbf) ، ويعين الاتجاه بوحدة المتجه ، والذي تُترك بين الأقواس ليظهر مقدار القوة . والقوة على Q_2 يمكن أيضا اعتبارها كتلات مركبات قوى ،

$$F_2 = -10a_x + 20a_y - 20a_z$$

والقوة التي يُعبر عنها بقانون كولوم هي قوة متبادلة ، حيث أن كلا الشحنتين تؤثر عليها قوة لها نفس المقدار ، ولكن في اتجاه متضاد . وكان يمكننا بالمثل كتابة

$$(٥) \quad F_1 = -F_2 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{12}^2} a_{21} = -\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{12}^2} a_{12}$$

وقانون كولوم خطي ، لأننا إذا ضربنا Q_1 بعامل n فإن القوة على Q_2 ستضرب أيضا في نفس العامل n . وصحيح أيضا أن القوة على شحنة في وجود عدة شحنات أخرى هي مجموع القوى على تلك الشحنة نتيجة كل من الشحنات الأخرى إذا أثرت بمفردها .

مث ٢ - ١ - شحنة نقطية $Q_1 = 2 \text{ mC}$ واقعة في فضاء حر عند $P_1 (-3, 7, -4)$ بينما $Q_2 = -5 \text{ mC}$ عند $P_2 (2, 4, -1)$. أوجد متجه القوة على : (أ) Q_2 ، (ب) Q_1 .

الاجابة :

$$1.594a_x + 0.956a_y - 0.956a_z \text{ KN} ; + 1.594a_x - 0.956a_y + 0.956a_z \text{ KN}$$

٢ - ٢ - شدة المجال الكهربى :

إذا اعتبرنا الآن شحنة واحدة ثابتة المكان ، ولتكن Q_1 ، وحركنا شحنة ثانية بهبط حولها ، نلاحظ أنه يوجد هناك قوة في كل مكان على هذه الشحنة الثانية ، وتعبير آخر : فإن هذه الشحنة الثانية تظهر وجود مجال قوة . وتسمية هذه الشحنة الثانية شحنة اختبار ، Q_2 ، فإن القوة عليها تعطى بقانون كولوم

$$F_i = \frac{Q_i Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{1i}^2} a_{1i}$$

ويكتابة هذه القوة كقوة لكل وحدة شحنات ، (٦)

$$(٦) \quad \frac{F_i}{Q_i} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{1i}^2} a_{1i}$$

الكمية في الطرف الأيمن للمعادلة (٦) دالة في Q_I وجزء الخط الموجب من Q_I الى مكان شحنة الاختيار فقط . وهذه نصف مجالاً متجهاً يسمى شدة المجال الكهربى .

ونعرف شدة المجال الكهربى بأنها : « متجه القوة على وحدة موجبة لشحنة اختبار » . ومع ذلك فالتنا سوف لانقيسها عملياً بايجاد القوة على شحنة اختبار مقدارها $1C$ ، لان ذلك من المحتمل أن يجعل القوة على Q_I تغير وضع تلك الشحنة .

ويجب أن تقاس شدة المجال الكهربى بوحدات النيوتن لكل كولوم ، أى القوة لوحدة الشحنات . ومرة أخرى نبادر بكمية جديدة ذات أبعاد ، الفولت (V) ، الذى سيقدم فى الفصل الرابع وله صفة الجول لكل كولوم (J/C) أو نيوتن - متر لكل كولوم (N.m/C) ، فالتنا نقيس مباشرة شدة المجال الكهربى فى الوحدات العملية بالفولت لكل متر (V/m) . وباستخدام الحرف الكبير E لشدة المجال الكهربى نحصل أخيراً على

$$(V) \quad E = \frac{F_I}{Q_I}$$

$$(A) \quad E = \frac{Q_I}{4\pi\epsilon_0 R_{II}^2 a_{II}}$$

المعادلة (٧) هى التعبير المعروف لشدة المجال الكهربى و(٨) هى التعبير عن شدة المجال الكهربى نتيجة شحنة نقطية واحدة Q_I فى فراغ . وفى الأقسام التالية سنحصل على تعبيرات لشدة المجال الكهربى ونفسرها نتيجة لتنظيمات من الشحنة أكثر تعقيداً ، ولكن دعنا الآن نرى ما هى المعلومات التى يمكن الحصول عليها من (٨) ، أى من مجال شحنة نقطية واحدة .

أولاً - دعنا نتخلص من أكثر الرموز السفلية فى (٨) مع الاحتفاظ بحقناً فى استخدامها فى أى وقت فيه احتمال لسوء الفهم :

$$(٩) \quad E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2 a_R}$$

ويجب أن نتذكر أن R هى مقدار المتجه R ، وهو جزء الخط الموجب من النقطة التى عندها Q الى النقطة المطلوب عندها E ، و a_R هى وحدة المتجه فى اتجاه R ^(١) .

(١) نريد بالتأكيد تجنب غلط R و a_R فإن الاثنين الأولين يرمزان بالذات لنظام الإحداثيات الكروية ، بينما R و a_R لا يسببا أى نظام إحداثى - الاختيار مازال متضح لنا .

دعنا نختار مكان Q_I عند مركز نظام إحداثيات كروي . حيثل تصبغ وحدة المتجه a_R هي وحدة المتجه النصف قطرى a_r و R هي r . ومن ثم

$$(10) \quad E = \frac{Q_I}{4\pi\epsilon_0 r^2} a_r$$

أو

$$E_r = \frac{Q_I}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

والمجال له مركبة واحدة نصف قطرية ، وعلاقة قانونها التريعى العكسى واضحة تماما .

وفى الاحداثيات الكرتيزية يجب أن نكتب :

$$a_R = a_r = (x a_x + y a_y + z a_z) / \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

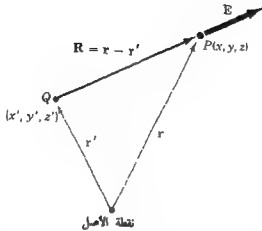
ولذا ، $R = r = x a_x + y a_y + z a_z$

$$(11) \quad E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(x^2 + y^2 + z^2)} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} a_x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} a_y + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} a_z \right)$$

لم يعد هذا التعبير يظهر مباشرة الطبيعة البسيطة للمجال ، وتعقيده هو الثمن الذى ندفعه لحل مسألة لها التماثل الكروى فى نظام إحداثيات قد يكون لنا اعتياد أكثر عليه (مؤقتا) .

ويدون استخدام تحليل المتجهات يجب التعبير عن المعلومات الموجودة فى (11) بثلاث معادلات : واحدة لكل مركبة ، ولكن نحصل على المعادلات يجب تقسيم مقدار شدة المجال الكهربى الى المركبات الثلاث بايجاد المسقط على كل محور إحداثيات . ولكن باستخدام التدوين الاتجاهى ، يتم ذلك تلقائيا عندما نكتب وحدة المتجه .

وإذا اعتبرنا شحنة ليست عند نقطة الأصل فى نظامنا الاحداثى ، فان المجال لم يعد له صيغة التماثل الكروى (ولا التماثل الاسطوانى ، إلا إذا وقعت الشحنة على المحور z) وعندئذ سيان أن نستخدم الاحداثيات الكرتيزية .



شكل ٢-٢. المتجه r' بين موقع الشحنة النقطية Q والمتجه r بين نقطة عامة في الفراغ $P(x, y, z)$ ، والمتجه R من Q إلى $P(x, y, z)$ هو لذلك $R = r - r'$.

ولشحنة Q موضوعة عند نقطة المنبع $r' = x'a_x + y'a_y + z'a_z$ ، كما هو مبين في شكل ٢-٢ ، نوجد المجال عند نقطة مجال عامة $r = xa_x + ya_y + za_z$ بالتعبير عن $r = r' + R$ ، ولذا

$$(١٢) \quad E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r - r'}{|r - r'|^3} = \frac{Q(r - r')}{4\pi\epsilon_0 |r - r'|^3}$$

$$= \frac{Q[(x - x')a_x + (y - y')a_y + (z - z')a_z]}{4\pi\epsilon_0 [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}}$$

وقد سبق أن عرفنا مجال متجه كدالة متجهة في متجه الموضع وهذا يؤكد عليه بجعل E يرمز لها بالتعبير التالي $E(r)$

المعادلة (١١) مجرد حالة خاصة لـ (١٢) حيث $x' = y' = z' = 0$

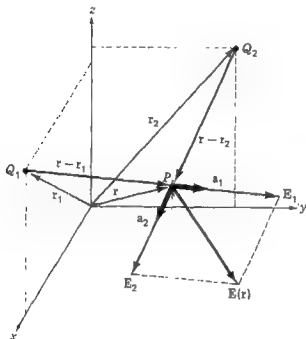
ت-٢. أوجد شدة المجال الكهربى عند $P(-4, 6, -5)$ في فضاء حر الناتج من شحنة 0.1 mC عند : (أ) نقطة الأصل ، (ب) $(2, -1, -3)$.

الاجابة : $-6.42a_x + 7.49a_y - 2.14a_z - 5.32a_x + 7.98a_y - 6.65a_z \text{ KV/m}$

٢-٣. مجال n من الشحنات النقطية :

حيث أن القوى الكولومية خطية ، فإن شدة المجال الكهربى نتيجة شحنتين نقطيتين Q_1 عند r_1 و Q_2 عند r_2 ، هى مجموع القوى عل Q بسبب Q_1 و Q_2 عندما يعمل كل منهما على حدة ، أو

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^2} \mathbf{a}_1 + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^2} \mathbf{a}_2$$



شكل ٣-٢ - يمكن الجمع الاتجاهي لحدة المجال الكهربائي الكلي عند P الناتج عن Q_1 و Q_2 نتيجة قاعدة قانون كولوم .

حيث أن \mathbf{a}_1 و \mathbf{a}_2 هما وحدتا المتجهين في اتجاه $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)$ و $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)$ بالترتيب . المتجهات \mathbf{r} ، \mathbf{r}_1 ، \mathbf{r}_2 ، $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1$ ، \mathbf{r}_2 ، و \mathbf{a}_2 مبنية في شكل ٣-٢ .

وإذا أضفنا شحنات أكثر عند مواضع أخرى ، فإن المجال الناتج عن n من الشحنات النقطية يكون

$$(١٣) \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^2} \mathbf{a}_1 + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^2} \mathbf{a}_2 + \dots + \frac{Q_n}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|^2} \mathbf{a}_n$$

وهذا التعبير يشغل حيزاً أقل عندما نستخدم علامة التجميع Σ والعدد الصحيح الجمعي m الذي يأخذ كل القيم الصحيحة بين 1 و n .

$$(١٤) \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{m=1}^n \frac{Q_m}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_m|^2} \mathbf{a}_m$$

وعند فكها ، تكون (١٤) متطابقة مع (١٣) ، وعلى الطلبة غير المعتادين على علامة التجميع أن يحققوا تلك النتيجة .

ت ٢ - ٣ - شحنة نقطية $Q_1 = 2 \mu\text{C}$ موضوعة عند $(-3, 7, -4)$ في فضاء حر ،
بينما $Q_2 = -5 \mu\text{C}$ عند $P_2(2, 4, -1)$. أوجد عند النقطة $(12, 15, 18)$.
(أ) E ، (ب) E ، (ج) a_E

الاجابة :

$$-0.356a_x - 0.521a_y - 0.776a_z ; 54.7V/m ; -19.5a_x - 28.5a_y - 42.4a_z V/m$$

ت ٢ - ٤ - أوجد قيم المجاميع : أ $\sum_{n=0}^5 \frac{1}{n^2+1}$ ب $\sum_{m=1}^6 \frac{(-1)^{m+1}}{m\sqrt{m+1}}$ (أ)

الاجابة : 0.492 , 0.931

٢ - ٤ - المجال نتيجة توزيع حجمى متصل للشحنات :

إذا تصورنا الآن منطقة من الفراغ مملوءة بعدد هائل من الشحنات المنفصلة عن بعضها بمسافات صغيرة جدا ، مثل الفراغ بين شبكة التحكم والكاثود في مجمعة مدفعة الكترونيات في أنبوبة أشعة الكاثود العاملة بواسطة شحنة الحيز ، فاننا نرى ، أننا نستطيع إحلال هذا التوزيع لجسيمات صغيرة جدا بتوزيع متصل أملس يوصف بكثافة شحنة حجمية مثلاً نصف الماء بأن كثافته $1g/cm^3$ (جرام لكل سنتيمتر مكعب) مع أنه يتكون من جسيمات ذرية وجزيئية الحجم . ونستطيع أن نعمل هذا فقط اذا كنا لانهتم بعدم الانظام البسيط (أو موجات) في المجال عندما تتحرك من الكترون لآخر أو عندما نهتم قليلا بأن كتلة الماء تزيد بالفعل بخطوات صغيرة ولكن محدودة كلما أضيف جزء جديد .

وفي الحقيقة ليس هناك حد على الإطلاق لأن نتائجنا النهائية كمهندسى كهرباء تكون تقريبا دائما بدلالة تيار في هوائى استقبال ، جهد في دائرة الكترونية أو شحنة على مكثف ، أو عامة بدلالة ظاهرة ماكروسكوبية ذات أبعاد واسعة . ونادرا ما يجب أن نعرف تيارا الكترون فالكترون^(١) .

ونرمز لكثافة الشحنة الحجمية بـ ρ وهو نفس الرمز المستعمل للمتغير النصف قطرى في الاحداثيات الأسطوانية . ولكن تقرير أى ρ نعى ، يجب أن يكون عملا بسيطا يؤدى بدقة متناهية . وإذا بدا في أى وقت أن هناك ارتباكاً وشكاً فسنرمز لكثافة الشحنة بـ ρ_v .

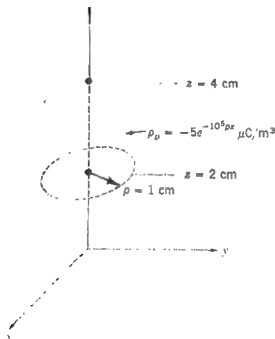
وتقاس كثافة الشحنة الحجمية بالكولوم لكل متر مكعب (C/m^3) .
والشحنة الصغيرة ΔQ الموجودة في الحجم الصغير Δv هي

(١) ولكن دراسة الصوصاء الناتجة عن الكترونات أو ألكترونات في الترانزستورات ، الانابيب المفرغة والمقاومات تتطلب مثل هذا الفحص للشحنة .

$$(١٥) \Delta Q = \rho \Delta v$$

وتعرف ρ رياضيا باستخدام عملية النهايات على (١٥) ،

$$(١٦) \quad \rho = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta v}$$



شكل ٢ - الشحنة الكلية المنتشرة خلال الأسطوانة الدائرية القائمة يمكن الحصول عليها بإيجاد قيمة $Q = \int_{vol} \rho \, dv$

والشحنة الكلية داخل حجم ما محدود ، يمكن الحصول عليها بالتكامل على ذلك الحجم

$$(١٧) \quad Q = \int_{vol} dQ = \int_{vol} \rho \, dv$$

وعادة ما تُستخدم علامة تكامل واحدة ، ولكن الحجم التفاضل dv يدل على التكامل على حجم ، ومن ثم فهو تكامل ثلاثي . ولحسن الحظ أننا في الغالب نرضى أنفسنا بالتكامل المَبِين وليس أكثر ، لأن التكاملات المتعددة يضرب جداً لإيجاد قيمها عدا في المسائل ذات أقصى تماثل .

وكمثال لايجاد قيمة تكامل حجمي ، دعنا نجد الشحنة الكلية المحتواة في طول 2 cm للحزمة الالكترونية المبينة في شكل ٢ - ٤ . في اللحظة المبينة نفترض أن كثافة الشحنة الحجمية هي

$$\rho_v = -5 \times 10^{-6} e^{-10^3 \rho z} \quad \text{C/m}^3$$

الحجم التضاضل في الاحداثيات الاسطوانية معطى في قسم ١ - ٨ ، ولذلك ،

$$Q = \int_{0.02}^{0.04} \int_0^{2\pi} \int_0^{0.01} -5 \times 10^{-6} e^{-10^3 \rho z} \rho \, d\rho \, d\phi \, dz$$

تكامل أولا بالنسبة لـ ϕ ، حيث أنها سهلة جدا ،

$$Q = \int_{0.02}^{0.04} \int_0^{0.01} -10^{-5} \pi e^{-10^3 \rho z} \rho \, d\rho \, dz$$

ثم بالنسبة لـ z ، لأن ذلك سييسل التكامل الأخير بالنسبة لـ ρ ،

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^{0.01} \left(\frac{-10^{-5} \pi}{-10^3} e^{-10^3 \rho z} \rho \, d\rho \right)_{z=0.02}^{z=0.04} \\ &= \int_0^{0.01} -10^{-10} \pi (e^{-2,000\rho} - e^{-4,000\rho}) \, d\rho \end{aligned}$$

وأخيرا ،

$$Q = -10^{-10} \pi \left(\frac{e^{-2,000\rho}}{-2,000} - \frac{e^{-4,000\rho}}{-4,000} \right)_0^{0.01}$$

أو

$$Q = -10^{-10} \pi \left(\frac{1}{2,000} - \frac{1}{4,000} \right) = \frac{-\pi}{40} \quad \text{pC}$$

حيث pC ترمز الى بيكوكولوم $\text{picocoulombs}^{(1)}$. في نظام الوحدات الدولية .

وكتقدير تقريبي : لو فرضنا أن هذه الالكترونات تتحرك بسرعة ثابتة تساوى عشرة في المائة من سرعة الضوء ، فإن هذه الحزمة التي طولها 2cm ستكون قد سارت 2cm في 2/3 ns (nano second) ويكون التيار تقريبا يساوى خارج القسمة .

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{-(\pi/40)10^{-12}}{(2/3)10^{-9}}$$

(١)- المبادئ ومعانيها واختصاراتها مجدولة في جدول (ب- ٣) بالملحق (ب) .

أو $118 \mu A$ (micro ampers) تقريبا .

والاسهام المنصرى التزايدى لشدة المجال الكهروى عند r نتيجة شحنة عنصرية تزايدية ΔQ عند r هى

$$\Delta E(r) = \frac{\Delta Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r-r'}{|r-r'|^2} = \frac{\rho \Delta v}{4\pi\epsilon_0} \frac{r-r'}{|r-r'|^2}$$

وإذا جمعنا إسهامات جميع الشحنات الحجمية في منطقة معينة وندع العنصر الحجمى Δv يقترب من الصفر ، بينما يصبح عدد هذه العناصر لانهايا ، فيستول الجمع الى تكامل

$$(1A) \quad E(r) = \int_{vol} \frac{\rho(r') dv'}{4\pi\epsilon_0} \frac{r-r'}{|r-r'|^2}$$

ومرة أخرى هذا هو تكامل ثلاثى ، وسنبذل أقصى جهدنا لتتلاقى أداء التكامل فعلا .

وقد تستحق دلالة الكميات المختلفة تحت علامة التكامل في (1A) قليلا من التمعن . فالنتجه r من نقطة الأصل يعين نقطة المجال التى عندها سيحدد E بينما يمتد المنبع r' من نقطة الأصل الى نقطة المنبع حيث تقع $\rho(r')dv'$. والمسافة المقاييسية بين نقطة المنبع ونقطة المجال هى $|r-r'|$ والكسر $|r-r'|/|r-r'|^2$ هو وحدة التجه الموجه من نقطة المنبع الى نقطة المجال . ومتغيرات التكامل هى x' ، y' و z' في الاحداثيات الكرتيزية .

ت ٢ - ٥ . أوجد الشحنة الكلية داخل كل من الصجوم المبينة :

$$(أ) \quad 3 \leq z \leq 3.6 \text{ و } 0 \leq y \leq 1, -1 \leq x \leq 2, \rho = 10ze^{-0.1x} \sin \pi y$$

$$(ب) \quad 0 \leq z \leq 3 \text{ و } 0 \leq \phi \leq \pi/2, 0 \leq \rho \leq 2; \rho = 4xyz$$

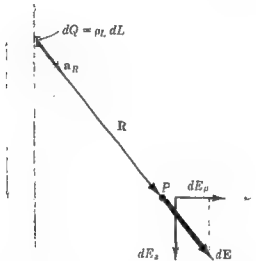
$$(ج) \quad \rho_r = 3\pi \sin \theta \cos^2 \phi / [2r^2 (r^2 + 1)] \text{ الكون}$$

الاجابة : $36.5C$; $36.0C$; $36.1C$

٢ - ٥ . مجال خط من الشحنة :

الى الآن اعتبرنا نوعين من توزيعات الشحنة وهما : الشحنة النقطية ، والشحنة الموزعة خلال حجم بكثافة $\rho C/m^3$. فإذا اعتبرنا - الآن - كثافة شحنة حجمية على هيئة توزيع فقيل ، مثل حزمة دقيقة جدا ومركزة في أنبوبة أشعة الكاثود ، أو موصلا مشحونا ذا نصف قطر شديد الصغر ، فالتنا نجد أنه لمن المناسب معاملة الشحنة كخط شحنة ذات كثافة

$\rho_L \text{ C / m}$ وفي حالة الحزمة الالكترونية تكون الشحنات في حركة ، وحقيقة لنا بصلد مسألة كهروستاتيكية . على أنه إذا كانت حركة الالكترون ثابتة ومنظمة (حزمة تيار مستمر) وإذا تجاهلنا مؤقتا المجال المغناطيسى الناتج ؛ فان الحزمة الالكترونية يمكن اعتبارها مكونة من الكترونات ساكنة ، حيث أن لقطات تصويرية مأخوذة عند أى لحظة ستظهر نفس التوزيع للشحنات .



شكل ٢ - • الاضافة $dE_p \cos \theta + dE_z \sin \theta = dE$ الى شدة المجال الكهربى ناشئة من عنصر شحنة $dQ = \rho_L dL$ موضوع على مسافة L من نقطة الأصل . الكثافة الخطية للشحنة منتظمة وتمتد على كل طول المحور .

دعنا نفترض شحنة خطية مستقيمة ممتدة بطول المحور z فى نظام الاحداثيات الاسطوانية من $-\infty$ إلى ∞ ، كما هو مبين فى شكل ٢ - • . ونريد إيجاد شدة المجال الكهربى E عند أى وكل نقطة ، والناتجة عن كثافة شحنة خطية منتظمة مقدارها ρ_L .

ويجب دائما اعتبار التماثل أولا لتحسين عاملين معينين : (١) مع أى من الاحداثيات لايتغير المجال ، و(٢) أى من مركبات المجال غير موجودة . والاجابة على هذين السؤالين عندئذ تدلنا على أى المركبات موجودة ومع أن الاحداثيات تتغير .

وبالرجوع الى شكل ٢ - • نتحقق أنه عندما نتحرك حول خط الشحنة ، مغيرين ϕ مع إبقاء p و z ثابتين ، فان خط الشحنة يظهر بدون تغيير من كل زاوية . وبتعبير آخر : إن التماثلسمى موجود ، ولايتغير أى من مركبات المجال مع ϕ .

مرة أخرى ، إذا أبقينا p و ϕ ثابتين مع التحرك إلى أعلى ، وإلى أسفل خط الشحنة بتغيير z ، سيظل خط الشحنة ممتدا لمسافة لانهاية فى كلا الاتجاهين ولايتغير المسألة . وهذا هو تماثل محورى ويؤدى الى مجالات ليست دولا فى z .

وإذا افقنا ϕ و z ثابتين وغيرنا ρ فإن المسألة تتغير ، ويؤدى بنا قانون كولوم إلى توقع أن يصبح المجال أضعف كلما زادت ρ . ومن ثم فيعملية الحذف نقاد الى الحقيقة ، أن المجال يتغير بتغير فقط مع ρ .

والآن ، أى المركبات موجودة ؟ . كل عنصر طول تزايدى من خط الشحنة يعمل كشحنة نقطية ويتبع عنصر مساهمة تزايدى لشدة المجال الكهربى الموجه نحو الابتعاد عن القطعة الصغيرة للشحنة (بفرض خط شحنة موجب) . ولأن أيا من عناصر الشحنة لا ينتج مركبة ذات الرمز السفلى ϕ لشدة المجال الكهربى فإن E_p يساوى صفرا إلا أن كل عنصر ينتج مركبة E_p ومركبة E_z ، ولكن المساهمة فى E_z بعناصر من الشحنة على مسافات متساوية أعلى ، وأسفل النقطة التى تعين عندها المجال تلغى بعضها الآخر . ولذلك فقد وجدنا أن لدينا فقط مركبة E_p وأنها تتغير مع ρ فقط . والآن علينا أن نوجد هذه المركبة .

نختار نقطة P على المحور y التى عندها يمين المجال . وهذه نقطة عامة تماما بسبب عدم تغير المجال مع ϕ و z . ونطبق (٩) لاييجاد عنصر المجال التزايدى عند P نتيجة عنصر الشحنة التزايدى $dQ = \rho_L dL$ ، نحصل على

$$dE = \frac{\rho_L dL}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{a}_R$$

أو

$$dE_p = \frac{\rho_L dL \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\rho_L dL}{4\pi\epsilon_0 R^2} \frac{y}{R} = \frac{\rho_L dL y}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

باستبدال $R^2 = L^2 + \rho^2$ وتجميع المساهمات من كل عنصر للشحنة ،

$$E_p = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_L \rho dL}{4\pi\epsilon_0 (L^2 + \rho^2)^{3/2}}$$

وبالتكامل باستخدام جداول التكامل أو بتغير المتغير ، $L = \rho \cot \theta$ ، نحصل على

$$E_p = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \rho \left(\frac{1}{\rho^2} \sqrt{L^2 + \rho^2} \right)_{-\infty}^{\infty}$$

$$(19) \quad \boxed{E_p = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 \rho}} \quad \text{و}$$

وهذه هى الاجابة المطلوبة ولكن هناك طرقا عديدة أخرى للحصول عليها . وقد

كان من الممكن استخدام الزاوية θ كمغير التكامل ، لأن $L = \rho \cot \theta$ من شكل ٢ - هـ و $dL = -\rho \csc^2 \theta d\theta$.

ولأن $R = \rho \csc \theta$ فإن تكاملنا يصبح ، ببساطة

$$\begin{aligned} dE_p &= \frac{\rho_L dL}{4\pi\epsilon_0 R^2} \sin \theta = -\frac{\rho_L \sin \theta d\theta}{4\pi\epsilon_0 \rho} \\ E_p &= -\frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0 \rho} \int_{180}^0 \sin \theta d\theta = \left. \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0 \rho} \cos \theta \right|_{180}^0 \\ &= \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 \rho} \end{aligned}$$

وهنا كان التكامل أبسط ، ولكن بعض الخبرة بالمسائل من هذا النوع ضرورية ، قبل أن نستطيع دون زلل اختيار أبسط متغيرات التكامل عند بدء المسألة .

وكان من الممكن أيضا اعتبار (١٨) كنقطة بداية ،

$$E = \int_{vol} \frac{\rho_v dv}{4\pi\epsilon_0 R^2} a_R$$

بفرض $\rho_v dv = \rho_L dL$ ومكاملا على طول الخط الذي هو الآن « الحجم » المحتوى على كل الشحنة . افترض أننا عملنا ذلك وتناسى كل شيء تعلمناه من تماثل المسألة . باختيار الآن نقطة ρ عند موضع عام (ρ, ϕ, z) (شكل ٢ - ٦) نكتب

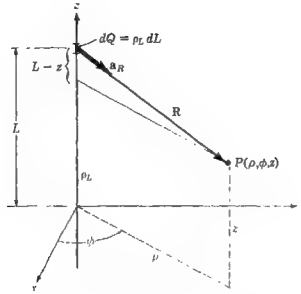
$$R = \rho a_\rho - (L - z) a_z$$

$$R = \sqrt{\rho^2 + (L - z)^2}$$

$$a_R = \frac{\rho a_\rho - (L - z) a_z}{\sqrt{\rho^2 + (L - z)^2}}$$

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_L dL [\rho a_\rho - (L - z) a_z]}{4\pi\epsilon_0 [\rho^2 + (L - z)^2]^{3/2}} \\ &= \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho dL a_\rho}{[\rho^2 + (L - z)^2]^{3/2}} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(L - z) dL a_z}{[\rho^2 + (L - z)^2]^{3/2}} \right\} \end{aligned}$$

وقبل أن نكامل تعبيراً اتجاهياً ، يجب أن نعرف ما إذا كان المتجه تحت علامة التكامل (هنا وحدات المتجهات a_ρ و a_z) يتغير مع متغير التكامل (هنا dL) أم لا . فإذا لم يكن كذلك ، فإنه يكون ثابتاً ويمكن نقله من داخل التكامل تاركا كمية مقياسية يمكن تكاملها بالطرق العادية . وبالطبع ، فإن وحدات متجهاتها لا تتغير في القيمة ، ولكن تغير الاتجاه هو فعلاً أمر متعب . ولحسن الحظ فإن اتجاه a_ρ لا يتغير مع L (ولا مع ρ ، ولكنه يتغير مع ϕ) و a_z ثابت دائماً .



شكل ٦-٢ هندسة المسألة للمجال حول خط لانهاى من الشحنة يؤدى الى تكاملات أكثر صعوبة عندما يهمل التماثل .

وعلى ذلك نحذف وحدات المتجهات من التكاملات ونكامل ثانية من الجداول أو بتغيير المتغيرات ،

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \left[a_\rho \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho dL}{[\rho^2 + (L-z)^2]^{3/2}} - a_z \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(L-z) dL}{[\rho^2 + (L-z)^2]^{3/2}} \right] \\
 &= \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \left[a_\rho \rho \frac{1}{\rho^2} \frac{L-z}{\sqrt{\rho^2 + (L-z)^2}} \right]_{-\infty}^{\infty} + \left[a_z \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (L-z)^2}} \right]_{-\infty}^{\infty} \\
 &= \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon_0} \left[a_\rho \frac{2}{\rho} + a_z(0) \right] = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 \rho} a_\rho
 \end{aligned}$$

مرة أخرى نحصل على نفس الإجابة - كما ينبغي - لأنه ليس هنا أى خطأ فى الطريقة سوى أن التكامل كان أكثر صعوبة ، وتطلبت أداء تكاملين . وهذا هو الثمن الذى ندفعه نتيجة لإهمال اعتبار التماثل والفوضى بعنف مع الرياضيات . فنبصر قبل التكامل . وسنناقش طرقاً أخرى لحل هذه المسألة الأساسية - بعد أن نقدم قانون جاوس ومفهوم الجهد .

دعنا الآن نعتبر الإجابة نفسها ،

$$(19) \quad E_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 \rho}$$

ونلاحظ أن المجال يتناقص عكسيا مع المسافة الى الخط المشحون ، بالمقارنة مع النقطة المشحونة حيث تناقص المجال مع مربع المسافة . فالتحرك عشر مرات بعيدا عن نقطة مشحونة يؤدي لمجال واحد في المائة فقط من شدته السابقة ، ولكن التحرك عشر مرات أبعد من خط مشحون يقلل المجال الى عشرة في المائة فقط من قيمته السابقة . ويمكن استنباط تناظر مع منبع اضاءة ، لأن شدة الضوء من نقطة منبع للضوء تقل عكسيا مع مربع المسافة الى المنبع . والمجال لأنبوية فلورسنت طولها لانهاى يتناقص عكسيا مع القوة الأولى للمسافة النصف قطرية الى الأنبوية ، ويجب أن نتوقع أن شدة الضوء حول أنبوية محدودة الطول يخضع لهذا القانون قرب الأنبوية . ومع ذلك ، فكلما تبعد نقطتنا أكثر فأكثر من أنبوية محدودة الطول فانها تبدو في النهاية كنقطة منبع ويخضع المجال لملاقة التربيع العكسي .

وفى قسم ٢ - ٧ سنشرح كيف يمكن رسم المجالات تخطيطيا ونستخدم مجال خط الشحنة كمثال .

ت ٢ - ٦ خط شحنة منتظم $\rho_L = 25 \text{ n C/m}$ يقع على الخط $x = -3$, $z = 4$ فى فضاء حر . أوجد E فى المركبات الكرتيزية عند :

(أ) نقطة الأصل ، (ب) $P_1 (2, 15, 3)$ ، (ج) $P_2 (\rho = 4, \phi = 60^\circ, z = 2)$.

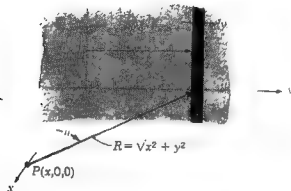
الاجابة : $77.5a_x - 31.0a_z \text{ V/m}$; $86.4a_x - 17.3a_z \text{ V/m}$; $53.9a_x - 71.9a_z \text{ V/m}$

٢ - ٦ = مجال لوح من الشحنة :

اللوح اللانهائى للشحنة ، ذو الكثافة المنتظمة $\rho_s \text{ C/m}^2$ هو شكل أساسى آخر للشحنات . ومثل هذا التوزيع للشحنة قد يستخدم كثيرا لتقريب ذلك الموجود على موصلات خط نقل شريطى أو المكثف ذو اللوحين المتوازيين . وكما سنرى فى الفصل الخامس فان الشحنة الاستاتيكية تستوطن أسطح الموصلات وليس فى داخلها ، ولهذا السبب ، فان ρ_s تعرف عامة بكثافة الشحنة السطحية . وبذلك تكون عائلة توزيع الشحنة ممكنة - نقطة ، خط ، سطح وحجم أو ρ , ρ_s , ρ_L , Q

دعنا نضع لوحا من الشحنات فى المستوى yz ونعتبر التماثل مرة أخرى (شكل ٢ - ٧) . فزى أولا أن المجال لايمكن أن يتغير مع y أو مع z ونجد أن المركبتين y و z الناشئتين من العناصر التفاضلية للشحنة الموجودة متماثلة بالنسبة للنقطة التى نرغب المجال عندها سوف تلغى بعضها . ومن ثم فان E_x هى الموجودة فقط ، وهذه المركبة دالة فى x وحدها . ومرة أخرى نواجه باختيار من طرق عدة لايجاد قيمة هذه المركبة بواسطتها ، وهذه المرة سنستخدم طريقة واحدة فقط ونترك الطرق الأخرى كتمارين لبعدها ظهر يوم لإجازة هادى .

دعنا نستخدم مجال خط الشحنة اللانهائي (١٩) بتقسيم اللوح اللانهائي إلى أشرطة تفاضلية العرض . وأحد هذه الأشرطة مبين في شكل ٧-٢ . كثافة الشحنة الخطية ، أو الشحنة لكل وحدة أطوال ، هي $\rho_L = \rho_s dy$ ، والمسافة من خط الشحنة هذا إلى نقطتنا العامة P على المحور x هي $R = \sqrt{x^2 + y^2}$.



شكل ٧-٢. لوح لانهائي من الشحنة في المستوى yz ، ونقطة عامة P على المحور x ، وخط شحنة ذو عرض تفاضلي مستخدم كمصدر في تعيين المجال عند P باستخدام $dE = \rho_s dy a_R / 2\pi \epsilon_0 R$.

والمساهمة في E_x عند P من هذا الشريط تفاضلي العرض هو إذن

$$dE_x = \frac{\rho_s dy}{2\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + y^2}} \cos \theta = \frac{\rho_s}{2\pi\epsilon_0} \frac{x dy}{x^2 + y^2}$$

ويجمع تأثيرات كل الأشرطة

$$E_x = \frac{\rho_s}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dy}{x^2 + y^2} = \frac{\rho_s}{2\pi\epsilon_0} \left[\tan^{-1} \frac{y}{x} \right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0}$$

وإذا اختيرت النقطة P على المحور x السالب فإن

$$E_x = -\frac{\rho_s}{2\epsilon_0}$$

لأن المجال موجه دائماً متباعدة عن الشحنة الموجبة . وهذه الصعوبة في الإشارة يتغلب عليها عادة بتحديد وحدة المتجه a_R العمودي على اللوح موجها للخارج ، أو مبتعدا عنه حيث

$$(٢٠) \quad E = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} a_N$$

وهذه إجابة تدعو للدهشة ، لأن المجال ثابت القيمة والاتجاه . إنه بنفس الشدة على بعد مليون ميل بعيداً عن اللوح مثلما هو على السطح . وبالرجوع الى مناظرتنا مع الضوء ، نرى أن المنبع الضوئي المنتظم على سقف غرفة كبيرة جداً يؤدي الى إضاءة على قدم مربع على الأرض ، مثلما يفعل على قدم مربع على بعد بوصات قليلة من السقف . وإذا أردت إثارة أكثر على هذا الموضوع فلن يعود عليك بفائدة أن تمسك الكتاب أقرب الى هذا المنبع الضوئي .

وإذا وضع لوح شحنات لانهاى ثاني له شحنة سالبة كثافتها $-\rho_s$ فى المستوى $x = a$ ، يمكننا إيجاد المجال الكلى باضافة مساهمة كل لوح . ففى المنطقة $x > a$

$$E_+ = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} a_x \quad E_- = -\frac{\rho_s}{2\epsilon_0} a_x \quad E = E_+ + E_- = 0$$

وفى $x < 0$

$$E_+ = -\frac{\rho_s}{2\epsilon_0} a_x \quad E_- = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} a_x \quad E = E_+ + E_- = 0$$

وعند $0 < x < a$

$$E_+ = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} a_x \quad E_- = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} a_x$$

و

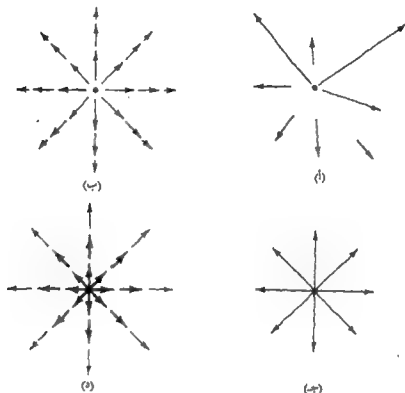
$$(٢١) \quad E = E_+ + E_- = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} a_x$$

وهذه إجابة عملية هامة لأنها تعطى المجال بين لوحين متوازيين لمكثف هوائى ، بشرط أن الأبعاد الطولية للوحين كبيرة جداً بالنسبة للمسافة بينهما ، وأيضاً بشرط أننا نعتبر نقطة بعيدة جداً عن الأحراف . والمجال خارج المكثف ، مع أنه غير صفري ، كما وجدنا للحالة المثالية آنفاً ، فهو عادة مهمل .

ث - ٢ - ٧ . وضعت ثلاثة ألواح منتظمة مشحونة فى فضاء حر كما يلى : $2\mu C/m^2$ عند $x = 3$ ، $-5\mu C/m^2$ عند $x = 1$ و $4\mu C/m^2$ عند $x = 5$. عن E عند النقطة :

- (أ) $(0,0,0)$ (ب) $(2.5, -1.6, 4.7)$ (ج) $(8, -2, -5)$ ؛
(د) $(-3.1, 0, 3.1)$.

الاجابة $-56.5a_x \text{KV} / \text{m}$; $56.5a_y \text{KV} / \text{m}$; $-395a_z \text{KV} / \text{m}$; $169.4 \text{KV} / \text{m}$



شكل ٢ - ٨ (أ) رسم تخطيطي رديء جدا . (ب) و(ج) رسمان تخطيطيان لائس بهما و(د) الشكل المعتاد لتخطيط خطوط الانسياب ، وفي الشكل الأخير تبين الأسهم اتجاه المجال عند كل نقطة على طول الخط ، والتباين بين الخطوط يتناسب عكسيا مع شدة المجال .

٢ - ٧ - خطوط الانسياب والرسوم التخطيطية للمجالات :

لدينا الآن معادلات اتجاهية لشدة المجال الكهربى ناتجة من عدة أشكال مختلفة للشحنة ، ولقد كان لدينا قليل من الصعوبة فى تفسير قيمة واتجاه المجال من المعادلات . ولسوء الحظ ، لايمكن أن تستمر هذه البساطة أطول كثيرا ، لأننا قمنا بحل أغلب الحالات البسيطة وتوزيعاتنا الجديدة للشحنة سوف تؤدى حتما الى تعبيرات أكثر تعقيدا للمجالات ، والى صعوبة أكثر فى تصور المجالات من خلال المعادلات . ومع ذلك ، فحقيقى أن صورة واحدة تقدر بحوالى ألف كلمة وذلك إذا عرفنا تماما أن نرسم هذه الصورة .

اعتبر المجال حول خط شحنة

$$E = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 \rho} a_\rho$$

يبين شكل ٢ - ٨ منظر مقطع عرضي لخط الشحنة ، ويمثل ماقد تكون محاولتنا الأولى لتصوير المجال ، أجزاء خطية قصيرة مرسومة هنا وهناك لها طول متناسب مع مقدار E وتشير إلى اتجاه E .

ولكن الشكل يفضل في إظهار التماثل بالنسبة لـ ϕ ، ولذا نحاول مرة أخرى في شكل ٢ - ٨ ب مع وضع تماثل للأجزاء الخطية . وهنا يظهر الخلل الحقيقي ، فان أطول الخطوط يجب أن يرسم في أكثر المناطق ازدحاما ، وهذا أيضا يزعجنا إذا استخدمنا أجزاء خطية لها نفس الطول ولكن سمكها متناسب مع E (شكل ٢ - ٨ جـ) . والأساليب الأخرى التي اقترحت تتضمن رسم خطوط أقصر لتمثل مجالا أقوى (وهذا مفضل باصله) وكذلك استخدام كثافة اللون لتمثل مجالا أقوى (صعبة ومكلفة) .

وللحاضر ، دعنا نكتب بيان اتجاه E فقط برسم خطوط متصلة من الشحنة بحيث تكون مماسة لـ E في كل مكان . ويوضح شكل ٢ - ٨ د هذا التوافق . والتوزيع المتماثل للخطوط (واحد كل ٤5) يدل على التماثل السمتي ، ورووس الأسهم يجب أن تستخدم لتحديد الاتجاه .

وتسمى هذه الخطوط عادة خطوط الانسياب ، مع أن تعبيرات أخرى مثل خطوط التدفق وخطوط الاتجاه تستخدم أيضا . وشحنة اختبار صغيرة موجبة موضوعة عند أى نقطة من هذا المجال وهى حرة الحركة ستكتسب عجلة في اتجاه خط الانسياب المار بتلك النقطة . وإذا مثل المجال سرعة سائل أو غاز (الذى يجب أن يكون له ، عرضيا ، منبع عند $\rho = 0$) فان جسيمات صغيرة معلقة فى السائل أو الغاز ستقتفى أثر خطوط الانسياب .

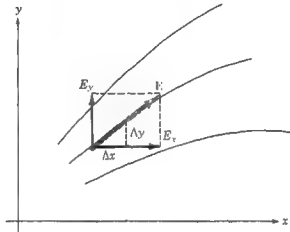
سنكشف فيما بعد أن هناك فائدة إضافية تصاحب هذا الرسم التخطيطى لخطوط الانسياب ، حيث أنه يمكن بيان أن مقدار المجال يتناسب عكسيا مع المسافات بين خطوط الانسياب لبعض الحالات الخاصة المهمة . فكلما اقتربوا من بعضهم كان المجال أقوى . حيثند أيضا طريقة أسهل وأكثر دقة لعمل مثل هذا النوع من الرسوم التخطيطية لخطوط الانسياب .

وإذا حاولنا أن نرسم تخطيطا لمجال شحنة نقطية ، فان تغير المجال في وبعيدا عن الورقة سيسبب أساسا صعوبات بالغة ، ولهذا السبب فان الرسم التخطيطى عادة يقتصر على المجالات ذات البعدين .

وفي حالة المجال ذي البعدين ، دعنا نضع اختياريا $E_z = 0$. وعلى ذلك فان خطوط الانسياب تنحصر في مستويات فيها z ثابتة ، ويكون الرسم التخطيطي هو نفسه لأي من هذه المستويات . عدد من خطوط انسياب موضحة في شكل ٩ - ٢ ، والمركبتان E_y و E_x مبيتان عند نقطة عامة . ولأنه واضح من هندسة الشكل أن

$$(٧٢) \quad \frac{E_y}{E_x} = \frac{dy}{dx}$$

فان معرفة الشكل الدالي لـ E_x و E_y (والقدرة على حل المعادلة التفاضلية الناتجة) سيمكننا من إيجاد المعادلات الخاصة بخطوط الانسياب .



شكل ٩ - ٢ يمكن الحصول على معادلة خطوط الانسياب بحل المعادلة التفاضلية $E_y / E_x = dy / dx$

وكتوضيح لهذه الطريقة اعتبر مجال خط شحنة منتظم بـ $\rho_L = 2\pi \epsilon_0$ ،

$$E = \frac{1}{\rho} a_\rho$$

وفي الاحداثيات الكرتيزية ،

$$E = \frac{x}{x^2 + y^2} a_x + \frac{y}{x^2 + y^2} a_y$$

وعلى ذلك تكون المعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dx} = \frac{E_y}{E_x} = \frac{y}{x} \quad \text{or} \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

ولذلك ،

$$\ln y = \ln x + \ln C \text{ أو } \ln y = \ln x + C_1$$

ومنها يمكن الحصول على معادلات خطوط الانسياب ،

$$y = Cx$$

وكل خط انسياب يرتبط بقيمة معينة لـ C والخطوط نصف القطرية المبينة في شكل ٢ - ٨ يمكن الحصول عليها عندما تكون $C = 0$ ، I ، $-I$ و $I/C = 0$

· وأيضا قد يمكن الحصول على معادلات خطوط الانسياب مباشرة في الاحداثيات الاسطوانية والكروية . وسيفحص مثال على الاحداثيات الكروية في قسم ٤ - ٧ من الفصل الرابع .

٢ - ٨ - أوجد معادلة خط الانسياب المار بالنقطة (3, 2, 1) في المجال:
(أ) $E = ya_x + xa_x$ ، (ب) $E = (x + y)a_x + (x - y)a_y$.
الاجابة : $3 = x^2 - y^2$ ، $7 = x^2 - 2xy + y^2$.

مراجع مقترحة :

- 1 - Boast, W.B.: "Vecor Fields," Harper and Row, Publishers, Incorporated, New York, 1964.
يحتوى هذا الكتاب على عددين من الأمثلة والرسومات التخطيطية للمجالات .
- 2 - Della Torre, E. and C.L. Longo : "The Electromagnetic Field Aliyn and Bacon, Inc., Boston, 1969.
يقدم المؤلفان كل النظرية الكهرومغناطيسية بتطور معتنى به ودقة صارمة بناء على قانون تجريبى واحد - وهو كولوم الذى يبدأ فى الفصل الأول .
- 3 - Schelkunoff, S.A.: "Electromagnetic Fields", Blaisdell Publishing Company, New York, 1963.

كثيرا من النواحي الفيزيائية للمجالات تناقش مبكرا فى هذا المرجع بدون رياضيات عالية .

مسائل :

- ١ - ثلاث شحنات نقطية كل منها $20pC$ موضوعة فى فضاء حر على المحور x عند $x = -1$ ، $x = 0$ و $x = 1$. (أ) أوجد القوة المحصلة على شحنة $1C$ موضوعة عند (2, 10, 1) ، (ب) استبدل الشحنات الثلاث بشحنة واحدة مقدارها $60pC$ عند

نقطة الأصل ، وأوجد القوة على الشحنة $1C$. (ج) لماذا يكون الاجابتان متساويتين

تقريبا ؟

٢ - كرنا البلاستيك الصغيرتان المبيتان في شكل ٢ - ١٠ مرتبتان بحيث يمكنهما الانزلاق

بحرية على طول خيط عازل أعطيت للكرتين شحنات متماثلة موجبة . بعد ذلك

وجدت الكرة السفلى مقابل العقدة السفلى ، بينما تحركت الكرة العليا الى موضع

على بعد $5cm$ من تلك العقدة . أوجد قيمة الشحنة إذا كانت لكل كرة كتلة $0.08g$.

٣ - وضعت شحنات نقطية متماثلة شحنة كل منها $3\mu C$ عند الأركان الأربعة لمربع طول

ضلعه $5cm$ في فضاء حر . أوجد مقدار القوة على كل شحنة .

٤ - شحنة نقطية $Q = 1\mu C$ موضوعة في فضاء حر عند

$(0,0,1)$ ، بينما Q_2 عند $(0,0,-1)$ أوجد متجه القوة على شحنة مقدارها $1\mu C$

عند $(0,1,0)$ إذا كانت Q_2 تساوى : (أ) $1\mu C$ ، (ب) $-1\mu C$.

٥ - شحنتان نقطيتان قيمتهما $12nC$ و $-5nC$ وضعتا في فضاء حر عند $(6,2,1)$ و

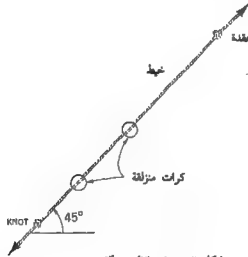
$(2,7,4)$ بالترتيب . (أ) ما هو مقدار القوة المؤثرة على كل شحنة ؟ (ب) أوجد E

عند $(4,4,4)$.

٦ - شحنة نقطية قيمتها $50nC$ موجودة عند النقطة $(8, -6, -10)$ في فضاء حر .

أوجد E عند $(3, 8, -5)$ في : (أ) المركبات الكرتيزية ، (ب) المركبات

الاسطوانية .



شكل ٢ - ١٠ - انظر مسألة ٢

٧ - شحنة نقطية قيمتها nC موضوعة عند نقطة الأصل في فضاء حر . أوجد معادلة

المنحنى في المستوى $z = 0$ الذي عليه $E_x = 1 V/m$.

٨ - تستخدم شحنة اختبار موجبة لاستكشاف مجال شحنة نقطية واحدة Q موضوعة عند P

(a,b,c) . فإذا وضعت شحنة الاختبار عند نقطة الأصل ، تكون القوة عليها في

الاتجاه $0.5\hat{a}_x - 0.5\sqrt{3}\hat{a}_y$ ، وعندما تحرك شحنة الاختبار الى $(1,0,0)$ تكون القوة في الاتجاه $0.8\hat{a}_x - 0.6\hat{a}_y$. أوجد a, b, c .

٩ - وضعت ثلاث شحنات نقطية في فضاء حر كما يلي $Q_1 = -6\mu C$ عند $P_1(1,0,0)$ ، $Q_2 = 10\mu C$ عند $P_2(2,0,0)$ و $Q_3 = 4\mu C$ عند $P_3(4,0,0)$ فأى

من الشحنات عليها أكبر القوى مقدارا ، وما هو مقدار تلك القوة ؟

١٠ - شحنتان نقطيتان متساويتان كل منهما 1 nC وموضوعتان في فضاء حر عند $(0,0,-1)$ و $(0,0,1)$. أوجد E : (أ) عند $P(x,y,z)$ في الاحداثيات

الكرتيزية ، (ب) عند $Q(\rho, \phi, z)$ في الاحداثيات الاسطوانية .

١١ - وضعت شحنات نقطية عند أركان مربع كما هو مبين في شكل ٢ - ١١ . أوجد نسبة

$|E|$ عند $P(0,a,0)$ الى $|E|$ عند $Q(0,2a,0)$ إذا كانت a تساوى : (أ) ٢ ، (ب)

١٠ ، (ج) ∞ .

١٢ - وضعت شحنة نقطية Q_1 عند $(0,0,0)$ و Q_2 عند $(0,0,1)$. عبر عن Q_2 بدلالة Q_1

بحيث أن E عند $(1,0,-1)$ لا يكون لها : (أ) مركبة E_x ، (ب) مركبة E_z .

١٣ - كثافة حجمية للشحنة معطاة في الثمن الأول (x, y, z) موجبة (

$\rho = 10e^{-2x}(x^2 + 2y^2)\text{ C/m}^3$ ، بينما $\rho = 0$ في أى مكان آخر . أوجد

الشحنة الكلية في المنطقة :

(أ) $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$ (ب) $0 \leq x + 2y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$.

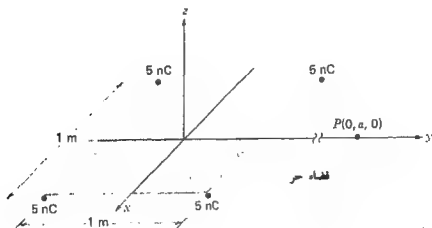
١٤ - كثافة الشحنة الحجمية في منطقة عمل صمام ثنائى مفرغ متوازي الألواح معطى بـ

$\rho = -(4/9)\epsilon_0 V_0 d^{-4/3} x^{-2/3}$ ، حيث يقع الكاثود عند $x = 0$ والأنود عند

$x = d$ والجهد بين الأنود والكاثود هو V_0 . فإذا كان $V_0 = 40\text{ V}$ و $d = 1\text{ cm}$ ،

أوجد الشحنة الكلية في مقطع عرضى مساحته 1 m^2 يقع بين : (أ) $x = 0$ و $x =$

$d/2$ (ب) $x = d/2$ و $x = d$.



شكل ٢ - ١١ - انظر مسألة ١١.

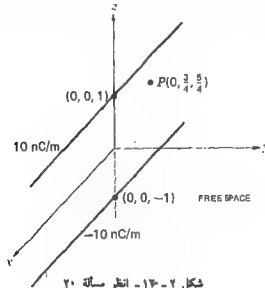
١٥ - تعطى كثافة حجمية لشحنة في الإحداثيات الاسطوانية بالعلاقة :
 $0 \leq z \leq 0.04$, $0 \leq \phi \leq 1/2 \pi$, حيث $\rho_v = (\rho^2 - 10^{-4})z \sin 2\phi$ c /m³
 بينما $\rho_v = 0$ في أى مكان آخر . (أ) عين $\rho_{v,max}$. (ب) أوجد الشحنة الكلية في المنطقة .

١٦ - تتغير كثافة الشحنة مع نصف القطر في نظام الإحداثيات الاسطوانية بالصورة :
 $I/(\rho^2 + a^2)^2$. خلال أى مسافة من المحور z تقع نصف الشحنة الكلية ؟
 ١٧ - إذا تغيرت الكثافة الحجمية لشحنة خطياً مع نصف القطر ، $\rho = \rho_0 r/a$ (حيث ρ_0 و a ثوابت) وبفرض نظام إحداثيات كروي ، أوجد الشحنة الواقعة داخل :
 (أ) الكرة $r \leq a$ ؛ (ب) المخروط $0 \leq \theta \leq 0.1\pi$ ؛
 (ج) المنطقة $0 \leq \phi \leq 0.2\pi$ و $0 \leq \theta \leq \pi$ ، $r \leq a$.

١٨ - فى الإحداثيات الكروية دع $\rho = 10/r$ C /m³ وأوجد : (أ) الكثافة الحجمية للشحنة عند نقطة الأصل ، (ب) الشحنة الكلية فى كرة نصف قطرها I - mm ومركزها عند نقطة الأصل ، (ج) الشحنة الكلية فى المنطقة التى توصف بـ
 $10 \leq r \leq 20$ ، $31^\circ \leq \theta \leq 28^\circ$ ، $0.96\pi \leq \phi \leq 0.96\pi$.

١٩ - خط شحنة لانهائى منتظم ، $\rho_L = 2n$ C/m ، يقع على امتداد المحور x فى فضاء حر ، بينما تقع شحنتان نقطية قيمة كل منها 8nC عند $(0,0,1)$ و $(0,0,-1)$. (أ) أوجد E عند $(2,3,-4)$ ، (ب) الى أى قيمة يجب تغيير ρ_L لتجعل E صفراً عند $(0,0,3)$ ؟

٢٠ - (أ) عين E عند $P(0,0.78, 1.25)$ لخطى الشحنتان المنتظمين المبينين فى شكل ٢-١٢ . (ب) لاحظ أن المركبة فى اتجاه z لـ E فى الجزء (أ) هى صفر عند تلك النقطة الخاصة . والآن عين المحل الهندسى لجميع النقط التى عندها $E_z = 0$.



شكل ٢-١٢ - انظر مسألة ٢٠

٢١- المستقيم النصف- لانهاى ، $x = y = 0$ و $z \geq 0$ ، يحتوى كثافة شحنة منتظمة قيمتها 15 n C/m . عين E فى فضاء حر عند (أ) $P_A(0,0,-1)$ (ب) $P_B(1,2,3)$.

٢٢- الجزء من المحور z الذى له $|z| \leq 2$ يحمل كثافة شحنة غير منتظمة قيمتها : $10|z| \text{ n C/m}$ و $\rho_L = 0$ فى أى مكان آخر . عين E فى فضاء حر عند : (أ) $(0,0,4)$ ، (ب) $(0,4,0)$.

٢٣- إذا أعطيت التوزيعات الأربعة للشحنة هذه فى فضاء حر 0.25 n C/m^2 على السطح $y = 2$ ، 0.25 n C/m^2 — على السطح : $y = -1$ ، 0.4 n C/m^2 على السطح $x = -4$ ، $0.4 \pi \text{ n C/m}$ على الخط $x = 2$ و $z = 3$ ، أوجد E و $|E|$ عند النقطة $(1,3,-1)$.

٢٤- يقع خط ذو شحنة $2 \pi \text{ n C/m}$ على طول المحور y ، بينما كثافات شحنة سطحية ذات 0.1 n C/m^2 و -0.1 n C/m^2 على المستويات $z = 3$ و $z = -4$ بالترتيب . (أ) أوجد E عند $P(1, -7, 2)$ (ب) أعط الاحداثيات الكرتيزية لنقطة عندها E هى السالب للقيمة السابقة .

٢٥- يحمل السطح المربع $-1 \leq x \leq 1$ ، $-1 \leq y \leq 1$ و $z = 0$ كثافة شحنة $\rho_v = |x| \text{ n C/m}^2$ عند $P(0,0,1)$.

٢٦- تحمل المنطقة الدائرية ، $\rho \leq 1$ فى المستوى $z = 0$ فى فضاء حر كثافة شحنة $\rho_s = 5 \rho \text{ n C/m}^2$. عين E عند $(0,0,1)$.

٢٧- (أ) أوجد الصورة العامة لمعادلة خطوط الانسياب للمجال $E = 10xya_x + 5x^2a_y$ (ب) حدد اتجاه E عند $(2,3,-5)$ بواسطة وحدة متجه .

٢٨- إذا أعطيت المجال $a_y(4-2y) + a_x(2x-1)$ ، أوجد الصورة العامة لمعادلات خطوط الانسياب ، وارسم ذلك الخط المار بالنقطة $(1,3,6)$.

٢٩- مجال معطى بـ $E = 2xz^2a_x + 2z(x^2+1)a_z$. أوجد معادلة خط الانسياب المار بالنقطة $(1, 3, -1)$.

٣٠- مجال كهربي معطى $E = \cosh x \sin ya_x + \sinh x \cos ya_y$ (أ) أوجد E عند $(0, \pi/3, 0)$ (ب) عين معادلة خط الانسياب المار بـ $(0, \pi/3, 0)$. (ج) أوجد تقاطع خط الانسياب هذا مع الخطوط $x = 1$ ، $x = 2$ ، $x = 5$.

٣١- بالنسبة لمجالات لا تتغير مع z فى الاحداثيات الاسطوانية ، يمكن الحصول على معادلات خطوط الانسياب يحل المعادلة التفاضلية $E_\rho/E_\phi = dp/(p d\phi)$. أوجد معادلة الخط المار بالنقطة $(2,30^\circ,0)$ للمجال $E = \rho \cos 2\phi a_\rho - \rho \sin 2\phi a_\phi$.

الفصل الثالث

كثافة التدفق الكهربى ، قانون جيلوس والانفراج

بعد رسم قليل من المجالات المشروحة فى الفصل السابق ، وبعد التعود على فكرة خطوط الانسياب التى تبين اتجاه القوة على شحنة اختبار عند كل نقطة ، يكون من الصعب تجنب إعطاء هذه الخطوط معنى فيزيائيا والتفكير فيها كخطوط تدفق . فليس هناك جسيم طبيعى مقدوف نصف قطريا خارجا من الشحنة النقطية ، وليس هناك مجسات صلب ممتدة لتجذب أو تطرد شحنة اختبار غير واعية ، ولكن بمجرد رسم خطوط الانسياب على ورقة يظهر أن هناك صورة تبين شيئا ما موجودا .

وإنه لمن المفيد جدا أن نخترع تدفقا كهربيا ينساب للخارج متائلا من الشحنة النقطية ، ونطبقا على خطوط الانسياب ثم نتصور هذا التدفق كلما وجد مجال كهربى .

هذا الفصل يقدم ويستخدم فكرة التدفق الكهربى ، وكثافة التدفق الكهربى لحل عديد من المسائل المقدمة فى الفصل السابق مرة أخرى . وهنا يصبح العمل أسهل كثيرا ، وذلك بسبب المسائل ذات التماثل الأقصى التى نحلها .

٣ - ١ - كثافة التدفق الكهربى :

فى حوالى ١٨٣٧ أصبح « ميشيل فاراداي » مدير الجمعية الملكية بلندن شغوبا بالمجالات الكهروستاتيكية ، وتأثير المواد العازلة المختلفة على هذه المجالات . وهذه المشكلة كانت تشغله خلال السنوات العشر السابقة عندما كان منشغلا بتجاربه عمله المشهور على قوة الدفع الكهربائية المنتجة بالحث ، والتى سنناقشها فى الفصل العاشر . بانتهاء هذا البحث كان لديه زوجا من الكرات المعدنية متحدثى المركز ومنشأة ، بحيث كانت الخارجية تتكون من نصفى كرة يسكان معا بمثانة . وجهاز أيضا قشرا من مواد عازلة (أو مواد جزئياتها ثنائية الكهربائية ، « أوبساسة » ثنائية الكهربائية) والتى يمكنها شغل كل الحجم المحصور بين الكرتين متحدثى المركز . وسوف لاستفيد حاليا بما توصل اليه عن المواد العازلة ، لأننا سنقصر اهتمامنا على المجالات فى الفضاء الحر ، حتى الفصل الخامس . وعندئذ سنرى أن المواد التى استخدمها ستصنف على أنها عوازل مثالية .

بعدئذ فإن تجربته تتركب أساسا من الخطوات التالية :

١ - عندما كانت الأدوات غير مركبة أعطت الكرة الداخلية شحنة موجبة معروفة .

٢ - بعد ذلك أمسك نصفى الكرة معا حول الكرة المشحونة بحيث كان هناك حوالى 2cm من مواد عازلة بينهما .

٣ - فُرضت شحنة الكرة الخارجية بتوصيلها لحظيا بالأرض .

٤ - فُصلت الكرة الخارجية بعناية ، باستخدام أدوات مصنوعة من مادة عازلة حتى لاتضطرب الشحنة المنتجة بالحث عليها ، ثم قيست الشحنة السالبة المنتجة بالحث على كل نصف كرة .

ولقد وجد « فاراداي » أن الشحنة الكلية على الكرة الخارجية كانت مساوية في المقدار للشحنة الأصلية الموضوعة على الكرة الداخلية ، وكان هذا صحيحا مهما كانت المادة العازلة التي تفصل الكرتين . واستنتج أن هناك نوعا ما من « الازاحة » من الكرة الداخلية الى الخارجية ، والتي كانت لاتعتمد على الوسط ، ونحن الآن نشير الى هذا التدفق على أنه إزاحة ، تدفق إزاحة « أوببساطة » تدفق كهربي .

أيضا بينت تجربة « فاراداي » ، بالطبع ، أن شحنة موجبة أكبر على الكرة الداخلية أنتجت بالتبعية شحنة سالبة أكبر على الكرة الخارجية ، مؤدية الى تناسب مباشر بين الازاحة الكهربية والشحنة على الكرة الداخلية . ويعتمد ثابت التناسب على نظام الوحدات المستخدم . ونحن محظوظون في استخدامنا لوحدات SI لأن الثابت هو واحد . فإذا رُمز للتدفق الكهربي بـ Ψ وللشحنة الكلية على الكرة الداخلية بـ Q ، فإن لتجربة « فاراداي »

$$\Psi = Q$$

وَيُقاس التدفق الكهربي Ψ بالكولوم .

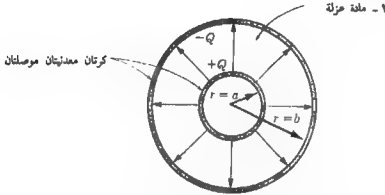
ونستطيع أن نحصل على معلومات كمية أكثر باعتبار كرة داخلية نصف قطرها a وكرة خارجية نصف قطرها b مع شحنات Q و $-Q$ بالترتيب (شكل ٣ - ١) . ومسارات التدفق الكهربي Ψ الممتدة من الكرة الداخلية الى الكرة الخارجية مبنية بخطوط الانسياب الموزعة بتمائل ، والمرسومة نصف قطريا من كرة الى الأخرى .

ويتبع عند سطح الكرة الداخلية coulombs Ψ من التدفق الكهربي بواسطة شحنة coulombs $(\Psi = Q)$ وموزعة بانتظام على سطح له مساحة $4\pi a^2$ كثافة التدفق عند هذا السطح هي $\Psi / 4\pi a^2$ أو $Q / 4\pi a^2$ C/m وهذه كمية جديدة هامة .

وكثالة التدفق الكهربي ، مقياسه بالكولوم لكل متر مربع (أحيانا توصف كخطوط لكل متر مربع) ، لأن كل خط ناشيء عن كولوم واحد) ، تعلى الحرف D ، الذى اختير فى الأصل بسبب التسميات البديلة ، كثالة تدفق الازاحة أو كثالة الازاحة . على أن كثافة التدفق الكهربي نصف أكثر ، وستلتزم باستخدام ذلك التعبير .

وكثافة التدفق الكهربى D هى مجال متجه ، وهى عضو من طائفة « كثافة التدفق » فى المجالات المتجهة ، ويقابلها طائفة « مجالات القوى » التى تشتمل على شدة المجال الكهربى E . واتجاه D عند نقطة هو اتجاه خطوط التدفق عند تلك النقطة ، ويعطى المقدار بعدد خطوط التدفق العابرة لسطح عمودى على الخطوط مقسوما على مساحة السطح .

وبالرجوع ثانية لشكل ٣ - ١ فان كثافة التدفق الكهربى تكون فى اتجاه نصف القطر ولها القيمة :



شكل ٣ - ١ - التدفق الكهربى فى المنطقة بين زوج من الكرات المشحونة متحدة المركز . واتجاه ومقدار D ليسا دوال فى المائل بين الكرتين .

$$D \Big|_{r=a} = \frac{Q}{4\pi a^2} a_r \quad \text{كرة داخلية}$$

$$D \Big|_{r=b} = -\frac{Q}{4\pi b^2} a_r \quad \text{كرة خارجية}$$

وعند مسافة نصف قطرية r ، حيث $a \leq r \leq b$ ،

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2} a_r$$

فاذا جعلنا الآن الكرة الداخلية تصير أصغر وأصغر ، مع استبقاء الشحنة Q ، فانها تصبح شحنة نقطية فى النهاية ، ولكن كثافة التدفق الكهربى عند نقطة على بعد r meters من الشحنة النقطية مازالت تعطى بـ

$$(١) \quad D = \frac{Q}{4\pi r^2} a_r$$

لأن Q من خطوط التدفق تكون موجهة بتمائل خارجة من النقطة ومارة خلال سطح كروي تخيلي مساحته $4\pi r^2$

وهذه النتيجة يجب أن تقارن مع قسم ٢-٢ ، المعادلة (١٠) ، لشدة المجال الكهربى نصف القطرية لشحنة نقطية فى فضاء حر ،

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} a_r$$

ولذلك ففى فضاء حر ،

$$(٧) \quad D = \epsilon_0 E \quad (\text{فضاء حر فقط})$$

برغم أن (٧) تطبق للفضاء الحر فقط ، فانها ليست مقصورة فقط على مجال شحنة نقطية . للتوزيع حجمى عام لشحنات فى الفضاء الحر

$$(٣) \quad E = \int_{\text{vol}} \frac{\rho \, dv}{4\pi\epsilon_0 R^2} a_R \quad (\text{فضاء حر فقط})$$

حيث إستنبطت هذه العلاقة من مجال شحنة نقطية واحدة . وبطريقة مماثلة . تؤدي (١) الى

$$(٤) \quad D = \int_{\text{vol}} \frac{\rho \, dv}{4\pi R^2} a_R$$

ولذا فان (٢) صحيحة لى تشكيل للشحنة فى الفضاء الحر ، ونحن سنعتبر (٢) كمعرفة لـ D فى الفضاء الحر .

وكتفسير لدراسة العوازل فيما بعد ، قد يكون من المستحسن الاشارة الآن الى أن ، نتائج « فاراداي » تبين أن (١) مازالت مطبقة بالنسبة لشحنة نقطية مغمورة فى وسط عازل مثالى لانها تسمى وعلى ذلك تطبق (٤) . ومع ذلك المعادلة (٣) غير مطبقة ، ولذلك فان العلاقة بين D و E ستكون أكثر تعقيداً بقلتر بسيط من (٢) .

ولأن D تتناسب مباشرة مع E في الفضاء الحر ، فإنه لن تكون هناك ضرورة حقيقية لإدخال رمز جديد . ونحن نعمل هذا لأسباب عدة : أولاً ، لأن D مرتبطة بفكرة التدفق ، التي هي فكرة هامة جديدة ، ثانياً ، لأن مجالات الـ D التي سنحصل عليها ستكون أسهل قليلاً من المجالات المناظرة لـ E حيث أن ϵ_0 لا تظهر . وأخيراً ، أنها تساعد في أن تصبح معتاد بعض الشيء على D قبل تطبيقها على المواد العازلة في الفصل الخامس .

ت ٣-١ - شحنة نقطية قيمتها $15\pi \text{ nC}$ موضوعة عند نقطة الأصل . عين التدفق الكهربائي الكلي الذي يترك : (أ) سطح كرة نصف قطرها 5m مركزه عند النقطة $(-1, 2)$ ، (ب) الوجه العلوي ($z = 0.5$) لمكعب ضلعه 1m ، مركزه عند نقطة الأصل ، وحوافه موازية لمحاور الإحداثيات ، (ج) ذلك الجزء من إسطوانة دائرية قائمة $\rho = 5$ ، الذي له $z \geq 0$.

الإجابة : 23.6nC , 7.85nC , 47.1nC

ت ٣-٢ - أوجد $|D|$ عند $(3, -4, 5)$ في مجال : (أ) شحنة نقطية مقدارها $0.2\mu\text{C}$ عند نقطة الأصل ، (ب) خط شحنة منتظم ذي 30nC/m على المحور z ، (ج) شحنة سطحية منتظمة ذات 0.07mC/m^2 في المستوى $x = 5$.

الإجابة : 110.0pC/m^2 , 955pC/m^2 , 318pC/m^2

٣-٢ - قانون جاوس :

يمكن تجميع نتائج تجارب «فاراداي» بالكرات المتحدة المركز كقانون تجريبي ، يذكر أن التدفق الكهربائي الخارج من أي سطح كروي تخيلي واقع بين الكرتين الموصلتين يساوي الشحنة المحصورة داخل السطح التخيلي . وهذه الشحنة المحصورة موزعة على سطح الكرة الداخلية ، وأنه يمكن تركيزها كشحنة نقطية عند مركز الكرة التخيلية . وكيفما كان ، لأن كولوم واحد من التدفق الكهربائي يتج من كولوم واحد من الشحنة ، فإنه لا فرق أن يكون الموصل الداخلي مكعباً ، أو مفتاح باب نحاس ، وستظل الشحنة الكلية المنتجة بالحث على الكرة الخارجية كما هي . وبالتأكيد سوف تتغير كثافة التدفق عن توزيعها بالتمثيل السابق إلى هيئة ما غير معلومة ، ولكن $+A \text{ coulombs}$ على أي موصل داخلي سوف تنتج شحنة متجة بالحث قيمتها $-Q \text{ coulombs}$ على الكرة المحيطة . وبالتقدم خطوة أكثر ، فيمكننا أن نستبدل الآن علبة حساء مفرغة (ولكن مغلفة تماماً) بنصفى الكرة الخارجيين . $Q \text{ coulombs}$ على مفتاح الباب النحاسي سوف

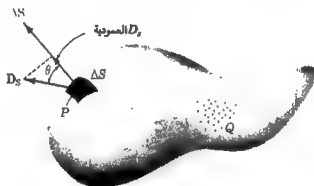
يتبع $\Psi = Q$ خطا للتدفق الكهربى وتولد بالحث Q coulombs - على العلبة الصفيح (١)

وهذه التعميمات لتجربة « فاراداي » أدت الى النص الآتى ، « والذي يعرف بقانون جاوس »

« التدفق الكهربى المار خلال أى سطح مغلق ، يساوى الشحنة الكلية المحتواة بذلك السطح »

وإسهام جاوس - وهو واحد من أعظم الرياضيين الذين أنجبهم العالم على مر العصور - لم يكن فى الواقع فى ذكر القانون كما هو مذكور عندنا آنفاً ، ولكن فى إعطاء صيغة رياضية لهذا النص والذي سنحصل عليه الآن .

دعنا نتخيل توزيعا للشحنة ، مبينة كمسحابة من الشحنات النقطية فى شكل ٣ - ٢ ، محاطة بسطح مغلق له أى شكل . وقد يكون السطح المغلق سطح مادة ما حقيقية ، ولكن أكثر تعميما ، هو أى سطح مغلق نرغب فى تصويره . فإذا كانت الشحنة الكلية هي Q ، فان Q coulombs من التدفق الكهربى سوف تمر خلال السطح المحتوى . وعند أى نقطة على السطح سيكون لمتجه كثافة التدفق الكهربى D قيمة ما D_r ، حيث الرمز السفلى s لمجرد التذكير بأن D يجب أن تقيم عند السطح و D_s ستغير عامة فى المقدار والاتجاه من نقطة الى أخرى على السطح .



شكل ٣ - ٢ - كثافة التدفق الكهربى D عند P نتيجة شحنة Q . والتدفق الكلى المار خلال ΔS هو $D_s \cdot \Delta S$.

يجب علينا الآن أن نعتبر طبيعة عنصر تزايدى من السطح . فعنصر المساحة التزايدى ΔS هو قريب جدا من جزء من سطح مستوي ، والوصف الكامل لعنصر السطح هذا يتطلب ليس فقط تقريرا عن مقدارها ΔS ولكن أيضا عن اتجاهها فى الفراغ .

(١) إذا كان الحساء عازلا تماما ، فأيا كان من الممكن تركه فى العلبة دون أى فرق فى النتائج .

وبعبارة أخرى ، فإن عنصر السطح التزايدى هو كمية متجهة . والاتجاه الأوحده الذى يمكن أن يرتبط بـ ΔS هو اتجاه العمود على المستوى الذى يمس السطح عند النقطة المعنية . وهناك بالطبع ، اثنان من هذه الأعمدة ، ويمكن إزالة الغموض بتحديد العمود الخارج ، كلما كان السطح مغلقا ، وهنا فإن «خارجا» لها معنى محدد .

اعتبر عنصرا تزايديا للسطح ΔS عند أى نقطة P ودع D_θ تعمل زاوية θ مع ΔS ، كما هو مبين بشكل ٣ - ٢ فالتدفق عبر ΔS يكون حيثئذ حاصل ضرب المركبة العمودية لـ D_θ و ΔS ،

$$\Delta \Psi = \Delta S \cos \theta = D_{S, \text{norm}} \Delta S = D_S \cos \theta \Delta S = D_S \cdot \Delta S$$

حيث نستطيع تطبيق تعريف الضرب بالنقطة ، الذى أظهر فى الفصل الأول .
والتدفق الكلى المار خلال السطح المغلق يحصل عليه بجمع المساهمات التفاضلية العابرة لكل عنصر سطح ΔS .

$$\Psi = \int d\Psi = \int_{\text{سطح مغلق}} D_S \cdot dS$$

التكامل الناتج ، هو تكامل على سطح مغلق ، ولأن العنصر السطحي dS يشمل دائما تفاضلات إحداثيين ، مثل $dx dy$ أو $pd\phi$ أو $r^2 \sin \theta d\theta d\phi$ ، فإن التكامل هو تكامل ثنائى . وعادة ما تستخدم علامة تكامل واحدة فقط للاختصار ، ونضع S تحت علامة التكامل لتشير الى تكامل سطحي ، مع أن ذلك فعلا ليس ضروريا حيث أن التفاضلى dS هو الإشارة التلقائية للتكامل السطحي . وكاصطلاح أخير نوضع دائرة صغيرة على علامة التكامل نفسها لتشير إلى أن التكامل مؤدى على سطح مغلق . وغالبا ما يسمى هذا السطح « سطح جاوس » . وعلى ذلك فإن لدينا الصورة الرياضية لقانون جاوس ،

$$(٥) \quad \Psi = \int_S D_S \cdot dS = \text{الشحنة المحواة} = Q$$

الشحنة المحصورة يمكن أن تكون عدة شحنات نقطية ، وفى هذه الحالة

$$Q = \sum Q_n$$

أو خط شحنة

$$Q = \int \rho_L dL$$

$$Q = \int_S \rho_S dS \quad \text{أو شحنة سطحية}$$

$$Q \approx \int_{vol} \rho dv \quad \text{أو توزيع حجمي للشحنة}$$

وعادة تستخدم الصورة الأخيرة ، ويجب أن نتفق الآن أنها تمثل أبا من أو كلا من الصور الأخرى . وبهذا الفهم يمكن كتابة قانون جاوس بدلالة توزيع الشحنة كما يلي :

$$(٦) \quad \oint_S \mathbf{D}_S \cdot d\mathbf{S} = \int_{vol} \rho dv$$

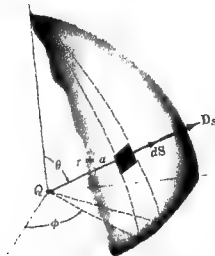
وهو نص رياضي يعنى ببساطة أن التدفق الكهربى الكلى خلال أى سطح مغلق يساوى الشحنة المحصورة .

ولتوضيح تطبيق قانون جاوس ، دعنا نحقق نتائج تجربة « فاراداي » بوضع شحنة نقطية Q عند نقطة الأصل فى نظام إحداثيات كروى ، وباختيار سطحنا المغلق ككرة نصف قطرها a . ولقد وجدنا أن شدة المجال الكهربى للشحنة النقطية هى

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} \quad \text{وحيث أن}$$

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \mathbf{a}_r \quad \text{فعدنا ، كما سبق ،}$$



شكل ٣-٢ تطبيق قانون جاوس على مجال شحنة نقطية Q على سطح كروى مغلق نصف قطره a . \mathbf{D} فى كل موضع عمودية على السطح الكروى ولها قيمة ثابتة عند كل نقطة عليه .

عند سطح الكرة ،

$$D_S = \frac{Q}{4\pi a^2} a_r$$

والمصدر التفاضلي للمساحة على سطح كروي هو ، في الإحداثيات الكروية من الفصل الأول ،

$$dS = r^2 \sin \theta \, d\phi \, d\theta = a^2 \sin \theta \, d\phi \, d\theta$$

$$dS = a^2 \sin \theta \, d\phi \, d\theta \, a_r \quad \text{أو}$$

$$D_S \cdot dS = \frac{Q}{4\pi a^2} a^2 \sin \theta \, d\phi \, d\theta \, a_r \cdot a_r = \frac{Q}{4\pi} \sin \theta \, d\phi \, d\theta \quad \text{والمكامل هو}$$

مؤديا إلى التكامل السطحي المغلق

$$\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \frac{Q}{4\pi} \sin \theta \, d\phi \, d\theta$$

وقد اختيرت النهايات على التكامل لكي يعمل التكامل على كل سطح الكرة مرة واحدة^(١) . ويعطى التكامل

$$\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \frac{Q}{4\pi} \sin \theta \, 2\pi \, d\theta = \frac{Q}{2} (-\cos \theta) \Big|_0^\pi = Q$$

ونحصل على نتيجة تبين أن Q كولوم من التدفق الكهربى تعبر السطح ، كما يجب ، حيث أن الشحنة المحصورة هي Q كولوم .

يحتوى القسم التالى أمثلة لتطبيق قانون جاوس على مسائل ذات تماثل هندسى بسيط ، وذلك بغرض إيجاد شدة المجال الكهربى .

ت ٣ - ٣ - احسب التدفق الكهربى الكلى الخارج من السطح الاسطوانى $\rho = 4.5$ و $z = \pm 3.5$ إذا كان تشكيل الشحنة : (أ) $2C$ شحنات نقطية على المحور x عند $x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (ب) خط شحنة على المحور x ، $\rho_L = 2 \cos 0.1x \, C/m$ ، (ج) شحنة سطحية ، $\rho_s = 0.1\rho^2 C/m^2$ ، على المستوى $z = 0$.

(١) لاحظ أنه إذا غطت كل من θ و ϕ المدى من 0 إلى 2π فإن السطح الكروي يغطى مرتين .

الإجابة : 64.4C, 17.40C, 18.00 .

ت ٣ - ٤ - أوجد الشحنة الكلية الواقعة داخل الكرة $r = 2$ إذا كانت D تساوى (أ) a/r^2 ،
(ب) a/r ، (ج) $a_0 [(\cos \theta) r] + [(\cos \theta) (\ln r)] r$.

الإجابة : 19.74C; 25.1C ; 12.57C

٣ - ٣ - تطبيق قانون جاوس :

بعض التوزيعات المتماثلة للشحنة :

دعنا الآن نعتبر كيف يمكننا استخدام قانون جاوس (٣ - ٢٢)

$$Q = \int_S D_S \cdot dS$$

لتعيين D_S إذا كان توزيع الشحنة معروفا . وهذا مثال لمعادلة تكاملية تظهر فيها الكمية المجهولة المطلوب تعيينها داخل التكامل .

والحل سهل ، إذا استطعنا أن نختار سطحاً مغلقاً يحقق شرطين :

١ - D_S في كل موضع إما عمودية أو مماسة للسطح المغلق ، بحيث يصبح $D_S \cdot dS$ إما dS أو صفراً ، بالترتيب .

٢ - على ذلك الجزء من السطح المغلق الذى عليه $D_S \cdot dS$ ليست صفراً ، يكون $D_S = \text{ثابت}$.

ويتيح لنا هذا أن نستبدل ضرب المقاييسات D_S و dS بالضرب بالنقطة . وأن نخرج حينئذ D_S خارج علامة التكامل . ويكون التكامل المتبقى هو dS و K على ذلك الجزء من السطح المغلق الذى تعبّر D_S عمودياً ، وهذا ببساطة هو مساحة هذا القسم من ذلك السطح .

ومعرفة تماثل المسألة « فقط » يمكننا من اختيار مثل هذا السطح المغلق ، وهذه المعرفة يمكن بسهولة الحصول عليها بتذكر أن شدة المجال الكهربى بسبب شحنة نقطية موجبة توجه نصف قطرياً خارجة من الشحنة النقطية .

دعنا نعتبر مرة أخرى شحنة نقطية Q عند نقطة الأصل فى نظام إحداثيات كروى ونستقر على سطح مغلق مناسب الذى سيحقق المطالبين المدرجين آنفاً . وواضح أن السطح المطلوب هو سطح كروى ، ممرّز عند نقطة الأصل وله « أى نصف قطر » r . D_S فى كل موضع عمودية على السطح ، D_S لها نفس القيمة عند كل نقط السطح .

وعلى ذلك فلدينا بالترتيب ،

$$\begin{aligned} Q &= \int_S \mathbf{D}_S \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{sph}} D_S dS \\ &= D_S \int_{\text{sph}} dS = D_S \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} r^2 \sin \theta d\theta d\phi \\ &= 4\pi r^2 D_S \end{aligned}$$

ومن ثم

$$D_S = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

لأن r قد يكون لها أى قيمة ولأن D_S موجهة نصف قطريا للخارج

$$\boxed{\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \mathbf{a}_r \quad \mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r}$$

والتي تتفق مع نتائج الفصل الثانى . والمثال لم يصف شيئا ، ويمكن أن يثار الاعتراض أنه كان علينا أن نعرف أن المجال متماثل ونوجه نصف قطريا للخارج قبل أن نتمكن من الحصول على إجابة . هذا صحيح ، وذلك يدع علاقة التربيع العكسى على أنه التحقيق الوحيد الذى حُصل عليه من قانون جاوس . مع ذلك فقد خدم المثال توضيح طريقة يمكن تطبيقها على مسائل أخرى ، متضمنة عديدة ، مما لا يقدر قانون كولوم فى الغالب تقديم إجابة لها .

هل هناك أى أسطح أخرى يمكن أن تحقق شرطينا ؟ . يجب على الطالب أن يقرر أن أسطحا سهلة مثل المكعب والاسطوانة لا تحقق المطلوبات .

وكمثال ثان ، دعنا نعتبر مرة أخرى توزيع خط الشحنة المنتظم ρ_L الواقع على طول المحور z والممتد من $-\infty$ إلى $+\infty$. ويجب علينا أولا أن نحصل على معلومات عن تماثل المجال ، وقد نستطيع أن نعتبر هذه المعلومات كاملة عندما تكون الاجابة على السؤالين التاليين معروفة :

- ١- مع أى إحداثيات يتغير المجال (أو فى أى المتغيرات تكون D دالة) ؟
- ٢- أى مركبات D موجودة ؟

ونفس السؤالين طرحا عندما استخدمنا قانون كولوم لحل هذه المسألة فى قسم ٢- .
 • . وحينذاك وجدنا أن المعرفة التى حصل عليها من إجابتهما مكتتا من عمل تكامل أسهل بكثير . وكان يمكن أن نُحل المسألة (وقد كان) بدون أخذ أى تماثل فى الاعتبار ولكن ذلك كان أكثر صعوبة .

على أنه عند استخدام قانون جاوس ، يظهر أنها ليست مسألة استخدام التماثل لتبسيط الحل ، لأن تطبيق قانون جاوس يعتمد على التماثل ، وإذا لم نستطع أن نبين أن التماثل موجود فإننا لا نستطيع استخدام قانون جاوس للحصول على حل . ولذا يصبح السؤالان « حتميين » .

ومن مناقشتنا السابقة لخط الشحنة المنتظم ، يتضح أن المركبة نصف القطرية لـ D هي الوحيدة الموجودة ، أو

$$D = D_\rho a_\rho$$

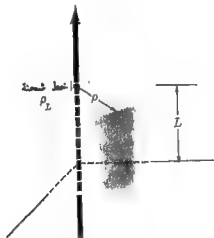
وهذه المركبة دالة في ρ فقط ،

$$D_\rho = f(\rho)$$

والآن يكون اختيار سطح مغلق أمرا بسيطا ، لأن السطح الاسطوانى هو السطح الوحيد الذى تتعامد عليه D_ρ فى كل موضع ، ويمكن أن يغلق بأسطح مستوية عمودية على المحور z . وبين شكل ٣ - ٤ سطح اسطوانى دائريا قائما نصف قطره ρ ممتدا من $z = 0$ إلى $z = L$.

ويتطبيق قانون جاوس :

$$\begin{aligned} Q &= \oint_{\text{دائرى}} D_S \cdot dS = D_S \int_{\text{جوانب}} dS + 0 \int_{\text{قاع}} dS + 0 \int_{\text{قاع}} dS \\ &= D_S \int_{z=0}^L \int_{\phi=0}^{2\pi} \rho d\phi dz = D_S 2\pi \rho L \end{aligned}$$



شكل ٣ - ٤ : السطح الجاوسى لخط شحنة لانتهائى هو اسطوانة دائرية قائمة طولها L نصف قطرها D, ρ ثابتة فى المقدار وتتعامد فى كل موضع على السطح الاسطوانى ، D توازى اوجه النهايات .

فنحصل على

$$D_S = D_p = \frac{Q}{2\pi\rho L}$$

وبدلالة كثافة الشحنة ρ_L تكون الشحنة الكلية المحصورة

$$Q = \rho_L L$$

$$D_p = \frac{\rho_L}{2\pi\rho}$$

معطية

أو

$$E_p = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho}$$

توضح المقارنة مع قسم ٢-٥ ، المعادلة (١٩) ، أن النتيجة الصحيحة قد حصل عليها بمجهود أقل بكثير . وبمجرد اختيار السطح المناسب ، يزول التكامل عادة الى كتابة مساحة السطح الذي تكون D متعامدة عليه .

..



شكل ٣-٥ الاسطوانتان الموصلتان المتحدتي المحور المكونتان لكل محورى تعطيان كثافة تدفق كهربي لها بين الاسطوانتين معطى بـ $D_p = \rho_p / \rho$

ومسألة الكبل المحورى متطابقة تقريبا مع تلك التى لخط الشحنة ، وهى مثال يصعب حله للغاية من وجهة نظر قانون كولوم . افترض أن لدينا موصلين اسطوانتيين متحدتي المحور ، الداخلى نصف قطره a والخارجى نصف قطره b ، وكلاهما لانهائى الامتداد (شكل ٣-٥) . وسنفترض توزيع شحنة ρ على السطح الخارجى للموصل الداخلى .

وتبين لنا اعتبارات التماثل أن المركبة D_p فقط هي الموجودة وأنها يمكن أن تكون دالة في ρ فقط . ولذا فإن اسطوانة دائرية قائمة طولها L ونصف قطرها ρ ، حيث $a < \rho < b$ ، تختار بالضرورة لتكون السطح الجاوسى ، ومباشرة نحصل على

$$Q = D_S 2\pi\rho L$$

والشحنة الكلية على طول L من الموصل الداخلى هي

$$Q = \int_{z=0}^L \int_{\phi=0}^{2\pi} \rho_S a \, d\phi \, dz = 2\pi a L \rho_S$$

ومن هنا نحصل على

$$D_S = \frac{a\rho_S}{\rho} \quad D = \frac{a\rho_S}{\rho} a_p \quad (a < \rho < b)$$

ويمكن التعبير عن هذه النتيجة بدلالة الشحنة لكل وحدة أطوال ، لأن الموصل الداخلى له $2\pi a \rho_S$ كولوم على طول متر ، ولهذا يحصل $\rho_L = 2\pi a \rho_S$

$$D = \frac{\rho_L}{2\pi\rho} a_p$$

والحل له صورة مطابقة لتلك التى لخط شحنة لانهاى .

وننتجنا مقيدة أيضا فى حالة كبل محورى محدود الطول ، ومفتوح عند النهايتين ، بشرط أن يكون الطول L أكبر مرات عديدة من نصف القطر b بحيث لا تؤثر الظروف غير المتماثلة عند النهايتين بوضوح على الحل . ويطلق على مثل هذا الجهاز « المكثف المحورى » . وسيظهر كل من الكبل المحورى ، والمكثف المحورى كثيرا فى العمل الذى يلى .

ولأن كل خط تدفق كهربي يبدأ من الشحنة على الاسطوانة الداخلية يجب أن ينتهى على شحنة عكسية على السطح الداخلى للأسطوانة الخارجية ، فإن الشحنة الكلية على ذلك السطح يجب أن تكون

$$Q_{\text{outer cyl}} = -2\pi a L \rho_{S, \text{inner cyl}}$$

والشحنة السطحية على الاسطوانة الخارجية نجد أنها

$$2\pi b L \rho_{S, \text{outer cyl}} = -2\pi a L \rho_{S, \text{inner cyl}}$$

أو

$$\rho_{S, \text{outer cyl}} = -\frac{a}{b} \rho_{S, \text{inner cyl}}$$

ماذا سيحدث إذا استخدمنا اسطوانة نصف قطرها ρ ، $\rho > b$ ، كسطح جاوسى ؟
عندئذ ستصبح الشحنة الكلية المحصورة صفرا ، لأن هناك شحنات متساوية ومتضادة
على الاسطوانتين الموصلتين . على ذلك

$$0 = D_S 2\pi\rho L \quad (\rho > b)$$

$$D_S = 0 \quad (\rho > b)$$

ويمكن الحصول على نتيجة مطابقة بالنسبة لـ $\rho < a$ وهكذا فإن كابل أو المكثف
المحورى ليس له مجال خارجى (لقد أثبتنا أن الموصل الخارجى هو « درع ») وأنه
لا يوجد هناك مجال داخل الموصل المركزى .

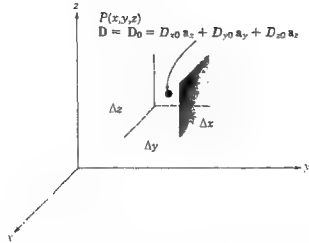
ت ٣ - ٥ - الأسطح الكروية r تساوى 2 ، 4 و 6m تحمل كثافات شحنة سطحية مقاديرها
30 ، 100 و $6\mu\text{C}/\text{m}^2$ بالترتيب . أوجد $|D|$ عند r تساوى : (أ) 1m ، (ب) 3m ،
(ج) 5m ، (د) 8m .

الاجابة : $0\mu\text{C}/\text{m}^2$; $44.4\mu\text{C}/\text{m}^2$; $3.20\mu\text{C}/\text{m}^2$; $2.12\mu\text{C}/\text{m}^2$.

٣ - ٤ - تطبيق قانون جاوس .

عنصر حجم تفاضلى

سنطبق الآن قانون جاوس لنوع مختلف قليلا من المسائل - وهو ليس له أى تماثل
على الإطلاق . وعند النظرة الأولى قد يبدو أن هذه الحالة لاأمل فيها ، لأنه بدون تماثل
لايمكن اختيار سطح جاوسى بسيط بحيث تكون المركبة العمودية لـ D ثابتة ، أو صفرا
فى كل موضع على السطح ويدون مثل هذا السطح ، لايمكن إيجاد قيمة التكاملى .
وهناك طريق واحد لتخطى هذه الصعاب وهو أن نختار سطحا مغلقا صغيرا جدا بحيث
تكون D ثابتة تقريبا على السطح ، ويمكن للتغير البسيط فى D أن يُمثل بقدر كاف
باستخدام الحددين الأولين لمفكوك متسلسلة تيلور (Taylor's series) بالنسبة لـ D .
وستصبح النتيجة أكثر قُرْبا من الصحة كلما نقص الحجم المحصور داخل السطح
الجاوسى ، ونهدف فى النهاية بأن نسمح لهذا الحجم أن يؤول الى الصفر .



شكل ٣-٦ سطح تفاضلي - الحجم حول النقطة P مستخدم لبحث معدل التغير الفراغي لـ D بجوار P

ويختلف هذا المثال أيضا عن سابقه في أننا سوف لانحصل على قيمة D كإجابة لنا ، ولكن بدلا من ذلك نحصل على معلومات بالغة القيمة عن طريق تغير D في منطقة سطحنا الصغير . وهذا يؤدي مباشرة الى احدى معادلات ماكسويل (Maxwell's equations) الأربع التي هي أساسية لكل النظرية الكهرومغناطيسية .

دعنا نعتبر أن نقطة P ، مبيّنة في شكل ٣-٦ ، معينة الوضع بنظام إحداثيات كرتيزي . وقيمة D عند النقطة P يمكن التعبير عنها في المركبات الكرتيزية :
 $D_0 = D_x a_x + D_y a_y + D_z a_z$. ونختار لسطحنا المغلق الصندوق الصغير ، المتعامد ، مركز عند P ، وله أضلاع أطوالها Δx ، Δy و Δz ، ونطبق قانون جاوس ،

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q$$

ولكى نوجد قيمة التكامل على السطح المغلق ، يجب أن يقسم التكامل إلى ستة تكاملات واحدا لكل وجه ،

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{front}} + \int_{\text{back}} + \int_{\text{left}} + \int_{\text{right}} + \int_{\text{top}} + \int_{\text{bottom}}$$

ونسنبر أولها بالتفصيل . حيث أن العنصر السطحي صغير جدا فان D تكون ثابتة أساسا (على هذا الجزء من السطح الكلي المغلق) و

$$\begin{aligned} \int_{\text{front}} &\approx D_{\text{front}} \cdot \Delta S_{\text{front}} \\ &\approx D_{\text{front}} \cdot \Delta y \Delta z a_x \\ &\approx D_{x, \text{front}} \Delta y \Delta z \end{aligned}$$

حيث علينا فقط أن نقرب قيمة D_x عند وجه المقلدة هذا . ووجه المقلدة يكون على مسافة $\Delta x / 2$ من P ، ولهذا

$$D_{x, \text{front}} \doteq D_{x0} + \frac{\Delta x}{2} \times \text{rate of change of } D_x \text{ with } x$$

$$\doteq D_{x0} + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial D_x}{\partial x}$$

حيث D_{x0} هي قيمة D_x عند P وحيث يجب أن نستخدم التفاضل الجزئي لتعبر عن معدل التغير (rate of change) مع x ، حيث أن D_x عامة تتغير أيضا مع y و z . وكان يمكن الحصول على هذا التعبير بطريقة منهجية أكثر باستخدام الحد الثابت والحد المحتوى على المشتقة الأولى في مفكوك متسلسلة تايلور لـ D_x بجوار P لدينا الآن

$$\int_{\text{front}} \doteq \left(D_{x0} + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial D_x}{\partial x} \right) \Delta y \Delta z$$

ونعتبر الآن التكامل على الوجه الخلفي ،

$$\int_{\text{back}} \doteq D_{\text{back}} \cdot \Delta S_{\text{back}}$$

$$\doteq D_{\text{back}} \cdot (-\Delta y \Delta z a_x)$$

$$\doteq -D_{x, \text{back}} \Delta y \Delta z$$

و

$$\int_{\text{back}} \doteq \left(-D_{x0} + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial D_x}{\partial x} \right) \Delta y \Delta z$$

معطية

$$D_{x, \text{back}} \doteq D_{x0} - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial D_x}{\partial x}$$

فاذا جمعنا هذين التكاملين ، يكون لدينا

$$\int_{\text{front}} + \int_{\text{back}} \doteq \frac{\partial D_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z$$

وبنفس الأسلوب تماما ، نجد أن

$$\int_{\text{right}} + \int_{\text{left}} \doteq \frac{\partial D_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z$$

و

$$\int_{\text{top}} + \int_{\text{bottom}} \doteq \frac{\partial D_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z$$

ويمكن جمع هذه النتائج لتعطي

$$\int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z$$

أو

$$(V) \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q = \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \Delta v$$

والتعبير هو تقريب يصبح أحسن كلما تصبح Δv أصغر ، وفي القسم التالي سندع الحجم Δv يقترب من الصفر . وحاليا ، قد طبقنا قانون جاوس على السطح المغلق المحيط بعنصر الحجم Δv وكنتيجة حصلنا على التقريب (V) الذي ينص على

$$(A) \quad \boxed{\begin{array}{l} \text{الشحنة المحتواة في الحجم } \Delta v \\ = \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \times \Delta v \end{array}}$$

وكمثال ، إذا كانت $\mathbf{D} = e^{-x} \sin y \mathbf{a}_x - e^{-x} \cos y \mathbf{a}_y + 2x \mathbf{a}_z$ ، فأننا نرى أن

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} = -e^{-x} \sin y$$

$$\frac{\partial D_y}{\partial y} = e^{-x} \sin y$$

$$\frac{\partial D_z}{\partial z} = 2$$

ويجمع هذه الحدود عند نقطة الأصل ، مثلا ، نجد ان الشحنة المحصورة في عنصر حجم صغير هناك يجب أن تقرب من $2\Delta v$. فإذا كان Δv هو 10^{-9} m^3 فان لدينا شحنة محصورة مقدارها 2 nC تقريبا .

ت ٣ - ٦ - د ع

$$\mathbf{D} = \frac{100xy}{z^2 + 1} \mathbf{a}_x + \frac{50x^2}{z^2 + 1} \mathbf{a}_y - \frac{100x^2yz}{(z^2 + 1)^2} \mathbf{a}_z \quad \text{C/m}^2$$

واحسب الشحنة الكلية المحصورة في كرة دقيقة نصف قطرها $1 \mu\text{m}$ ومركزها عند : (أ) $(5, 8, 1)$ ، (ب) $(0, 10, -2)$.

الاجابة : $2.26 \times 10^{-14} \text{ C}$, $8.38 \times 10^{-6} \text{ C}$.

٣-٥ - الانفراج :

سنحصل الآن على علاقة مضبوطة من (٧) ، بأن نسمح لعنصر الحجم Δv بأن يتقلص إلى الصفر . ونكتب هذه المعادلة كمايلي :

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \frac{\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v} = \frac{Q}{\Delta v}$$

أو ، كنهاية

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{Q}{\Delta v}$$

حيث استبدل التقريب بالتساوى . ومن الواضح أن الحد الأخير هو كثافة الشحنة الحجمية ρ ، ولهذا فإن

$$(٩) \quad \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v} = \rho$$

تحتوى هذه المعادلة على معلومات أكثر من أن تناقش جميعها فى التو ، وسنكتبها كمعادلتين منفصلتين

$$(١٠) \quad \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v}$$

و

$$(١١) \quad \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho$$

وسنحتفظ بـ (١١) لنتعتبر فى القسم التالى .

لا تتضمن المعادلة (١٠) كثافة شحنة ، وكان يمكن استخدام طرق القسم السابق على أى متجه A لإيجاد $\oint A \cdot d\mathbf{S}$ لسطح مغلق صغير ، مؤدية الى

$$(١٢) \quad \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v}$$

حيث A يمكن أن تمثل سرعة ، تدرج درجة حرارة ، قوة أو أى مجال متجه آخر .

ولقد ظهرت هذه العملية كثيرا فى البحوث الفيزيائية فى القرن الماضى التى لقيت أسما وصفيا « الانفراج » (Divergence) . ويعرف انفراج A بأنه

$$(١٣) \quad \text{Divergence of } A = \text{div } A = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v}$$

ويختصر عادة $\text{div } A$ ويمكن الحصول على شرح المعنى الفيزيائي لانفراج متجه بشرح العملية المتضمنة في الطرف الأيمن لـ (١٣) بعناية ، حيث سنعتبر A كعضو في عائلة كثافة تدفق المتجهات لكي تساعد التفسير الفيزيائي .

« انفراج متجه كثافة التدفق A هو الانسياب الخارجى للتدفق من سطح مغلق صغير لكل وحدة حجم عندما يقلص الحجم الى الصفر »

والشرح للمعنى الفيزيائي للانفراج والذي أمكن بهذه الصيغة غالبا ما يكون مفيدا في الحصول على معلومات كيفية عن انفراج مجال متجه بدون اللجوء إلى استقصاء رياضى . فمثلا دعنا نعتبر انفراج سرعة الماء في حوض استحمام - بعد أن فُتحت البالوعة - التدفق الصافى للماء خلال أى سطح مغلق واقع كُلية داخل الماء يجب أن يكون صفرا ، حيث أن الماء أساسا لا يمكن ضغطه ، والماء الداخلى والخارج لمناطق مختلفة من السطح المغلق يجب أن يكون متساويا . ولهذا فان انفراج هذه السرعة يساوى صفرا .

على أنه ، إذا اعتبرنا سرعة الهواء فى أنبوية داخلية والتي تُقبت لتوها بمسمار ، فنحن نذكر حقيقة أن الهواء يتمدد كلما انخفض الضغط ، ويكون هناك بالتبعية صافى تدفق من أى سطح مغلق واقع داخل الأنبوية الداخلية . ولذلك فان إنفراج هذه السرعة يكون أكبر من الصفر .

والانفراج الموجب لاي كمية متجهة يدل على منبع لتلك الكمية المتجهة عند تلك النقطة وبالمثل ، الانفراج السالب يدل على البالوعة . لأن إنفراج سرعة الماء آنفا هو صفر ، فانه لا يوجد منبع أو بالوعة^(١) .

ولكن الهواء المتمدد يُنتج انفراجا موجبا للسرعة ، ويمكن اعتبار كل نقطة داخلية كمنبع . وكتابة (١٠) بمصطلحنا الجديد ، نحصل على

$$(14) \quad \text{div } \mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

وهذا التعبير هو مرة أخرى فى صورة لاتشتمل على كثافة الشحنة . وهو نتيجة لتطبيق تعريف الانفراج (١٣) على عنصر حجم تفاضلى فى الاحداثيات الكرتيزية .

وإذا اخترت وحدة حجم تفاضلية $pd \, pd\phi \, dz$ فى الاحداثيات الاسطوانية ، أو $r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$ فى الاحداثيات الكروية لحصل على تعبيرات للانفراج متضمنة

(١) باختيارنا لعنصر حجم فى الماء ، فان النقص التدريجى لمستوى الماء مع الزمن سوف يسبب فى النهاية أن يقع عنصر الحجم فوق سطح الماء . وفى اللحظة التى يتقاطع فيها سطح الماء مع عنصر الحجم يكون الانفراج موجبا ويكون الحجم الصغير متبعا . وهذا التطبيق قد تجنبناه فيما سبق بتعيين نقطة داخلية .

مركبات المتجه في نظام الإحداثيات الخاص بها متضمنة تفاضلات جزئية بالنسبة لمتغيرات هذا النظام . وهذه التعبيرات محصورة عليها في الملحق «أ» ومعطاة هنا للتيسير

$$(١٥) \quad \text{div } \mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \quad (\text{cartesian})$$

$$(١٦) \quad \text{div } \mathbf{D} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho D_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \quad (\text{cylindrical})$$

$$(١٧) \quad \text{div } \mathbf{D} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 D_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta D_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} \quad (\text{spherical})$$

وهذه العلاقات مبينة أيضا بداخل غلاف الظاهر لسهولة الرجوع إليها .

ويجب ملاحظة أن الانفراج عملية تؤدي على متجه ، ولكن النتيجة كمية مقياسية . ويجب أن نتذكر بطريقة مماثلة بعض الشيء أن الضرب بالنقطة ، أو الضرب المقياسي ، كان ضربا لمتجهين وأدى لنتيجة مقياسية .

لسبب ما ، إنه لخطأ شائع عند مقابلة الانفراج للمرة الأولى أن تضيف صفة اتجاهية للعملية ببعثرة وحدات متجهات مع المشتقات الجزئية . مجرد ما يقوله لنا الانفراج كم من التدفق يكون تاركا لحجم صغير ، وذلك لكل وحدة حجم ، وليس هناك إتجاه مرتبط به .

ت ٣ - ٧ - أحسب الانفراج لكل من المجالات المعطاة عند النقطة المبينة :

$$P_C (2, 1/2\pi, 1/2\pi) \text{ (ج) } , P_B (1, 1/2\pi, 3) \text{ (ب) } , P_A (1, 2, 3) \text{ (أ) }$$

$$\text{الاجابة : } 0.0767 \text{C/m}^3 , 0 , 988 \text{C/m}^3$$

٣ - ٦ - معادلة ماكسويل الأولى (كهروستاتيكية)

ونود الآن أن ندعم مكاسب القسمين الأخيرين ونقدم شرحا لمعنى عملية « الانفراج » كما يرتبط بكثافة التدفق الكهربى . والتعبيرات الظاهرة هناك يمكن كتابتها

$$(١٨) \quad \text{div } \mathbf{D} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v}$$

$$(١٩) \quad \text{div } \mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

$$(٢٠) \quad \text{div } \mathbf{D} = \rho$$

بالصور والمعادلة الأولى هي تعريف الانفراج ، والثانية هي نتيجة تطبيق التعريف على عنصر حجم تفاضلي في الاحداثيات الكرتيزية معطية لنا معادلة يمكن بها ايجاد قيمة انفراج متجه معبر عنه في الاحداثيات الكرتيزية ، والثالثة هي مجرد (١١) مكتوبة باستخدام المصطلح الجديد $\text{div } D$. المعادلة (٢٠) هي تقريبا نتيجة واضحة اذا كنا قد حققنا أى ألفة مع مفهوم الانفراج كما هو معرف بـ (١٨) ، لقانون جاوس معطى ،

$$\oint_S D \cdot dS = Q$$

فلكل وحدة حجم.

$$\frac{\oint_S D \cdot dS}{\Delta v} = \frac{Q}{\Delta v}$$

ويتقلص الحجم الى الصفر ،

$$\lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\int_S D \cdot dS}{\Delta v} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{Q}{\Delta v}$$

سوف نرى $\text{div } D$ على اليسار وكثافة الشحنة الحجمية على اليمين ،

(٢٠)

$$\boxed{\text{div } D = \rho}$$

وهذه أولى معادلات ماكسويل الأربع ، كما تطبق على الكهروستاتيكية والمجالات المغناطيسية الثابتة . وهى تقرر أن التدفق الكهربى لكل وحدة حجم التارك لوحدة حجمية متناهية الصغر يساوى بالضبط كثافة الشحنة الحجمية هناك . وهذه المعادلة حرة بتسميتها الصورة النقطية لقانون جاوس . وقانون جاوس يربط التدفق التارك لى سطح مغلق بالشحنة المحصورة ، ومعادلة ماكسويل الأولى تصنع نصا مطابقا على أساس « لكل وحدة حجم لحجم متناهى الصغر » ، أى عند نقطة . ويتذكر أن الانفراج يمكن أن يعبر عنه كمجموع ثلاثة تفاضلات جزئية ، فان معادلة ماكسويل الأولى توصف أيضا بأنها صورة المعادلة التفاضلية لقانون جاوس ، وبالعكس فان قانون جاوس عُرف بأنه « الصورة التكاملية لمعادلة ماكسويل الأولى » .

وتتوضيح معين ، نعتبر انفراج D كيفيا فى منطقة حول خط شحنة (ولكن ليس على خط الشحنة) . فى أى حيز صغير يدخل قدر من خطوط التدفق الكهربى السطح بقدر تركها له ، حيث أنه لا توجد شحنة داخل الحيز يمكن أن يحيط عليها خط تدفق ، ويجب أن يكون انفراج D صفرا . عند كل نقطة فى الفضاء المحيط بهذا الخط من الشحنة المعزول $\text{div } D = 0$. (إذا اختيرت نقطة على خط الشحنة نفسه نجد $\text{div } D$

لانهائية لأن كثافة الشحنة الحجمية لانهائية ، أى أن ، خط الشحنة يعطى كمية محدودة من الشحنة ولكن لها حجم صفري) . والاثبات الرياضى البسيط أن الانفراج صفر هو جزء من المسألة رقم ٢٥ .

وليست عملية الانفراج مقصورة على كثافة التدفق الكهربى ، بل يمكن تطبيقها على أى مجال متجه . وسنطبقها على مجالات كهرومغناطيسية عديدة أخرى فى الفصول التالية .

ت ٣ = ٨ - أوجد تعبيراً لكثافة الشحنة الحجمية التى توجد المجالات :

$$D = e^{-2z}(2\rho\phi a_\rho + \rho a_\phi - 2\rho^2\phi a_z)(ب) \quad D = e^{4x}e^{-5y}e^{-2z}(2a_x - 2.5a_y - a_z) \quad (1)$$

$$D = 2r \sin \theta \sin \phi a_\rho + (1/r + r) \cos \theta \sin \phi a_\phi + (1/r + r) \cos \phi a_z \quad (ج)$$

الاجابة : $2\sin\theta\sin \phi (2 - 1/r^2) , 4\phi e^{-2z} (\rho^2 + 1) , 22.5e^{4x}e^{-5y}e^{-2z}$

٣ - ٧ - العامل المتجه ∇ ونظرية الانفراج :

إذا ذكرنا أنفسنا مرة أخرى أن الانفراج هو عملية على متجه تعطى نتيجة مقياسية ، مثلما يعطى الضرب بالنقطة لمتجهين نتيجة مقياسية ، فانه يبدو ممكناً أن نجد شيئاً يمكن معاملته منهجياً بالنقطة مع D ليعطى المقياسى

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

ومن الواضح ، هذا لايمكن أن يتحقق باستخدام الضرب المقياسى ، الطريقة يجب أن تكون عملية نقطية .

وبهذا فى ذهننا نعرف العامل « دل » (del operator) ∇ كاملاً متجه ،

$$(٢٢) \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial x} a_x + \frac{\partial}{\partial y} a_y + \frac{\partial}{\partial z} a_z$$

تظهر عوامل مقياسية مماثلة فى طرق عدة لحل المعادلات التفاضلية حيث كثيراً ما ندع D تحل محل d/dx ، D^2 تحل محل d^2/dx^2 وهكذا^(١) . نتفق على تعريف ∇ (ونطبق دل) بأنها تعامل دائماً كمتجه عادى مع الاستثناء الوحيد الهام أن تنتج مشتقات جزئية بدلاً من حواصل ضرب لمقياسيات .

(١) العامل المقياسى D هذا ، الذى سوف لا يظهر مرة أخرى ، لا يجب أن يخلط مع كثافة التدفق الكهربى .

ونعتبر أن $\nabla \cdot \mathbf{D}$ تعنى

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \left(\frac{\partial}{\partial x} a_x + \frac{\partial}{\partial y} a_y + \frac{\partial}{\partial z} a_z \right) \cdot (D_x a_x + D_y a_y + D_z a_z)$$

سنعتبر أولاً حواصل الضرب المقياسية لوحداث المتجهات ، اسقاط الحدود الصفرية الستة يترك

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\partial}{\partial x} (D_x) + \frac{\partial}{\partial y} (D_y) + \frac{\partial}{\partial z} (D_z)$$

والآن عند إزالة الأقواس بالتأثير (operating) أو بالتفاضل :

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

وهذا معروف بأنه انفراج \mathbf{D} ، ولذلك فلدينا

$$\text{div } \mathbf{D} = \nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

واستخدام $\nabla \cdot \mathbf{D}$ سائداً أكثر جداً من $\text{div } \mathbf{D}$ مع أن كلا الاستعمالين لهما ميزتهما . فكتابة $\nabla \cdot \mathbf{D}$ تسمح لنا بالحصول على التفاضلات الجزئية الصحيحة بسهولة وسرعة ، ولكن فى الإحداثيات الكرتيزية فقط - كما سنرى فيما يأتى بعد - ومن ناحية أخرى $\text{div } \mathbf{D}$ مذكر ممتاز لشرح المعنى الفيزيائى للانفراج . وسنستخدم التدوين بالعامل $\nabla \cdot \mathbf{D}$ من الآن فصاعداً للدلالة على عملية الانفراج .

والعامل المتجه ∇ لا يستخدم فقط مع الانفراج ، ولكن سيظهر فى عديد من العمليات الهامة فيما بعد . وأحداهما هو ∇u ، حيث u أى كمية مقياسية ، ويؤدى الى

$$\nabla u = \left(\frac{\partial}{\partial x} a_x + \frac{\partial}{\partial y} a_y + \frac{\partial}{\partial z} a_z \right) u = \frac{\partial u}{\partial x} a_x + \frac{\partial u}{\partial y} a_y + \frac{\partial u}{\partial z} a_z$$

والعامل ∇ ليس له صورة معينة فى نظم الاحداثيات الأخرى . وإذا كنا نعتبر فى الاحداثيات الأسطوانية ، فإن $\nabla \cdot \mathbf{D}$ مازالت تدل على انفراج \mathbf{D} ، أو

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho D_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

حيث أخذ هذا التعبير من القسم ٣ - ٥ . وليس لدينا صورة ∇ نفسها لتساعدنا فى إيجاد هذا المجموع من التفاضلات الجزئية . وهذا يعنى أن ∇u ، الذى مازال غير مسمى ،

ولكنه مكتوب بسهولة آنفأ في الاحداثيات الكرتيزية ، لايمكن ان نغير عنه حاليا في الاحداثيات الأسطوانية . ولكن مثل هذا التعبير سنحصل عليه عندما نعرف ∇u في الفصل الرابع .

وستنتهى مناقشتنا للانفراج بتقديم نظرية سوف نحتاج اليها عدة مرات في فصول لاحقة ، وهى نظرية الانفراج (divergence theorem) وهذه النظرية تطبق على أى مجال متجه توجد فيه التفاضلات الجزئية الخاصة به ، مع أن أسهلها لنا أن نظهرها بالنسبة لكثافة التدفق الكهربى . ولقد حصلنا عليها فعلا ، وعلينا الآن عمل أكثر قليلا من إظهارها وتسميتها ، مُبتدأ من قانون جاوس ،

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q$$

وداعيا

$$Q = \int_{vol} \rho dv$$



شكل ٧-٣ . تنص نظرية الانفراج على أن التدفق الكلى المابى للسطح المغلق يساوى تكامل انفراج كثافة التدفق فى كل نطق الحجم المحصور . والحجم ميبين هنا بقطاع عرضى .

ثم مستبدلا ρ بما تساويه ،

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

نحصل على

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q = \int_{vol} \rho dv = \int_{vol} \nabla \cdot \mathbf{D} dv$$

التعبيران الاول والاخير ، يكونان نظرية الانفراج

$$(23) \quad \boxed{\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_{vol} \nabla \cdot \mathbf{D} dv}$$

والتى يمكن أن تُذكر كما يلى :

« تكامل المركبة العمودية لأي مجال متجه على سطح مغلق يساوى تكامل انفراج هذا المجال المتجه فى كل نقط الحجم المحصور بالسطح المغلق »

ومرة أخرى : نؤكد أن نظرية الانفراج صحيحة لأي مجال متجه ، مع أننا حصلنا عليها بالتحديد بالنسبة لكثافة المجال الكهربى D ، وستتاح لنا فرصة - فيما بعد - لتطبيقها على مجالات مختلفة عديدة . وتستمد فوائدها من الحقيقة أنها تربط تكاملا ثلاثيا فى كل نقط حجم ما بتكامل ثنائى على سطح ذلك الحجم . وعلى سبيل المثال : فانه من الأسهل جدا أن نبحث عن التسرب فى قنينة مليئة بسائل فائر بفحص السطح عن أن نحسب السرعة عند كل نقطة داخلية .

وتصبح نظرية الانفراج واضحة فيزيائيا ، إذا اعتبرنا حجما V ، مبينا مقطعه العرضى فى شكل ٣-٧ ، محاطا بسطح مغلق S . بتقسيم الحجم الى عدد من الحجرات الصغيرة ذات الحجم التفاضلى واعتبار خلية واحدة يوضح أن التدفق المنفرج من مثل هذه الخلية يدخل أو يتجمع عند ، الخلايا المجاورة ، إلا إذا اشتملت الخلية على جزء من السطح الخارجى . وبالتخيص ، انفراج كثافة التدفق فى كل نقط حجم يؤدي ، حينئذ ، إلى نفس النتيجة . كتعيين صافى التدفق العابر للسطح المحيط .

وكتحقيق بسيط على صحة هذه النظرية ، اعتبر المجال $D = 2xy\mathbf{a}_x + x^2\mathbf{a}_y$ ، وموازى السطوح القائم المكون بالمستويات $x = 0, 1$ ، $y = 0, 2$ ، $z = 0, 3$. وبايجاد قيمة التكامل السطحي أولا ، نلاحظ أن D موازى للأسطح عند $z = 0, 3$ ، ولذلك $D \cdot dS = 0$ هناك . وبالنسبة للأسطح الأربعة المتبقية لدينا

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} &= \int_0^3 \int_0^2 (\mathbf{D})_{x=0} \cdot (-dy dz \mathbf{a}_x) + \int_0^3 \int_0^2 (\mathbf{D})_{x=1} \cdot (dy dz \mathbf{a}_x) \\ &+ \int_0^3 \int_0^1 (\mathbf{D})_{y=0} \cdot (-dx dz \mathbf{a}_y) + \int_0^3 \int_0^1 (\mathbf{D})_{y=2} \cdot (dx dz \mathbf{a}_y) \\ &= - \int_0^3 \int_0^2 (D_x)_{x=0} dy dz + \int_0^3 \int_0^2 (D_x)_{x=1} dy dz \\ &- \int_0^3 \int_0^1 (D_y)_{y=0} dx dz + \int_0^3 \int_0^1 (D_y)_{y=2} dx dz \end{aligned}$$

على أن $(D_x)_{x=0} = (D_x)_{x=1} = (D_y)_{y=0} = (D_y)_{y=2} = 0$ ، الذى يترك فقط

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^3 \int_0^2 2y dy dz = \int_0^3 4dz = 12$$

ولأن

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\partial}{\partial x} (2xy) + \frac{\partial}{\partial y} (x^2) = 2y$$

يصبح التكامل الحجمي

$$\begin{aligned}\int_{vol} \nabla \cdot \mathbf{D} dv &= \int_0^3 \int_0^2 \int_0^1 2y dx dy dz = \int_0^3 \int_0^2 2y dy dz \\ &= \int_0^3 4dz = 12\end{aligned}$$

وبذلك يتم التحقق . ويتذكر قانون جاوس ، نرى أننا أيضا قد عينا شحنة كلية قدرها 12C واقعة داخل متوازي المستطيلات هذا .

ت ٣ - ٩ . أوجد قيمة كل من طرفي نظرية الانفراج للمجال :
 $G = 2\rho^2(\cos 5\phi a_\phi - \sin 5\phi a_\phi + a_z)$ ولحيث على شكل اسفين محدود
 بـ $0 \leq z \leq 10$, $0 \leq \phi \leq 0.1\pi$, $\rho \leq 5$. الاجابة : 333 , - 333

مراجع مقترحة :

1 - Plonsey, R. and R.E. collin: "Principles and Applications of Electromagnetic Fields", Mc Graw - Hill Book Company, New York, 1961,
 فإن مستوى هذا المرجع أعلى الى حد ما من المرجع الحالي ، ولكنه مرجع ممتاز للاطلاع بعد ذلك . ويظهر قانون جاوس في الفصل الثاني .

2 - Plonus, M.A.: "Applied Electromagnetics" Mc Graw - Hill Book Company, New York, 1978.

يحتوى هذا الكتاب على وصف تفصيلي لأجهزة عملية كثيرة التى توضح تطبيقات كهرومغناطيسية . وعلى سبيل المثال : طالع المناقشة عن التصوير الجاف (xerography) فى الصفحات 98 — 95 pp ك تطبيق كهروستاتيكي .

3 - Skilling, H.H.: "Fundamentals of Electric Waves", 2d ed., John Wiley & Sons. Inc., New York, 1948.

عمليات حساب التفاضل والتكامل للمتجهات موضحة جيدا وناقش الانفراج على صفحات 22 و 38 وقراءة الفصل الأول مرغوبة .

(أنظر المراجع المقترحة للفصل الأول) : G.B. و R.L Finney و Jr
 و Thomas - 4 نظرية الانفراج مقدمة وموضحة من وجهات نظر مختلفة عديدة فى الصفحات من 718 الى 725

مسائل :

١ - وضعت علبه دهان فارغة على منضدة رخامية ، ونزع الغطاء ، وفرغ الجزءان بلمسهما بالأرض . لصق خيط نايلون عازل بمنتصف الغطاء ولصق قطعنا عملة

معدنيين بالخط بحيث لا يتلامسان . أعطيت القطعة الأولى شحنة $4nC$ و فرغت شحنة القطعة الثانية ، ثم أنزلا فى العلبه حيث عُلقا بعيدا عن الجدران ، مع إحكام وضع الغطاء . ومرة أخرى لمس خارج العلبه لحظيا بالأرض . ثم فك الجهاز بعناية باستخدام قفازات وأدوات عازلة (أ) ماهى الشحنات الموجودة على كل من القطع المعدنية الأربع ؟ (ب) إذا كانت القطعة الأولى قد أعطيت شحنة مقدارها $4nC$ والقطعة الثانية شحنة مقدارها $2nC$ — فماذا يصبح النظام النهائى للشحنات ؟

٢ - شحنة نقطية مقدارها $20 nC$ موضوعة عند $(3, -1, 4)$ ، وخط شحنة منتظم ذو $25 nC/m$ — يقع على طول تقاطع المستويين $x = -4$ و $z = 6$ (أ) احسب D عند $(3, 1, 0)$. (ب) كم هو قدر التدفق الكهربى الذى يترك سطح كرة نصف قطرها 5 ، مركزه عند نقطة الأصل ؟ (ج) أعد الجزء (ب) ، إذا كان نصف قطر الكرة هو 10 .

٣ - يحتوى السطح المستوى $z = 0.5$ فى المنطقة $-1 \leq x \leq 1$ و $0 \leq y \leq 2$ على كثافة شحنة $\rho_s = 2x^2 + 5y C/m^2$ ، وليس هناك شحنة فى أى مكان آخر . كم هو قدر التدفق الكهربى الذى يترك المنطقة المكعبة : $|x|$ ، $|y|$ و $|z| \geq 1$.

٤ - يقع خط - شحنة منتظم ذو $15 nC/m$ على طول المحور z ، ووضع لوح منتظم الشحنة ذو $4nC/m^2$. عند المستوى $z = 1$ (أ) ما هو التدفق الكهربى الكلى التارك للسطح الكروى $r = 2$ ؟ (ب) أوجد D عند النقطة على السطح الكروى حيث $x = 2$. (ج) أعد الجزء (ب) للنقطة حيث $x = 1$ ، $y = -0.5$ و $z > 0$.

٥ - إذا كانت $D = 8xe^{-y}a_x - 4x^2e^{-y}a_y \mu C/m^2$ ، أوجد التدفق الكلى الخارج من سطح المكعب المكون بـ $|x|$ ، $|y|$ و $|z| \geq 1$.

٦ - فى الاحداثيات الأسطوانية ، ذع $[4\pi(p^2 + z^2)^{1.5}]$ $D = (\rho a_\rho + z a_z)/$ عین التدفق الكلى الخارج من : (أ) السطح الأسطوانى اللانهائى الطول $\rho = 7$ ، (ب) الاسطوانة المحدودة ، $\rho = 7$ و $|z| \leq 10$.

٧ - إذا أعطيت المجال $D = (2x + 1)y^2a_x + 2x(x + 1)ya_y C/m^2$ احسب التدفق الكلى العابر للسطح المعرف بـ : (أ) $x = 5$ ، $-2 \leq y \leq 2$ و $-2 \leq z \leq 2$ ، (ب) $2 \leq y \leq 5$ ، $-5 \leq z \leq 2$ و $-2 \leq x \leq 4$ ، (ج) $\phi = 0$ و $0 \leq z \leq 1$ ، (د) $\phi = \pi$ و $0 \leq z \leq 1$.

٨ - السطح الأسطوانى $\rho = 0.2 m$ يحتوى على كثافة شحنة ذات $30 C/m^2$ ، بينما ذلك عند $\rho = 0.5m$ يحتوى على $40 C/m^2$ — (أ) ماهى كثافة الشحنة الواجب وجودها على السطح $\rho = 0.4$ حتى تكون الشحنة الكلية صفراً ؟ (ب) باستخدام هذه القيم الثلاث لـ ρ ، احسب D_ρ كدالة فى ρ وارسم D_ρ تخطيطيا مع $0 \leq \rho \leq 0.7 m$. (ج) إذا تغيرت ρ_x الى $20 C/m^2$ — على $\rho = 0.4m$ ، ارسم مرة أخرى D_ρ مع ρ تخطيطيا .

٩- تحتوي الأسطح الأسطوانية ρ تساوى 3, 4, 5 m على كثافات شحنة سطحية منتظمة قيمها 12,8 — $\rho_{xx}nC/m^2$ بالترتيب . (أ) ماذا يجب أن تكون قيمة ρ_{xx} حتى تكون $D = 0$ $\rho > 5$ ؟ (ب) إذا كانت $\rho_{xx} = 2nC/m^2$ ، احسب وارسم D_ρ مع ρ ل $0 \leq \rho \leq 6m$.

١٠- يحتوي السطح الكروي $r = 0.2m$ كثافة شحنة مقدارها $50C/m^2$ ، بينما $r = 0.5$ يحتوي على $40C/m^2$. (أ) ما كثافة الشحنة الواجب وجودها على السطح $r = 0.4m$ حتى تكون الشحنة الكلية صفراً ؟ (ب) باستخدام هذه القيم الثلاث ل ρ_x ، احسب D_r كدالة في r وارسم D_r تخطيطياً مع r ، $0 \leq r \leq 0.7m$. (ج) إذا غيرت ρ_x إلى $20C/m^2$ — على $r = 0.4$ ، ارسم مرة أخرى D_r تخطيطياً مع

١١- تحتوي الأسطح الكروية r تساوى 3, 4, 5m على كثافات شحنة سطحية منتظمة قيمها 8, 12 — $\rho_{xx}nC/m^2$ بالترتيب . (أ) ماذا يجب أن تكون قيمة ρ_{xx} حتى تكون $D = 0$ $\rho > 5$ ؟ (ب) إذا كانت $\rho_{xx} = 2nC/m^2$ ، احسب وارسم D_r مع r ل $0 \leq r \leq 6m$.

١٢- دُع $\rho_v = 4\mu C/m^2$ ل $\rho_v = 0$ و $0 \leq \rho \leq 2mm$ و $\rho_v = 32 \times 10^{-15} \rho^{-3}$ ل $\rho_v = 2$ $\rho < 4$ ، و دُع $\rho_v = 0$ في أي مكان آخر . اختر أسطحاً جاوسية مناسبة ، وأحصل على تعبيرات ل D_ρ ، وأوجد D_ρ عند ρ تساوى 3, 1, 0 و 5 mm .

١٣- أعد المسألة (١٢) فيما عدا أن تدع $\rho_v = \rho/1,000C/m^3$ ل $\rho_v = 2$ $\rho \leq 0$ و $\rho_v = 2\mu C/m^3$ ل $2 \leq \rho < 4mm$.

١٤- في الاحداثيات الكروية ، $0 \leq r < 2mm$ و $\rho = 32 \times 10^{-15} r^{-3}$ ل $2 \leq r < 4mm$ و $\rho = 0$ في أي مكان آخر . اختر أسطحاً جاوسية مناسبة ، وأحصل على تعبيرات ل D_r ، وأحسب قيم D_r عند r تساوى 3, 1, 0 و 5 mm .

١٥- أعد المسألة (١٤) باستثناء أن تدع $\rho = 0.035rC/m^2$ ل $\rho = 0$ و $0 \leq r \leq mm$ ل $\rho = 6\mu C/m^3$ ل $2 \leq r < 4mm$.

١٦- كثافة شحنة معطاة بـ $\rho = 5\cos \pi x \mu C/m^3$ ل $\rho = 0$ و $-0.5 \leq x \leq 0.5m$ في $\rho = 0$ في أي مكان آخر . بعد اختيار أسطح جاوسية مناسبة : (أ) عين D في كل مكان ، (ب) ارسم D_x تخطيطياً مع x ، (ج) ارسم D_x تخطيطياً مع x إذا كانت شحنة سطحية $\rho_s = 2\mu C/m^2$ ، موجودة أيضاً عند $x = 0.25$.

١٧- وزعت كثافة شحنة كما يلي : $\rho = 2\mu C/m^3$ ل $-2 < y < -1m$ و $-2\mu C/m^3$ ل $I < y < 2m$ و $\rho = 0$ في أي مكان آخر . (أ) استخدم قانون جاورس لتوجد D في كل مكان . (ب) ارسم D_y تخطيطياً مع y .

١٨- $D = (2y^2x - 8xy)\mathbf{e}_x + (4xyz - 4x^2)\mathbf{e}_y + (2xy^2 + 4z)\mathbf{e}_z$ C/m² (أ) أوجد كمية التدفق الخارجة من حجم كروي مقداره $10^{-14}m^3$ موجود عند $P(2,3,-1)$ ، (ب) عين الشحنة الكلية داخل هذا الحجم . (ج) ماهي كثافة الشحنة المتوسطة داخل الحجم ؟

$$١٩ - D = 20xy^3z^4a_x + 30x^2y^2z^4a_y + 40x^2y^3z^3a_z \text{ C/m}^2 \text{ د ع}$$

(أ) كم قدر الشحنة المحتواة في حجم 10^{-10} m^3 موجود عند $(3, 1, 2)$ ؟ (ب) عند $(2, 2, 3)$ ؟ (ج) عند أى نقطة فى المنطقة $0 \leq x \leq 3$, $0 \leq y \leq 3$ و $0 \leq z \leq 3$ ، يكون أكبر قدر من التدفق الخارج من حجم تزايدى قدره : 10^{-10} m^3 وماهو مقدار Ψ_{\max} ؟

٢٠ - حيز مكعبى مكون بالأسطح x , y و z تساوى $0.1 \pm$. فإذا أعطيت المجال $D = 6x e^{2y} (a_x + x a_y) \text{ C/m}^2$: (أ) أوجد قيمة التكامل السطحي لـ D على سطح المكعب وأوجد الشحنة الكلية المحتواة فى هذا الحيز ، (ب) افترض أن المكعب هو عنصر حجم تزايدى موجود عند نقطة الأصل ، واحسب الشحنة المحتواة باستخدام المعادلة (أ) فى قسم ٣ - ٤ .

٢١ - احسب انفرج كل من المجالات الآتية عند $(1, -1, 2)$: $P(1, -1, 2)$

$$(أ) D = (x a_x + y a_y + z a_z) / \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (ب) D = x z e^{2y} (x a_x + x z a_y + x a_z)$$

$$G = x y^2 z^3 (a_x + 2 a_y + 3 a_z) \quad (د) \quad , \quad D = 0.2 a_x - 0.6 a_y + 0.35 a_z \quad (جـ)$$

٢٢ - عين القيم العددية لانفرج كل من المجالات الآتية عند $(2, 90^\circ, 1)$: $P(2, 90^\circ, 1)$

$$D = 2\rho \cos \phi a_\rho - \rho \sin \phi a_\phi + 4z a_z \quad (أ)$$

$$D = 2\rho z (\cos \phi + \sin \phi) a_\rho + \rho z (\cos \phi - \sin \phi) a_\phi + \rho^2 (\cos \phi + \sin \phi) a_z \quad (ب)$$

$$F = 5\rho^2 z \phi (a_\rho + 2 a_\phi - 3 a_z) \quad (د) \quad D = 12 a_\rho + 4 a_z \quad (جـ)$$

٢٣ - أوجد انفرج كل من المجالات الآتية عند النقطة $(2, \theta, \phi = 90^\circ)$: $P(2, \theta, \phi = 90^\circ)$

$$D = (2r \sin \theta \cos \phi + \cos \theta) a_r + (r \cos \theta \cos \phi - \sin \theta) a_\theta - r \sin \phi a_\phi \quad (أ)$$

$$D = \sin^2 \theta \sin \phi a_r + \sin 2\theta \sin \phi a_\theta + \sin \theta \cos \phi a_\phi \quad (ب)$$

$$W = 0.2 r^3 \phi \sin^2 \theta (a_r + a_\theta + a_\phi) \quad (د) \quad D = 0.1 a_r \quad (جـ)$$

٢٤ - بين أن انفرج المجال E المعطى بالمعادلة (٣٦) فى قسم ٤ - ٧ يساوى صفراً فى كل مكان تقريباً .

٢٥ - (أ) يقع خط شحنة منتظم كثافته ρ_L على طول المحور z . أثبت أن $\nabla \cdot D = 0$ فى كل مكان عدا على خط الشحنة . (ب) استبدل كثافة شحنة حجمية منتظمة ρ_0 لـ $0 \leq \rho \leq a$ بخط الشحنة أربط ρ_0 بـ ρ_L حتى تكون الشحنة لكل وحدة طول واحدة . ثم أوجد $\nabla \cdot D$ فى كل مكان .

٢٦ - إذا كانت $D = x y^2 z^2 a_x + x^2 y z^2 a_y + x^2 y^2 z a_z \text{ C/m}^2$: (أ) أوجد تعبيراً لكثافة الشحنة الحجمية ، (ب) احسب الشحنة الكلية داخل مكعب معرف بـ $0 \leq z \leq m$, $0 \leq x \leq 2m$, $0 \leq y \leq 2m$.

٢٧ - كثافة التدفق الكهربى فى داخل الحيز الأسطوانى $\rho \leq 5m$ معطاة بـ $4\rho^2 a_\rho \text{ C/m}^2$. (أ) ماهى كثافة الشحنة الحجمية عند $\rho = 2$ ؟ (ب) ماهى كثافة التدفق الكهربى عند $\rho = 2$ ؟ . (جـ) ما قدر التدفق الكهربى التارك للأسطوانة $\rho = 2$, $\rho \leq 5$ ؟ (د) ما قدر الشحنة المحتواة داخل الأسطوانة $\rho = 2$, $\rho \leq 5$ ؟

٢٨ - تعطى كثافة التدفق الكهربى داخل الكرة $r \leq 5\text{m}$ بـ $4r^2\text{a}_p\text{C/m}^2$ (أ) ما كثافة الشحنة الحجمية عند $r = 2$ ؟ (ب) ما كثافة التدفق الكهربى عند $r = 2$ ؟ (ج-)
ما مقدار التدفق الكهربى التارك للكرة $r = 2$ ؟ (د) ما قدر الشحنة المحتواة داخل الكرة $r = 2$ ؟

٢٩ - دع D تعطى $0.1\rho\text{a}_p\text{C/m}^2 \leq D \leq 0.2\text{m}$ و $0 \leq \rho \leq 0.004/p$ (أ) $p \geq 0.2$ أوجد ρ ، عند $\rho = 0.1$ و $\rho = 0.3$ (ب) ما خط الشحنة الذى يمكن وضعه على طول المحور z ليجعل $D = 0$ لـ $p \geq 0.2$ ؟

٣٠ - دع $D = 20\rho^2\text{a}_p\text{C/m}^3$. (أ) ما كثافة الشحنة الحجمية عند النقطة $P(0.5, 60^\circ, 2)$ ؟ (ب) استخدام طريقتين مختلفتين لايجاد كمية الشحنة الواقعة داخل السطح المغلق المحدد بـ $\rho = 3$ و $0 \leq \theta \leq 2$.

٣١ - أوجد قيمتى كل من طرفى نظرية الانفراج للمجال $F = (4x - x^2)\text{a}_x - 3y^2z^2\text{a}_y - (2y^3z^3 - z)\text{a}_z$ فى المنطقة $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$.

٣٢ - إذا كانت $D = [(20 \cos I/2 \phi/p)]\text{a}_\phi$ فى المنطقة $0 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq z \leq 2.5$ ، عين الشحنة الكلية الواقعة داخل المنطقة المعطاة بطريقتين مختلفتين .

٣٣ - دع $D = (0.1/r) \cos\theta\text{a}_\theta$ داخل السخروط المقطوع المعرف بـ $0 \leq \theta \leq \pi/4, 0 \leq \phi \leq 2\pi$ و $2 \leq r \leq 5$. عين الشحنة الكلية الواقعة داخل الحيز المخروطى بايجاد قيمتى كل من طرفى نظرية الانفراج .

الفصل الرابع

الطاقة والجهد

فى الفصلين السابقين أصبحنا مُلمين بقانون « كولوم » واستخدامه فى إيجاد المجال الكهربى حول عدة توزيعات بسيطة للشحنة ، وأيضاً بقانون « جاوس » وتطبيقه فى تحديد المجال حول بعض تنظيمات الشحنة المتماثلة . وكان استخدام قانون « جاوس » دائماً أسهل لهذه التوزيعات العالية التماثل ، لأن مشكلة التكامل اختفت دائماً عندما أختير السطح المغلق المناسب .

ومع ذلك ، إذا كنا حاولنا أن نجد مجالاً أعقد قليلاً ، مثل ذلك الذى لشحنتين نقطيتين مختلفتين منفصلتين بمسافة صغيرة ، لوجدنا أنه لمن المستحيل أن نختار سطحاً « جاوسياً » مناسباً ، وأن نحصل على إجابة . على أن قانون « كولوم » أكثر قدرة ، ويمكننا أن نحل مسائل لا يمكن تطبيق قانون « جاوس » عليها . إن تطبيق قانون « كولوم » مُجهّد ، ومُسهّب وغالباً معقد تماماً ، والسبب فى ذلك يرجع بالضبط لحقيقة أن شدة المجال الكهربى ، وهو مجال منتج ، يجب أن تستنبط مباشرة من توزيع الشحنة . وعامة يستلزم ذلك ثلاثة تكاملات مختلفة : واحد لكل مركبة ، وتحليل المنتج إلى مركبات عادة يزيد من تعقيد التكاملات .

وبالتأكيد سوف يكون أمراً مرغوباً ، إذا استطعنا إيجاد دالة مقياسية لم نعرف بعد مع تكامل واحد ثم نحدد المجال الكهربى من هذه الكمية المقياسية بطريقة ما سهلة ومباشرة ، مثل التفاضل .

وهذه الدالة المقياسية موجودة فعلاً وتعرف بالجهد ، أو مجال الجهد . وسنجد أن لها شرحاً فيزيائياً حقيقياً جداً لنمناها وأنها مألوفة أكثر لغالبيتنا عن المجال الكهربى الذى سنتستخدم لإيجاده .

ويجب أن نتوقع ، حيثئذ ، أننا سنمجد سريعاً بطريقة ثالثة لإيجاد المجالات الكهربائية - تكامل مقياسى واحد - مع أنه ليس دائماً بسيطاً كما قد نبهى ، يتبعه تفاضل مرضى .

الجزء الباقى الصعب من المهمة ، هو التكامل ، الذى نهدف الى إزالته فى الفصل السابع .

٤ - ١ الطاقة المستنفدة في تحريك شحنة نقطية في مجال كهربي

عرفت شدة المجال الكهربي بالقوة على وحدة شحنة اختبار عند تلك النقطة ،
التي نرغب أن نجد عندها قيمة هذا المجال المتجه . إذا حاولنا أن نحرك شحنة الاختبار
ضد المجال الكهربي ، فعلينا أن نؤثر بقوة مساوية ومضادة لتلك المبذولة بواسطة
المجال ، وهذا يتطلب منا أن نستنفذ طاقة ، أو نعمل شغلا . إذا رغبنا أن نحرك الشحنة
في اتجاه المجال ، فإن استنفاد طاقتنا سيصبح ساليا ، فنحن لن نعمل شغلا ، بل
« المجال » .

افرض أننا نرغب في تحريك شحنة Q مسافة dL في مجال كهربي E القوة على Q
بسبب المجال الكهربي هي

$$(١) \quad \boxed{F_E = QE}$$

حيث يُذكرنا الرمز السفلي أن هذه القوة بسبب المجال . ومركبة هذه القوة في اتجاه dL
التي يجب أن تتغلب عليها

$$F_{EL} = F_E \cdot a_L = QE \cdot a_L$$

حيث $a_L =$ وحدة المتجه في اتجاه dL

القوة التي يجب علينا أن نسلطها تساوي وتضاد القوة نتيجة المجال

$$F_{app} = -QE \cdot a_L$$

واستنفادنا للطاقة هو حاصل ضرب القوة والمسافة .

الشغل التفاضلي المبذول بالمصدر الخارجي المحرك لـ Q

$$= -Q E \cdot a_L dL = -QE \cdot dL$$

أو

$$(٢) \quad \boxed{dW = -QE \cdot dL}$$

حيث استبدلنا $a_L dL$ بالتعبير الأسهل dL .

وكمية الشغل التفاضلي المطلوبه هذه ، قد تكون صفرا تحت شروط عدة يمكن
تحديدها بسهولة من (٢) . هناك الشروط عديمة الأهمية التي فيها E ، أو dL صفر ،
وحالة أكثر أهمية ، هي التي فيها E و dL متعامدين . هنا تحرك الشحنة دائما في اتجاه

على زوايا قائمة مع المجال الكهربى . ونستطيع أن نرسم تناظرا جيدا بين المجال الكهربى ومجال الجاذبية ، حيث مرة أخرى ، يجب أن تستنفذ طاقة لتحرك ضد المجال . إن إنزلاق كتلة بسرعة ثابتة على سطح أملس غير مستقيم ، هي عملية عديمة المجهود إذا حركت الكتلة على طول منحني ثابت الارتفاع ، بينما يجب بذل شغل موجب أو سلب لتحريكها الى ارتفاع أعلى ، أو أقل على التوالي .

وبالرجوع الى الشحنة فى المجال الكهربى ، فإن الشغل المطلوب لتحريك الشحنة مسافة محدودة يجب أن يحدد من التكامل .

$$(٣) \quad W = -Q \int_{init}^{final} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

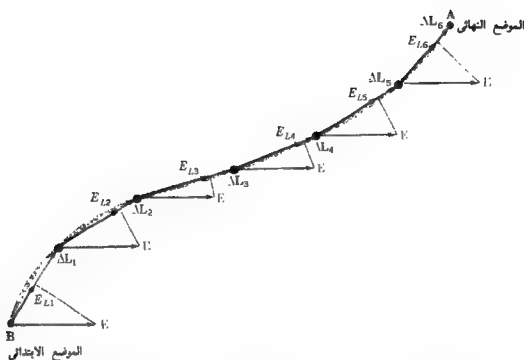
حيث يجب أن يُحدد المسار قبل أن يمكن إيجاد التكامل . والشحنة مفروض أنها ساكنة عند كلا الوضعين الابتدائى ، والنهائى .

وهذا التكامل المحدد أساسى لنظرية المجال ، سوف نخصص القسم التالى لتفسيره وإيجاد قيمته .

٤ - ١ دعنا نفترض أن مسارا تفاضليا يمكن أن يمثل بخط طوله 1 mm ، موجه فى موازاة المتجه $3\mathbf{a}_y - 6\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_z$. إذا كان $\mathbf{E} = z \mathbf{a}_x - 3y^2 \mathbf{a}_y + x \mathbf{a}_z \text{ V/m}$ ، فما كمية الشغل المبذول فى تحريك شحنة مقدارها $7 \mu\text{C}$ على طول هذا المسار إذا وقع المسار عند : (أ) $P_A(1,2,3)$ ، (ب) $P_B(2,0,-4)$ ، (ج) $P_C(6,1,-7)$ ؟
الاجابة : -75 nJ ; 14 nJ , 14 nJ .

٤ - ٢ التكامل الخطى

التعبير التكاملى (٣) للشغل المبذول فى تحريك شحنة نقطية Q من موضع الى آخر هو مثال لتكامل خطى ، الذى يتخذ دائما فى تدوين تحليل المتجهات ، شكل التكامل على طول مسار محدد لحاصل الضرب بالنقطة لمجال متجه وطول مسار متجه تفاضلى $d\mathbf{L}$.



شكل ٤-١ تفسر باني لتكامل خطي في مجال منتظم . التكامل الخطي لـ E بين النقطتين A و B لا يعتمد على المسار المختار ، حتى في مجال غير منتظم ، وهذه النتيجة ، عامة ، ليست صحيحة للمجالات المنفردة مع الزمن .

ويدون استخدام تحليل المتجهات كان يجب علينا أن نكتب

$$W = -Q \int_{\text{init}}^{\text{final}} E_L dL$$

حيث E_L = مركبة E في اتجاه dL

والتكامل الخطي ، يماثل كثير من التكاملات الأخرى التي تظهر في التحليل متقدم المستوى ، بما فيها التكامل السطحي الذي يظهر في قانون « جاوس » ، في أنها أساسا وصفية . فنحن نحب أن ننظر إليه أكثر بكثير من أن نحب أن نحبره . وهو يخبرنا أن نختار مسارا ، ثم نقسمه الى عدد كبير من الأجزاء الصغيرة جدا ، ثم نضرب مركبة المجال في اتجاه كل جزء في طول الجزء ، وعندئذ نجمع النتائج لكل الأجزاء . وهذه ، بالطبع ، عملية جمع ، والتكامل يُحصل عليه بالضغط فقط عندما يصبح عدد الأجزاء لانهايا .

هذه العملية مبنية في شكل ٤-١ ، حيث اختير مسار من موضع ابتدائي B الى موضع نهائي $A^{(1)}$ ، واختير مجال كهربي منتظم للتبسيط .

(١) الموضع النهائي أعلى النسبة A ليتناظر مع اصطلاح فرق الجهد ، كما هو موضح في القسم التالي .

والمسار مقسم الى ستة أجزاء $\Delta L_1, \Delta L_2, \dots, \Delta L_6$ ومركبات E فى اتجاه كل جزء يرمز له بـ $E_{L1}, E_{L2}, \dots, E_{L6}$. والشغل المبذول فى تحريك شحنة Q من B الى A هو عندئذ تقريبا

$$W = -Q(E_{L1} \Delta L_1 + E_{L2} \Delta L_2 + \dots + E_{L6} \Delta L_6)$$

أو، باستخدام التدوين الاتجاهى ،

$$W = -Q(E_1 \cdot \Delta L_1 + E_2 \cdot \Delta L_2 + \dots + E_6 \cdot \Delta L_6)$$

ولأننا افترضنا مجالا منتظما ،

$$E_1 = E_2 = \dots = E_6$$

$$W = -QE \cdot (\Delta L_1 + \Delta L_2 + \dots + \Delta L_6)$$

بما هو هذا المجموع للأجزاء المتجهة بين الأقواس . المتجهات تجمع بقانون متوازى الأضلاع ، والمجموع هو مجرد المتجه الموجه من نقطة البداية B إلى نقطة النهاية A ، لذلك

$$(4) \quad W = -QE \cdot L_{BA} \quad (E \text{ منتظم})$$

ونذكر تفسير الجمع للتكامل الخطى ، يمكن الحصول الآن بسرعة على هذه النتيجة للمجال المنتظم من التعبير التكاملى

$$(5) \quad W = -Q \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

وعند تطبيقه على مجال منتظم

$$W = -QE \cdot \int_B^A d\mathbf{L}$$

حيث يصبح التكامل الأخير L_{BA} و

$$W = -QE \cdot L_{BA} \quad (E \text{ منتظم})$$

ولهذه الحالة الخاصة لشدة مجال كهربى منتظم ، يجب أن نلاحظ أن الشغل المستخدم فى تحريك الشحنة يعتمد فقط على E و L_{BA} ، وهو متجه مرسوم من النقطة الابتدائية الى النهائية للمسار المختار . وهو لا يعتمد على المسار المعين الذى اخترناه لكى تحمل الشحنة عليه . ويمكننا أن نقدم من B الى A على خط مستقيم ،

أو عن طريق أى مسار آخر ، والاجابة هى نفسها . وسنرى فى قسم ٤ - ٥ أن نصا مطابقا يمكن قوله لأى مجال E (استاتيكي) غير منتظم .

ولكى نوضح ميكانيكية إنشاء التكامل الخطى (٥) دعنا نختار المجال غير المنتظم

$$E = y\mathbf{a}_x + x\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z$$

ونعين الشغل المستنفذ فى حمل C من $B(1,0,1)$ الى $A(0.8, 0.6,1)$ على طول القوس الأقصر للدائرة

$$x^2 + y^2 = 1 \quad z = 1$$

وبالعمل فى إحداثيات كرتيزية ، فإن المسار التفاضلى dL هو $dx\mathbf{a}_x + dy\mathbf{a}_y + dz\mathbf{a}_z$ ويصبح التكامل

$$\begin{aligned} W &= -Q \int_B^A \mathbf{E} \cdot dL \\ &= -2 \int_B^A (y\mathbf{a}_x + x\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z) \cdot (dx\mathbf{a}_x + dy\mathbf{a}_y + dz\mathbf{a}_z) \\ &= -2 \int_1^{0.8} y \, dx - 2 \int_0^{0.6} x \, dy - 4 \int_1^1 dz \end{aligned}$$

حيث قد اخيرت النهايات على التكاملات لتتفق مع القيم الابتدائية والنهاية لمتغير التكامل المختص . وباستخدام معادلة المسار الدائرى (واختيار إشارة الجذر الصحيحة للربع المستخدم) نجد

$$\begin{aligned} W &= -2 \int_1^{0.8} \sqrt{1-x^2} \, dx - 2 \int_0^{0.6} \sqrt{1-y^2} \, dy - 0 \\ &= -[x\sqrt{1-x^2} + \sin^{-1} x]_1^{0.8} - [y\sqrt{1-y^2} + \sin^{-1} y]_0^{0.6} \\ &= -(0.48 + 0.927 - 0 - 1.571) - (0.48 + 0.644 - 0 - 0) \\ &= -0.96 \, \text{J} \end{aligned}$$

فاذا اخترنا الآن مسار الخط المستقيم من B الى A ، فيجب أن نعين معادلات الخط المستقيم . أى اثنين من المعادلات الثلاث الآتية لمستويات مارة بالخط يكونان كافيين لتعريف الخط:

$$y - y_B = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} (x - x_B)$$

$$z - z_B = \frac{z_A - z_B}{y_A - y_B} (y - y_B)$$

$$x - x_B = \frac{x_A - x_B}{z_A - z_B} (z - z_B)$$

من المعادلة الأولى آنفا نجد

$$y = -3(x - 1)$$

ومن الثانية نحصل على

$$z = 1$$

على هذا ،

$$\begin{aligned} W &= -2 \int_1^{0.8} y \, dx - 2 \int_0^{0.6} x \, dy - 4 \int_1^1 dz \\ &= 6 \int_1^{0.8} (x - 1) \, dx - 2 \int_0^{0.6} \left(1 - \frac{y}{3}\right) dy \\ &= -0.96 \, \text{J} \end{aligned}$$

هذه هي نفس الاجابة التي وجدناها باستخدام المسار الدائري بين نفس النقطتين ، وهي توضح مرة أخرى النص (غير المُبرهن) أن الشغل المبذول لا يعتمد على المسار المأخوذ في أى مجال كهروستاتيكي .

ويجب ملاحظة أن معادلات المخطط المستقيم تبين أن $dy = -1/3 \, dx$ وهذه التعميمات قد تعمل في التكاملين الأولين آنفا ، مع تغيير في النهايات ، والاجابة يمكن أن يحصل عليها بتقدير التكاملات الجديدة . وهذه الطريقة غالبا تكون أبسط ، إذا كان الفكامل دالة لمتغير واحد فقط .

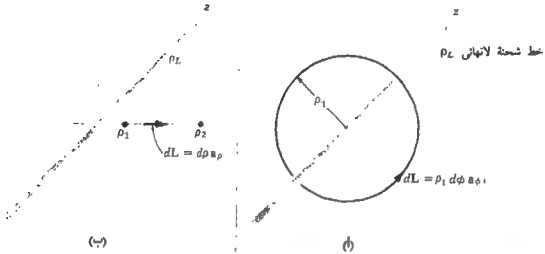
لاحظ أن تعبيرات dL في نظمنا الثلاثة للاحداثيات تستخدم الأطوال التفاضلية التي حصلنا عليها في الفصل الأول :

- | | |
|-----|---|
| (٦) | $dL = dx a_x + dy a_y + dz a_z$ (كارتيزيه) |
| (٧) | $dL = dp a_p + p \, d\phi a_\phi + dz a_z$ (إسطوانية) |
| (٨) | $dL = dr a_r + r \, d\theta a_\theta + r \sin \theta \, d\phi a_\phi$ (كروية) |

والعلاقات المتبادلة بين المتغيرات العديدة فى كل تعبير ، تُعين من المعادلات الخاصة للمسار .

وكمثال أخير يوضح تقييم التكامل الخطى ، دعنا نفحص مسارات عدة يمكننا أخذها بالقرب من خط شحنة لانهاى . المجال قد حصل عليه مرات عدة ، وهو كلية فى الاتجاه نصف القطرى ،

$$\mathbf{E} = E_\rho \mathbf{a}_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho} \mathbf{a}_\rho$$



شكل ٤-٢ (أ) مسار دائرى و (ب) مسار نصف قطرى حملت على طول شحنة Q فى مجال خط شحنة لانهاى . لا يبل شغل فى الحالة الأولى .

دعنا أولا نجد الشغل المبذول فى حمل الشحنة الموجبة Q حول مسار دائرى نصف قطره ρ_1 ، مركزه عند خط الشحنة ، كما هو موضح بشكل ٤-٢ . وبدون أى كتابة ، نرى أن الشغل يجب أن يكون صفرا ، لأن المسار يكون دائما عموديا على شدة المجال الكهربى ، أو أن القوة على الشحنة دائما تؤثر على زوايا قائمة مع الاتجاه الذى نحركها فيه . ولكن للتمرين دعنا نُكون التكامل ونحصل على الإجابة .

العنصر التفاضلى dL أختير فى الاحداثيات الاسطوانية ، والمسار الدائرى المختار يتطلب أن تكون dp و dz أصفارا ، ولذلك $dL = \rho_1 d\phi \mathbf{a}_\phi$. عندئذ يكون الشغل

$$\begin{aligned} W &= -Q \int_{\text{init}}^{\text{final}} \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho_1} \cdot \mathbf{a}_\rho \cdot \rho_1 d\phi \mathbf{a}_\phi \\ &= -Q \int_0^{2\pi} \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} d\phi \mathbf{a}_\rho \cdot \mathbf{a}_\phi = 0 \end{aligned}$$

دعنا الآن نحمل الشحنة من ρ_2 الى ρ_2 على طول مسار نصف قطري (شكل ٤ -

٢ب) . هنا $dL = dp a_p$ و

$$W = -Q \int_{\text{init}}^{\text{final}} \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 \rho} a_p \cdot dp a_p = -Q \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \frac{d\rho}{\rho}$$

أو

$$W = -\frac{Q\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

لأن ρ_2 أكبر من ρ_1 ، يكون $\ln(\rho_2/\rho_1)$ موجبا ، ونرى أن الشغل المبذول يكون سالبا ، مشيرا الى أن المنبع الخارجى المحرك للشحنة يتلقى طاقة .

أحد المزايا فى تقييم التكاملات الخطية هو الميل الى استخدام اشارات سالبة كثيرة جدا عند تحريك شحنة فى اتجاه احدائى متناقض القيمة هذا مُعتنى به كلية بواسطة نهايات التكامل ، ولايتجب عمل محاولة مُسامة التوجيه لتغيير اشارة dL . افرض أننا نحمل Q من ρ_2 الى ρ_1 (شكل ٤ - ٢ب) . مازال لدينا $dL = dp a_p$ ، ونبين الاتجاه المختلف بالتحرف على $\rho = \rho_2$ كنقطة البداية و $\rho = \rho_1$ كنقطة النهاية ،

$$W = -Q \int_{\rho_2}^{\rho_1} \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \frac{d\rho}{\rho} = \frac{Q\rho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

وهذا هو السالب للإجابة السابقة ، وواضح أنه صحيح .

ت ٤ - ٢ أثبت أن نفس الشغل يبذل فى تحريك شحنة مقدارها $10C$ - من نقطة الأصل الى $(1,2,3)$ خلال المجال $E = 6x^2y a_x + 2x^3a_y + 6za a_z$ على طول المسارات الآتية : (أ) أجزاء خطية مستقيمة : $(0,0,0)$ الى $(1,0,0)$ الى $(1,2,0)$ الى $(1,2,3)$ (ب) الخط المستقيم : $z = 3x$ و $y = 2x$ (ج) المنحنى $z = 3x^4$ و $y = 2x$.

الاجابة : $310J$, $310J$, $310J$.

ت ٤ - ٣ . إذا تغير مجال E مع الزمن فلا يستلزم أن يكون محافظا . دع المجال المتجه E يكون $5xya_x V/m$ عند $t = 0$. ماكىمة الشغل الذى يُبذل عند تلك اللحظة فى حمل شحنة مقدارها $0.4C$ من $(0,0,0)$ الى $(1,2,0)$ على طول المسار : (أ) $(0,0,0)$ الى $(1,2,0)$ الى $(1,2,0)$ ، (ب) $(0,0,0)$ الى $(0,2,0)$ الى $(1,2,0)$ ؟

الاجابة : $0J$, $2J$ - .

٤ - ٣ تعريف فرق الجهد ، والجهد

نحن الآن مستعدون لتعريف مفهوم جديد من تعبير الشغل المبذول بمنبع خارجى فى تحريك شحنة Q من نقطة الى اخرى فى مجال كهربي E

$$W = -Q \int_{\text{init}}^{\text{final}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

وبنفس الطريقة كما عرفنا شدة المجال الكهربى بالقوة على وحدة شحنة اختبار ، فاننا الان نعرف فرق الجهد V بالشغل المبذول (بمنبع خارجى) فى تحريك وحدة شحنة موجبة من نقطة الى اخرى ، فى مجال كهربى

$$(٩) \quad \text{فرق الجهد} = V = - \int_{\text{init}}^{\text{final}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

علينا أن نتفق على اتجاه التحرك ، كما يعنيه أسلوينا ، ونعمل هذا بالنص على أن V_{AB} يعنى فرق الجهد بين النقط A و B وهو الشغل المبذول فى تحريك وحدة الشحنة من B (المسماة أخيرا) الى A (المسماة أولا) . وعلى ذلك ، فى تعيين V_{AB} ، فإن B هى النقطة الابتدائية و A هى النقطة النهائية . والسبب لهذا التعريف الغريب بعض الشيء سيصبح أكثر وضوحا بعد قليل ، عندما نرى أن النقطة الابتدائية B غالبا تؤخذ عند مالا نهاية ، بينما تمثل النقطة النهائية A موضع الشحنة الثابت ، وعلى ذلك فإن نقطة A بطبيعتها أكثر أهمية .

وَيُقاس فرق الجهد « بالجول لكل كولوم » ، والذي يُعرف « بالـ volt » كوحدة أكثر شيوعا ، ويختصر V . وعلى ذلك ففرق الجهد بين النقطتين A و B هو

$$(١٠) \quad V_{AB} = - \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} \quad V$$

و V_{AB} يكون موجبا إذا بُذل شغل فى حمل الشحنة الموجبة من B الى A .

ومن مثال خط الشحنة فى القسم الأخير وجدنا أن الشغل المبذول فى أخذ شحنة Q من ρ_2 الى ρ_1 كان

$$W = \frac{Q\rho_2}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

وعلى هذا ، فرق الجهد بين انقطتين عند ρ_2 و ρ_1 هو

$$(١١) \quad V_{12} = \frac{W}{Q} = \frac{\rho_2}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

ونستطيع اختبار هذا التعريف بايجاد فرق الجهد بين النقط A و B عند مسافات نصف قطرية r_A و r_B من شحنة نقطية Q . وباختيار نقطة أصل عند Q ،

$$\mathbf{E} = E_r \mathbf{a}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r$$

$$d\mathbf{L} = dr \mathbf{a}_r \quad \text{و}$$

$$(١٢) \quad V_{AB} = - \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = - \int_{r_B}^{r_A} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) \quad \text{نجد}$$

إذا كان $r_B > r_A$ ، يكون فرق الجهد V_{AB} موجبا ، مشيرا الى أن طاقة أُستنفذت بواسطة المنبع الخارجى فى احضار الشحنة الموجبة من r_B الى r_A . وهذا يتفق مع الصورة الفيزيائية التى توضح أن الشحنتين المتشابهتين تتنافران معا .

وغالبا يكون من الملائم أن نتكلم عن الجهد أو الجهد المطلق ، لنقطة ، أكثر من فرق الجهد بين نقطتين ، ولكن هذا يعنى فقط أننا نوافق على أن نقيس كل فرق جهد بالنسبة الى نقطة اسناد محددة التى نعتبر أن لها جهدا صفريا . ويجب الوصول الى اتفاق عام على المرجع الصفرى قبل أن يكون لتعبير الجهد أى دلالة . فمثلا له احدى يديه على الألواح الحارقة لانبوبة اشعة الكاثود والتى هى « عند جهد 50V » وبده الأخرى على طرف الكاثود من المحتمل أنه سوف يكون مرتعشا بمنف جدا ليفهم أن الكاثود ليس المرجع الصفرى ، بل إن كل الجهود فى تلك الدائرة تقاس عادة بالنسبة الى الحائل المعدنى حول الانبوبة والكاثود قد يكون سالبا بعدة آلاف من الفولتات بالنسبة للحائل .

ربما تكون أكثر نقطة إسناد صفرى شيوعا فى قياسات الجهد العملية ، أو الفيزيائية هى « الأرض » والتى نعنى بها الجهد لمنطقة سطح الأرض نفسها . ونظريا ، تمثل هذا السطح عادة بمستوى لانهاى عند جهد صفرى ، مع أن بعض المسائل ذات المقياس الكبير ، مثل تلك المشتملة على انتشار عبر المحيط الأطلنطى ، تتطلب سطحا كرويا عند جهد صفرى .

ونقطة إسناد أخرى شائعة الاستخدام هى اللانهاية . وتظهر هذه عادة فى المسائل النظرية التى تقرب حالة فيزيائية تكون فيها الأرض بعيدة نسبيا عن المنطقة التى نهتم بها ، مثل المجال الاستاتيكي قرب طرف جناح طائرة اكتسبت شحنة بالطيران خلال ركاب رعدى ، أو المجال داخل ذرة . وعند العمل فى مجال جهد الجاذبية على الأرض ، يؤخذ المرجع الصفرى عادة عند مستوى سطح البحر ، ومع ذلك فلبعض بين الكواكب يكون اختيار اللانهاية كمرجع صفرى مناسبا أكثر .

ويمكن أحيانا استخدام سطح اسطوانى له نصف قطر محدود عندما يوجد تماثل اسطوانى ويتحقق أن اللانهاية غير ملائمة . فى الكابل المحورى يُختار الموصل

الخارجي كمرجع صفري للمجهود . وهناك أيضا ، بالطبع ، العديد من المسائل الخاصة ، مثل تلك التي يجب أن نختار لها سطحا زائديا ذا طيتين أو شبه كرة مفلطح ، كمرجع جهد صفري ، ولكن هذه لاثنتين حاليا .

إذا كان الجهد عند نقطة A هو V_A وذلك عند B هو V_B فإن

$$(١٣) \quad V_{AB} = V_A - V_B$$

حيث أننا بالضرورة نتفق أن V_A و V_B سيكون لهما نفس نقطة المرجع الصفري .

ت ٤ - ٤ . إذا أعطيت المجال $E = 40xy\mathbf{a}_x + 20x^2\mathbf{a}_y + 2a_z$ V/m ، احسب : (أ) V_{PQ} ، إذا أعطيت أن $P(1, -1, 0)$ و $Q(2, 1, 3)$ ، (ب) V عند $P(1, -1, 0)$ إذا كان المرجع الصفري عند $Q(2, 1, 3)$ ، (ج) V عند $P(1, -1, 0)$ إذا كان المرجع الصفري عند نقطة الأصل .

الإجابة : $20V, 106V, 106V$.

٤ - ٤ مجال الجهد لشحنة نقطية

في القسم السابق وجدنا تعبير (١٢) لفرق الجهد بين نقطتين واقعيتين عند $r = r_A$ و $r = r_B$ في مجال شحنة نقطية Q موضوعة عند نقطة الأصل ،

$$(١٤) \quad V_{AB} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) = V_A - V_B$$

لقد فرض هناك أن النقطتين تقمان على نفس الخط نصف القطري أولهما نفس قيم الاحداثيات θ و ϕ مما سمح لنا أن ننشئ مسارا بسيطا على هذا الخط نصف القطري لكي نحمل شحنتنا الموجبة عليه . والان يجب أن نسأل إذا ما كانت قيم مختلفة للاحداثيات θ و ϕ للموضع الابتدائي والنهائي ستؤثر على إجابتنا وإذا ما كنا نستطيع أن نختار مسارات أكثر تعقيدا بين النقطتين بدون تغيير النتائج . دعنا نجيب على كلا السؤالين فوراً باختيار نقطتين عامتين A و B (شكل ٤ - ٣) عند المسافات نصف القطرية r_A و r_B ، وأي قيم للاحداثيات الأخرى .

طول المسار التفاضلي dL له المركبات ذات الرموز السفلية r, θ, ϕ ، والمجال الكهربائي له مركبة نصف قطرية فقط . وعندئذ أخذ الضرب بالنقطة يترك لنا فقط

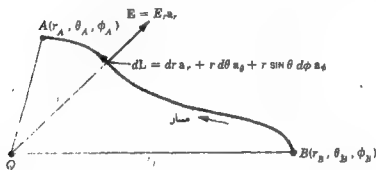
$$V_{AB} = - \int_{r_B}^{r_A} E_r dr = - \int_{r_B}^{r_A} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

نحصل على نفس الاجابة ، ونرى لذلك ، أن فرق الجهد بين نقطتين في مجال شحنة نقطية ، يعتمد فقط على بعد كل نقطة عن الشحنة ، ولا يعتمد على المسار الخاص المستخدم في حمل وحدة شحنتنا من نقطة الى الأخرى .

كيف يمكننا - بسهولة - أن نعرف مرجعا صفريا للجهد ؟ الامكان الأبسط ، هو أن ندع $V = 0$ عند مالانهاية . وإذا سمحنا للنقطة عند $r = r_B$ بأن تتراجع الى مالانهاية يصبح الجهد عند r_A .

$$V_A = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_A}$$

أو ، لأنه ليس هناك داع أن نميز هذه النقطة بالرمز السفلى A ،



شكل ٤ - مسار عام بين نقطتين عامتين A و B في مجال شحنة نقطية Q عند نقطة الأصل . فرق الجهد V_{AB} لا يعتمد على المسار المختار .

$$(١٥) \quad V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

هذا التعبير يعرف الجهد عند أى نقطة على مسافة r من شحنة نقطية Q عند نقطة الأصل ، الجهد عند نصف قطر لانهاية مأخوذ على أنه المرجع الصفرى . وبالعودة الى تفسير فيزيائى ، فيمكننا أن نقول : إن $Q/4\pi\epsilon_0$ joules من الشغل يجب أن يُبذل في حمل شحنة $1C$ من مالانهاية الى أى نقطة على بعد r meters من الشحنة Q .

وطريقة مناسبة للتعبير عن الجهد بدون اختيار مرجع صفرى خاص يستلزم اعتبار r_A أنه r مرة أخرى وندع $Q/4\pi\epsilon_0$ تكون ثابتة . على ذلك

$$(١٦) \quad V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + C_1$$

و C_1 يمكن أن تختار بحيث $V = 0$ عند أى قيمة مرغوبة لـ r . ونستطيع أيضا أن نختار المرجع الصفرى بطريقة غير مباشرة بأن ندع V تكون V_0 عند $r = r_0$.

يجب أن يُلاحظ أن فرق الجهد بين نقطتين ليس دالة في C_1 .

معادلات (١٥) أو (١٦) تمثل مجال الجهد لشحنة نقطية . والجهد مجال مقياسي ولا يتضمن أى وحدات متجهات .

دعنا نُعرف الآن سطحاً متساوي الجهد كسطح مكون من كل تلك النقاط التي لها نفس قيمة الجهد . تحريك وحدة شحنة على سطح متساوي الجهد لا يتطلب على شغل ، لأن ، بالتعريف ، لا يوجد فرق جهد بين أى نقطتين على هذا السطح .

الأسطح المتساوية الجهد ، في مجال جهد شحنة نقطية هي كرات مركزها عند الشحنة النقطية .

وفحص صورة مجال الجهد لشحنة نقطية يبين أنه مجال معكوس مسافة ، بينما وجد أن شدة المجال الكهربى هي علاقة قانون تربيع عكسى . وتوجد نتيجة مماثلة لمجال قوة الجاذبية لكثلة نقطية (قانون تربيع عكسى) ومجال جهد الجاذبية (معكوس مسافة) . قوة الجاذبية المؤثرة بالأرض على جسم على بعد مليون ميل منها هي أربع مرات تلك المؤثرة على نفس الجسم على بعد مليونين من الأميال . على أن الطاقة الحركية المعطاة لجسم ساقط بحرية ، مبتدئاً من نهاية الكون بسرعة صفرية هي فقط قدرها مرتين عند مليون ميل ، عما هي عليه عند مليونين من الأميال .

ت ٤ - ٥ شحنة نقطة مقدارها $1.6nC$ واقعة عند نقطة الأصل في فضاء حر . أوجد الجهد عند $r = 0.7m$ إذا كان : (أ) المرجع الصفرى عند اللانهاية ، (ب) المرجع الصفرى عند $r = 0.5$ ؛ (جـ) $V = 5V$ عند $r = 1$.

الاجابة : $20.5V$; $- 8.22V$, $11.16V$.

٤ - ٥ مجال الجهد لنظام من الشحنات : خاصية المحافظة

عُرف الجهد عند نقطة بأنه الشغل المبذول في احضار وحدة شحنة موجبة من المرجع الصفرى الى النقطة ، ولقد تشككنا أن هذا الشغل ، وبالتالي الجهد ، لا يعتمد على المسار المأخوذ . فإذا لم تكن كذلك ، لما كان الجهد مفهوماً مفيداً جداً .

دعنا الان نبرهن تأكيداً . وسنعمل هذا بالبدء بمجال الجهد لشحنة نقطية مفردة التي أوضحنا بالنسبة لها ، في القسم الأخير ، عدم الاعتماد بالنسبة للمسار ، مع ملاحظة أن المجال خطى بالنسبة للشحنة بحيث يمكن تطبيق التراكب . سيتبع حينئذ أن مجال نظام من الشحنات له قيمة عند أى نقطة لاتعتمد على المسار المأخوذ في حمل شحنة الاختبار الى تلك النقطة .

على هذا فإن مجال الجهد لشحنة نقطية مفردة ، التي سوف نميزها بـ Q_1 ونضعها عند r_1 يشمل فقط المسافة $|r - r_1|$ من Q_1 الى النقطة عند r حيث نوجد قيمة الجهد . ولمرجع صفرى عند اللانهاية ، نجد

$$V(r) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 |r - r_1|}$$

الجهد بسبب شحنتين ، Q_1 عند r_1 و Q_2 عند r_2 ، دالة فقط فى $|r - r_1|$ و $|r - r_2|$ ، المسافات من Q_1 و Q_2 الى نقطة المجال ، بالترتيب ،

$$V(r) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 |r - r_1|} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 |r - r_2|}$$

وباستمرار اضافة شحنات ، نجد أن الجهد بسبب n من الشحنات النقطية هو

$$V(r) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 |r - r_1|} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 |r - r_2|} + \dots + \frac{Q_n}{4\pi\epsilon_0 |r - r_n|}$$

أو

$$(١٧) \quad V(r) = \sum_{m=1}^n \frac{Q_m}{4\pi\epsilon_0 |r - r_m|}$$

وإذا مثلت الآن كل شحنة نقطية على أنها عنصر صغير لتوزيع متصل لشحنة حجمية $\rho \Delta V$ ، فنجد ذلك

$$V(r) = \frac{\rho(r_1) \Delta v_1}{4\pi\epsilon_0 |r - r_1|} + \frac{\rho(r_2) \Delta v_2}{4\pi\epsilon_0 |r - r_2|} + \dots + \frac{\rho(r_n) \Delta v_n}{4\pi\epsilon_0 |r - r_n|}$$

وعندما نسمح لعدد العناصر أن يصبح لانهايا ، نحصل على التعبير التكاملى

$$(١٨) \quad V(r) = \int_{vol} \frac{\rho(r') dv'}{4\pi\epsilon_0 |r - r'|}$$

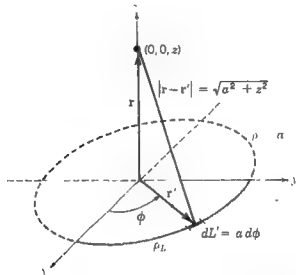
لقد قطعنا شوطا بعيدا من مجال الجهد لشحنة نقطية مفردة ، وقد يكون من المفيد أن نفحص (١٨) ونعش أنفسنا بمعنى كل حد . الجهد $V(r)$ يُعين بالنسبة الى مرجع جهد صفرى عند اللانهاية وهو مقياس مضبوط للشغل المبذول فى إحضار وحدة شحنة من لانهاية الى نقطة المجال عند r حيث نوجد الجهد . كثافة الشحنة الحجمية $\rho(r')$ ، وعنصر الحجم التفاضلى dv' يتحدان ليمثلا كمية شحنة تفاضلية $\rho(r') dv'$ موضوعة عند r' . المسافة $|r - r'|$ هى تلك المسافة من نقطة المنبع الى نقطة المجال . والتكامل هو تكامل مضاعف (حجمى) .

إذا أخذ توزيع الشحنة صورة خط شحنة ، أو شحنة سطحية فالتكامل يكون على طول الخط أو على السطح :

$$(19) \quad V(r) = \int \frac{\rho_L(r') dL'}{4\pi\epsilon_0 |r - r'|}$$

$$(20) \quad V(r) = \int_S \frac{\rho_S(r') dS'}{4\pi\epsilon_0 |r - r'|}$$

وأكثر التعبيرات تميمًا للجهد يحصل عليه بضم (١٧) ، (١٨) ، (١٩) و (٢٠)



شكل ٤ - مجال الجهد لحلقة لها كثافة شحنة خط منتظمة يمكن الحصول عليه بسهولة من

$$V = \int \rho_L(r') dL' / (4\pi\epsilon_0 |r - r'|)$$

وهذه التعبيرات التكاملية للجهد بدلالة توزيع الشحنة يجب أن تقارن بتعبيرات مشابهة لشدة المجال الكهربى ، مثل (١٨) فى قسم ٢ - ٤ :

$$E(r) = \int_{vol} \frac{\rho(r') dv'}{4\pi\epsilon_0 |r - r'|^3} \frac{r - r'}{|r - r'|}$$

والجهد مرة أخرى هو مقلوب مسافة ، وشدة المجال الكهربى ، قانون تربيع عكسى . والأخير ، طبعاً ، هو أيضاً مجال متجه .

ولكى نوضح استخدام أحد تكاملات الجهد هذه ، دعنا نوجد V على المحور z لشحنة خط منتظمة ρ_L على شكل حلقة ، $\rho = a$ فى المستوى $z = 0$ ، كما هو موضح فى شكل ٤ - ٤ . باستخدام (١٩) ، نجد $dL' = a d\phi$ ، $r' = a \hat{\rho}$ ، $r = z \hat{z}$ و $|r - r'| = \sqrt{a^2 + z^2}$ و

$$V = \int_0^{2\pi} \frac{\rho_L a d\phi}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{a^2 + z^2}} = \frac{\rho_L a}{2\epsilon_0 \sqrt{a^2 + z^2}}$$

بتلخيص :

١ - الجهد نتيجة شحنة نقطية مفردة ، هو الشغل المبذول في حمل وحدة شحنة موجبة من ما لا نهاية ، الى النقطة التي نريد الجهد عندها ، والشغل لا يعتمد على المسار المختار بين هاتين النقطتين .

٢ - مجال الجهد في وجود عدد من الشحنات النقطية هو مجموع مجالات الجهد الفردية الناتجة عن كل شحنة .

٣ - الجهد نتيجة عدد من الشحنات النقطية أو أى توزيع شحنة متصل يمكن لذلك ايجاده بحمل وحدة شحنة من ما لا نهاية الى النقطة المطلوبة على طول أى مسار نختاره .

وبأسلوب آخر : تعبير الجهد (المرجع الصفري عند ما لا نهاية) ،

$$V_A = - \int_{\infty}^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

أو فرق الجهد

$$V_{AB} = V_A - V_B = - \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

غير معتمد على المسار المختار للتكامل الحلقى ، بغض النظر عن مصدر المجال \mathbf{E} .

وهذه النتيجة غالبا تذكر موجزة بتقرير ، أنه لا يبدل شغل في حمل وحدة الشحنة

حول أى مسار مغلق ، أو

$$(٢١) \quad \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$$

وُضعت دائرة صغيرة على علامة التكامل لتبين الطبيعة المغلقة للمسار . وهذا

الرمز ظهر أيضا في صياغة قانون « جاوس » ، حيث استخدم تكامل على سطح مغلق .

المعادلة (٢١) صحيحة للمجالات الاستاتيكية ، ولكننا سنرى مؤخرا كثيرا أن

« فاراداي » بين أنها كانت غير كاملة وجدت مجالات مغناطيسية متغيرة مع الزمن .

وواحد من أعظم إسهامات « ماكسويل » للنظرية الكهرومغناطيسية ، كان في إثباته أن

مجالا كهربيا متغيرا مع الزمن أنتج مجالا مغناطيسيا ، ولذلك يجب أن نتوقع فيما بعد أن

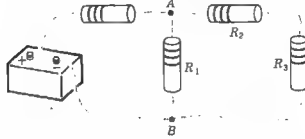
(٢١) ليست حيثل صحيحة عندما يتغير أى من \mathbf{E} أو \mathbf{H} مع الزمن .

ويحصر اهتمامنا للحالة الاستاتيكية حيث \mathbf{E} لا يتغير مع الزمن ، اعتبر دائرة التيار

المستمر الموضحة في شكل ٤ - ٥ . نقطتين ، A و B ، محددتين ، و (٢١) ينص على

أن حمل وحدة شحنة من A خلال R_2 و R_3 إلى B والعودة إلى A خلال R_1 لا يتطلب على شغل ، أو أن مجموع فروق الجهد ، حول أى مسار مغلق هو صفر .

لذلك معادلة (٢١) هي مجرد صورة عامة أكثر من قانون « كيرشوف » الدائرى للجهود ، أكثر عمومية فى أننا نستطيع تطبيقها على أى منطقة حيث يوجد مجال كهربي ولسنا مقيدين بدائرة تقليدية مكونة من أسلاك ، ومقاومات ، وبطاريات .



شكل ٤ - مسألة دائرة تيار مستمر بسيطة والتي يجب أن نحل بتطبيق $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$ على صورة قانون « كيرشوف » للجهود .

معادلة (٢١) سوف يلزم تعديلها قبل أن نستطيع تطبيقها على مجالات متغيرة مع الزمن . وسوف نعتنى بهذا فى الفصل العاشر ، وفى الفصل الثالث عشر سنستطيع حينئذ أن ننشئ الصيغة العامة لقانون كيرشوف للجهود للدوائر فيها تتغير التيارات والجهود مع الزمن .

أى مجال يحقق معادلة له الصورة (٢١) ، أى أن ، حيث التكامل الخطى المغلق للمجال يساوى صفراً ، يقال إنه مجال محافظ . والاسم ينبع من الحقيقة أنه لا يُبدل شغل (أو أن الطاقة محفوظة) حول مسار مغلق . ومجال الجاذبية أيضاً محافظ ، لأن أى طاقة تُستنفذ فى تحريك (رفع) جسم ضد المجال تسترجع تماماً عندما يعود الجسم (يُخفض) إلى موضعه الأسمى . ومجال جاذبية غير محافظ يمكنه أن يحل مشاكل طاقنا إلى الأبد .

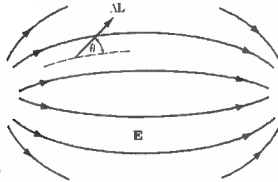
معدل تغير درجة الحرارة مع المسافة ، أو تدرج درجة الحرارة ، مقياساً بالكلفن / متر ، kelvins per meter (K/m) ، هو أيضاً مجال محافظ ، حتى فى حالة التغير مع الزمن . إذا لم يكن ، لما أمكننا تعيين درجة حرارة وحيدة لكل نقطة .

ت ٤ - ٦ - استخدم معادلة (١٩) أو (٢٠) لإيجاد الجهد عند $(0,0,10)$ ، المُسبب بكل من توزيعات الشحنة الآتية فى الفضاء الحر . (أ) حلقة : $\rho_L = 5 \text{ nC/m}$ و $\rho = 4$ و $z = 0$ (ب) قرص : $\rho_S = 2 \text{ nC/m}^2$ و $0 \leq \rho \leq 4$ و $z = 0$ (ج) قرص مشحون : $\rho_S = 3 \text{ nC/m}^2$ و $0 \leq \rho \leq 4$ و $z = 0$.

الاجابة : $97.0V$, $87.0V$, $104.9V$.

٤ - ٦ تدرج الجهد

لدينا الآن طريقتان لتحديد الجهد ، واحدة مباشرة من شدة المجال الكهربى بواسطة تكامل خطى ، وأخرى من نفس توزيع الشحنة الأصلى بواسطة تكامل حجمى . وكلا الطريقتين ليستا مفيدتين جدا فى تعيين المجالات فى أغلب المسائل العملية ، لأنه - كما سنرى فيما بعد - لاشدة المجال الكهربى ، ولا توزيع الشحنة معروف فى الأغلب جدا .



شكل ٤ - ٦ متجه عنصر طول تزايدى ΔL موضح يصنع زاوية θ مع مجال E ، مئين بخطوط انسيابه . منابع المجال غير مبنية .

والمعلومات التمهيدية فى الأغلب قابلة لأن تتكون من وصف سطحين متساوىى الجهد ، مثل ذكر أن لدينا موصلين متوازيين مقطعهما دائرى عند جهدى $100V$ و $100V$ - وربما نرغب فى ايجاد السعة بين الموصلين ، أو توزيع الشحنة والتيار على الموصلين ، والتى يمكن منها حساب الفقد .

ويمكن الحصول على هذه الكميات بسهولة من مجال الجهد ، وهدفنا الحالى سيكون طريقة بسيطة لايجاد شدة المجال الكهربى من الجهد .

ولدينا فعلا علاقة التكامل الخطى العامة بين هاتين الكميتين ،

$$(٢٢) \quad V = - \int E \cdot dL$$

ولكن هذه تُستخدم بسهولة أكثر فى الاتجاه العكسى : معطيا E ، أوجد V .

على أن ، (٢٢) يمكن أن تُطبق على عنصر قصير جدا طوله ΔL الذى على طوله E ثابتة أساسا ، مؤدية الى تزايد فرق الجهد ΔV ،

$$(٢٣) \Delta V = -E \cdot \Delta L$$

دعنا نرى أولاً : إذا كنا نستطيع أن نحدد أى معلومات جديدة ، عن علاقة V بـ E من هذه المعادلة . إعتبر منطقة عامة من الفراغ ، كما هو مبين فى شكل ٤ - ٦ ، وفيه يتغير كل من E و V عندما نتحرك من نقطة الى نقطة . معادلة (٢٣) تُخبرنا أن نختار عنصر تزايد متجه طول $\Delta L = \Delta L_{aL}$ ونضرب مقداره فى مُركبة E فى اتجاه a_L (أحد تفسيرات الضرب بالنقطة) لنحصل على فرق الجهد الصغير ، بين النقطتين النهائية والابتدائية لـ ΔL .

إذا رمزنا للزاوية بين ΔL و E بـ θ ، فإن

$$\Delta V = -E \Delta L \cos \theta$$

نود الآن أن نعبّر الى النهاية ونعتبر التفاضل dV/dL . ولكى نعمل هذا ، يلزمنا أن نُبين أن V يمكن أن يُفسر على أنها دالة $V(x,y,z)$ الى الآن ، V هى مجرد نتيجة التكامل الخطى (٢٢) . إذا فرضنا نقطة بداية محددة أو مرجعا صفريا ، ثم جعلنا نقطة النهاية (x,y,z) ، فالتنا نعرف أن نتيجة التكامل هى دالة وحيدة فى نقطة النهاية (x,y,z) لأن E مجال محافظ . ولذلك V هى دالة وحيدة - القيمة $V(x,y,z)$. وحيث يمكننا أن نعبّر للنهاية لنحصل على

$$\frac{dV}{dL} = -E \cos \theta$$

فى أى اتجاه يجب أن يوضع ΔL لنحصل على قيمة عظمى لـ ΔV ؟ تذكر أن E هى قيمة محددة عند النقطة التى نعمل عندها ، ولا تعتمد على اتجاه ΔL ، المقدار ΔL أيضا ثابت ، ومتغيرنا هو a_L ، وحدة المتجه المبين لاتجاه ΔL . من الواضح أن أقصى تزايد موجب للجهد ، ΔV_{\max} ، يحدث عندما يكون $\cos \theta$ هو 1 - ، أو أن ΔL تشير فى الاتجاه المضاد لـ E . لهذه الحالة ،

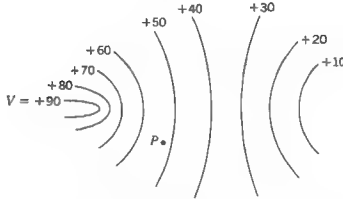
$$\left. \frac{dV}{dL} \right|_{\max} = E$$

وُربنا هذا التمرين الصغير خاصيتين للعلاقة بين E و V عند أى نقطة :

- ١ - مقدار شدة المجال الكهربى تُعطى بالقيمة المظلمى لمعدل تغير الجهد مع المسافة .
- ٢ - وهذه القيمة المظلمى يحصل عليها عندما يكون اتجاه تزايد المسافة مضادا لـ E أو بتعبير آخر : اتجاه E مضاد للاتجاه الذى فيه يزداد الجهد بأقصى معدل .

دعنا الآن نوضح هذه العلاقات بدلالة الجهد . شكل ٤ - ٧ مقصود به أن يبين المعلومات التى أُعطينا إياها عن مجال جهد ما . ويعمل هذا بإظهار الأسطح متساوية

الجهد (موضحة كخطوط ، فى الرسم التخطيطى ثنائى البعد) . نحن نرغب فى معلومات عن شدة المجال الكهربى عند نقطة P . مبتدئين عند P ، نضع مسافة تزايدية صغيرة ΔL فى اتجاهات مختلفة ، متصدين لذلك الاتجاه الذى فيه يتغير الجهد (متزايدا) بأقصى معدل . من الرسم التخطيطى ، يظهر أن هذا الاتجاه الى اليسار وإلى أعلى قليلا .



شكل ٤ - V مجال جهد مابين أسطحه المتساوية الجهد . المجال E عند أى نقطة عمودى على السطح متساوى الجهد المار بلك النقطة وموجه نحو اتجاه الأسطح الأكثر سالبية .

ومن خاصيتنا الثانية أننا ، تكون لللك شدة المجال الكهربى موجهة فى الاتجاه المضاد أى الى اليمين وإلى اسفل قليلا عند P . ومقدارها معطى بقسمة الزيادة الصغيرة فى الجهد على عنصر الطول الصغير .

ويبدو مُرجحا أن الاتجاه الذى يزيد فيه الجهد بمعدل أكبر يكون عموديا على متساويات - الجهد (فى اتجاه زيادة الجهد) ، وهذا صحيح ، لأنه إذا وجهت ΔL فى محاذاة متساوى - جهد فان $\Delta V = 0$ بتعريفنا للسطح المتساوى الجهد . ولكن حينئذ

$$\Delta V = -E \cdot \Delta L = 0$$

ولأن E لا ΔL ولا ΔL صفر ، فان E يجب أن تتعامد على ΔL هذا ، أى تتعامد على متساويات - الجهد .

حيث أن معلومات مجال الجهد يُحتمل أكثر أن تعين أولا ، دعنا نصف اتجاه ΔL الذى يؤدي الى أعظم زيادة فى الجهد رياضيا بدلالة مجال الجهد أكثر من شدة المجال الكهربى . ونعمل هذا بأن ندع \mathbf{e} تكون وحدة متجه عمودى على السطح متساوى - الجهد وموجه فى اتجاه الجهود الأعلى . حينئذ يُعبر عن شدة المجال الكهربى بدلالة الجهد ،

$$(٢٤) \quad E = - \left. \frac{dV}{dL} \right|_{a_N}$$

التي تبين أن مقدار E معطى بأقصى معدل تغير فراغى V واتجاه E عمودى على السطح متساوى - الجهد (فى اتجاه تناقص الجهد) .

ولأن $dV/dL|_{\max}$ يحدث عندما يكون ΔL فى اتجاه a_N ، فيمكننا أن نذكر أنفسنا بهذه الحقيقة بأن ندع

$$\left. \frac{dV}{dL} \right|_{\max} = \frac{dV}{dN}$$

و

$$(٢٥) \quad E = - \frac{dV}{dN} a_N$$

معادلة (٢٤) أو (٢٥) تخدم فى إعطاء تفسير فيزيائى لعملية إيجاد شدة المجال الكهربى من الجهد . وكلاهما وصفى لأسلوب عام ، ولانئوى استخدامها مباشرة للحصول على معلومات كمية . وهذا الأسلوب المؤدى من V الى E ليس فريدا لهذا الزوج من الكميات ، ولكن قد ظهر فى العلاقة بين مجال مقياسى ومجال متجه فى الهيدروليكا ، علم الديناميكا الحرارية ، والمغناطيسيات ، وفى الحقيقة فى كل مجال تقريبا يطبق فيه تحليل المتجهات .

والعملية على V التى نحصل بها على E - معروفة بالتدرج (gradient) ، وتدرج مجال مقياسى T معرف كما يلى

$$(٢٦) \quad \text{Gradient of } T = \text{grad } T = \frac{dT}{dN} a_N$$

حيث a_N وحدة متجه عمودى على الأسطح متساوية الجهد ، وذلك العمودى مختار بحيث يشير فى اتجاه القيم المتزايدة لـ T .

وباستخدام هذا التعبير الجديد ، يمكننا الآن كتابة العلاقة بين V و E كما يلى :

$$(٢٧) \quad E = -\text{grad } V$$

ولأننا قد أوضحنا أن V دالة وحيدة فى x, y, z ، فيمكننا أخذ تفاضلها الكلى

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

ولكن عندنا أيضا

$$dV = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -E_x dx - E_y dy - E_z dz$$

ولأن كلا التعبيرين صحيح لأي dx ، dy و dz ، فإن

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

وهذه النتائج يمكن جمعها اتجاهيا لتعطي

$$(٢٨) \quad \mathbf{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{a}_z\right)$$

ومقارنة (٢٧) و (٢٨) تمدنا بتعبير يمكن أن يستخدم لإيجاد التدرج في الاحداثيات الكرتيزية،

$$(٢٩) \quad \text{grad } V = \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{a}_z$$

وتدرج مقدار مقياسي هو متجه، والاختبارات القديمة تبين أن وحدات المتجهات التي غالبا تضاف خطأ مع تعبير الانفراج، تظهر أنها تلك التي حذفت خطأ من التدرج. بمجرد أن يفهم التفسير الفيزيائي للتدرج المعبر عنه ب (٢٩)، على أن يظهر أقصى معدل فراغي لتغير كمية مقياسية، والاتجاه الذي يحدث فيه هذه النهاية المظلمة، فيجب أن تكون الطبيعة المتجهة للتدرج واضحة من ذاتها.

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{a}_z \quad \text{العامل الاتجاهي}$$

يمكن أن يستخدم تقليديا كعامل على مقياس T ، ΔT متجا

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial T}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial T}{\partial z} \mathbf{a}_z$$

ومنها نرى أن

$$\nabla T = \text{grad } T$$

وهذا يسمح لنا أن نستخدم تعبيراً موجزاً جداً لربط E و V .

$$(٣٠) \quad \boxed{E = -\nabla V}$$

ويمكن التعبير عن التدرج بدلالة المشتقات الجزئية في نظم إحداثيات أخرى من خلال تطبيق تعريفه (٣٦) . وهذه التعبيرات مُستنتجة في الملحق (أ) ومكررة أسفل للتيسير عند معالجة مسائل لها تماثل اسطواني أو كروي . وهي تظهر أيضاً بداخل الغلاف الخلفي .

$$(٣١) \quad \boxed{\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{a}_z \quad (\text{كارتيزي})}$$

$$(٣٢) \quad \boxed{\nabla V = \frac{\partial V}{\partial \rho} \mathbf{a}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{a}_z \quad (\text{إسطواني})}$$

$$(٣٣) \quad \boxed{\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r} \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi \quad (\text{كروي})}$$

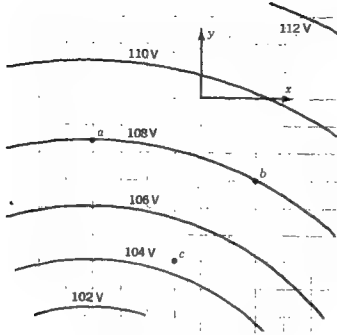
لاحظ أن مقام كل حد له صورة أحد مركبات $d\mathbf{L}$ في ذلك النظام الإحداثي ، ماعداً أن التفاضلات الجزئية تحل محل التفاضلات المادية ، فمثلاً ، $r \sin \theta \, d\phi$ تصبح $r \sin \theta \, \partial \phi$

وكمثال بسيط على استخدام التدرج في إيجاد شدة المجال الكهربى من الجهد ، دعنا نبدأ بمجال الجهد لشحنة نقطية فى الإحداثيات الكروية (قسم ٤ - ٤ ، معادلة (١٥)) ،

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

التدرج فى الإحداثيات الكروية معطى بـ (٣٣) ، ونرى أن المركبة الوحيدة لـ E ستكون المركبة نصف القطرية لأن V دالة فى r فقط . بأخذ المشتقة الجزئية ، كما هو مبين بـ (٣٣) ، نحصل على

$$E = -\nabla V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r .$$



شكل ٤-٨ انظر مسألة ت ٤-٧ .

ت - ٤-٧ جزء من مجال جهد ثنائي - البعد ($E_z = 0$) مبين في شكل ٤-٨ . خطوط الشبكة في المجال الفعلي على أبعاد Imm . عين قيمة تقريبية لـ E في الاحداثيات الكرتيزية عند : (أ) a ، (ب) b ، (ج) c .

$$\text{الاجابة : } -750a_y; -325a_x - 700a_y; -350a_x - 950a_y \quad V/m$$

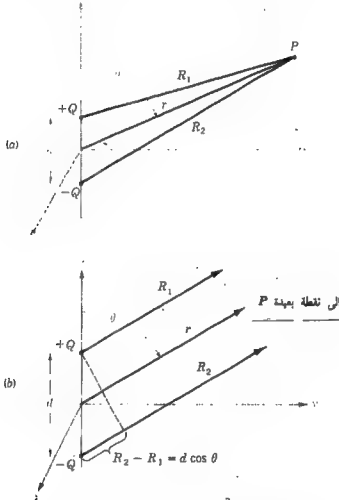
ت ٤-٨ : إذا أعطيت مجال الجهد $V = 50x^2yz + 20y^2V$ في فضاء حر ، أوجد : (أ) V عند $P(1,2,3)$ ، (ب) E_p ، (ج) ρ_p ، (د) dV/dN عند P ، (هـ) a_N عند P .

$$\text{الاجابة : } 380 V; -600a_x - 230a_y - 100a_z \quad V/m; -5.67 \text{ nC/m}^3; 650 \text{ V/m}; 0.923a_x + 0.354a_y + 0.1538a_z$$

٤-٧ ثنائي القطب :

مجالات ثنائي القطب التي سوف نَظهرها في هذا القسم مهمة جدا في أنها تكون الأساس لتصرف المواد العازلة في المجالات الكهربائية ، كما هو مُناقش في جزء من الفصل التالي ، كما أنها تبرز استخدام الصور ، كما هو مشروح في قسم ٥-٥ من الفصل القادم . علاوة على ذلك ، فإن هذا الاظهار سوف يخدم في توضيح أهمية مفهوم الجهد المتقدم في هذا الفصل .

ثنائي القطب الكهربى ، أو ببساطة ثنائى القطب ، هو الاسم المَعطى لشحنتين نقطيتين ، لهما مقدار متساو ، وإشارة مضادة مفصولتان بمسافة صغيرة بالنسبة للمسافة الى النقطة P التى نريد أن نُعرف عندها المجالات الكهربيه والجهد .



شكل ٤ - ٩ (أ) متساوية مسألة ثنائى القطب الكهربى . عزم ثنائى القطب $P = Qd$ يكون فى اتجاه \mathbf{e}_2 . (ب) بالنسبة لنقطة بعيدة P ، $R_2 - R_1 = d \cos \theta$ ، ونجد أن R_2 ، R_1 أساسيا موازية لـ \mathbf{e}_2 .

وثنائى القطب مبين فى شكل ٤ - ٩ . النقطة البعيدة P موصوفة بالاحداثيات الكروية r ، θ و $\phi = 90^\circ$ ، نظرا للتماثل السمتى . الشحنتان النقطيتان الموجبة والسالبة لهما مسافة فاصلة d واحداثيات كرتيزية $(0, 0, 1/2 d)$ و $(0, 0, -1/2 d)$ ، بالترتيب .

وهذا كاف جدا بالنسبة للناحية الهندسية . ماذا يجب أن نعمل بعد ذلك ؟ هل يجب أن نُوجد شدة المجال الكهربى الكلى بجمع المجالات المعروفة لكل شحنة

نقطة ؟ . هل من الأسهل أن نوجد مجال الجهد الكلى أم لا ؟ فى أى من الحالتين ، بعد إيجاد أحدهما ، سنوجد الآخر منه قبل تسمية المسألة محلولة .
إذا اخترنا إيجاد E أولا ، سيكون لدينا مركبتان لتبعهما فى الاحداثيات الكروية (التماثل يبين أن E_ϕ صفر) ، وحينئذ الطريقة الوحيدة لإيجاد V من E هى باستخدام التكامل الخطى .

هذه الخطوة الأخيرة تشتمل على تعيين مرجع صفرى مناسب للجهد ، لأن التكامل الخطى يُعطينا فقط فرق الجهد بين النقطتين عند نهايات مسار التكامل .

وفى الناحية الأخرى ، تعيين V أولا ، وهى كمية واحدة ، وليست متجه ، ولها تعبير أبسط قليلا فى حالة شحنة نقطية واحدة ، متبوعة بعملية التدرج لإيجاد E . تبدو أنها مسألة أسهل بكثير .

وباختيار هذه الطريقة الأسهل ، ندع المسافات من Q و $-Q$ الى P تكون R_1 و R_2 ، بالترتيب ، ويكتب الجهد الكلى كما يلى

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$$

لاحظ أن المستوى $Z = 0$ ، فى منتصف المسافة بين الشحنتين النقطيتين ، هو المحل الهندسى لنقط لها $R_1 = R_2$ ، ولذلك فجهد صفر ، مثل كل النقط عند مالانهاية .

ونقطة بعيدة ، $R_1 = R_2$ ، وحاصل الضرب $R_1 R_2$ فى المقام يمكن أن يستبدل بـ r^2 . على أنه ، لا يمكن عمل التقريب فى البسط دون الحصول على الاجابة عديمة الأهمية أن مجال الجهد يقترب من الصفر كلما بعدنا جدا عن ثنائى القطب . وبالرجوع أقرب قليلا من ثنائى القطب ، نرى من شكل ٤ - ٩ أن $R_2 - R_1$ يمكن أن تُقرب بسهولة جدا إذا فرض أن R_2 و R_1 متوازيان ،

$$R_2 - R_1 \approx d \cos \theta$$

وحينئذ تكون النتيجة النهائية

$$(٣٤) \quad V = \frac{Qd \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

ومرة أخرى نلاحظ أن المستوى $z = 0$ ($\theta = 90$) يكون عند جهد صفرى .

باستخدام علاقة التدرج فى الاحداثيات الكروية ،

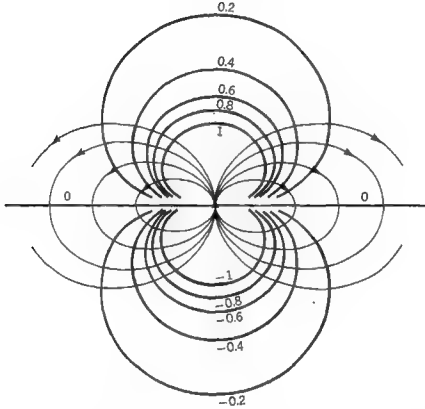
$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial r} \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi \right)$$

نحصل على

$$(٣٥) \quad E = - \left(- \frac{Qd \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{a}_r - \frac{Qd \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{a}_\theta \right)$$

أو

$$(٣٦) \quad E = \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \mathbf{a}_r + \sin \theta \mathbf{a}_\theta)$$



شكل ٤ - ١٠ المجال الكهروستاتيكي لثنائي قطب نقطى عزمه في اتجاه θ . ستة أسطح متساوية - الجهد مميزة بقيمة نسبة V .

وهذه هي مجالات ثنائي القطب البعيدة المرغوبة ، حصل عليها بقدر قليل جدا من العمل . وأى طالب عنده عدة ساعات ليقضيها يمكنه أن يحاول حل المسألة في الاتجاه العكسى ، والمؤلف يعتبر الطريقة من الطول والإسهاب حتى أنه لا يجدر احتوائها هنا ولو حتى للتوضيح .

وللمحصل على تخطيط لمجال الجهد ، نختار ثنائي قطب أن $Qd/(4\pi\epsilon_0) = 1$ وحينئذ $\cos \theta = V/r^2$ والمخطوط السميكة في شكل ٤ - ١٠ تبين تساويات - الجهد التي

لها V تساوى $0, \pm 0.2, \pm 0.4, \pm 0.6, \pm 0.8, \pm 1$. كما هو مبين . ومحور ثنائي القطب رأسى والشحنة الموجبة عند القمة . ويُحصل على خطوط الانسياب للمجال الكهري بتطبيق طرق القسم $\psi - \psi$ فى الاحداثيات الكروية ،

$$\frac{E_\theta}{E_r} = \frac{r}{dr} \frac{d\theta}{d\theta} = \frac{\sin \theta}{2 \cos \theta}$$

أو

$$\frac{dr}{r} = 2 \cot \theta d\theta$$

التي نحصل منها على

$$r = C_1 \sin^2 \theta$$

وخطوط الانسياب الرفيعة المينة فى شكل ٤ - ١٠ هى لـ C_1 تساوى $2, 1.5, 1$ و 2.5

يمكن تبسيط مجال الجهد لثنائى القطب ، معادلة (٣٤) ، باستخدام عزم ثنائى القطب . دعنا أولا نرسم لطول المتجه الموجب من $-Q$ الى $+Q$ بـ d ونُعرف عندئذ هزم ثنائى القطب بأنه Qd ونُخصص لها الرمز p . وعلى ذلك

$$(٣٧) \quad p = Qd$$

ولأن $d \cdot a_r = d \cos \theta$ ، فإننا نحصل على

$$(٣٨) \quad V = \frac{p \cdot a_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

هذه النتيجة يمكن أن تعمم كالتالى

$$(٣٩) \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cdot \frac{r - r'}{|r - r'|}}{|r - r'|^2}$$

حيث r تحدد موقع نقطة المجال P و r' تعين مركز ثنائى القطب . معادلة (٣٩) لاتعتمد على أى نظام إحداثيات .

عزم ثنائى القطب p سيظهر مرة أخرى عندما نناقش المواد العازلة . ولأنه يساوى حاصل ضرب الشحنة والبعد الفاصل ، فلا عزم ثنائى القطب ، ولا الجهد سوف يتغير ، كلما زادت Q ونقصت d ، بشرط أن يبقى حاصل الضرب ثابتا . الحالة النهائية لثنائى القطب نقطى تتحقق عندما ندع d تقترب من الصفر و Q تقترب من مالا نهاية بحيث يكون حاصل الضرب p محدودا .

ويتوجه انتباهنا إلى المجالات المحصلة ، فإنه لمن المهم أن نلاحظ أن مجال الجهد الآن يتناقص كعكس مربع المسافة ، ويتناقص شدة المجال الكهربى كعكس مكعب المسافة من ثنائى القطب . ويضعف كل مجال بمعدل أكبر من نظيره للشحنة النقطية ، ولكن هذا ليس أكثر مما يجب أن نتوقع لأن الشحنات المتضادة تظهر أقرب لبعضها عند المسافات الأكبر ، وتتصرف أكثر مثل شحنة نقطية واحدة ذات $O C$.

والتنظيمات المتماثلة لأعداد أكبر من الشحنات النقطية تنتج مجالات تتناقص كعكس قوى أعلى وأعلى لـ r . وتوزيعات الشحنة هذه تسمى متعددة الأقطاب ، وهى تستخدم فى متسلسلة لانهاية لتقريب تشكيلات شحنة أكثر تعقيدا .

ت ٤ - ٩ ثنائى قطب عند نقطة الأصل فى فضاء حر له عزم مقداره :

$$C.m \quad 400\pi_0(0.6a_x - 0.75a_y + 0.8a_z) . \text{ أوجد الجهد عند :}$$

$$(أ) P_A(0,0,5) , (ب) P_B(0,5,0) , (ج) P_C(5,0,0) , (د) P_D(2,3,4) .$$

$$الاجابة : 3.2V , -3V , 2.4V , 1.597V .$$

ت ٤ - ١٠ ثنائى قطب فى فضاء حر مكون من شحنة مقدارها 1 nC عند $(0,0,0.01)$ و 1 nC عند $(0,0,-0.01)$ أوجد عند نقطة $(0,0,0)$: E (أ) : $P(r=0.2, \theta=45^\circ, \phi=0)$ ، E (ب) $|E|$ (ج) مقدار E الذى سوف ينتج من الشحنة $1 \text{ nC} +$ وهى تعمل بمفردها .

$$الاجابة : 15.89a_0V/m + 31.8a_x + 35.5V/m , 241V/m .$$

٤ - ٨ كثافة الطاقة فى المجال الكهروستاتيكي :

لقد قدمنا مفهوم الجهد باعتباره الشغل المبذول ، أو الطاقة المستنفذة ، فى تحريك شحنة نقطية فى مجال كهربى ، والآن يجب أن نربط الأطراف السائبة لتلك المناقشة بتتبع أثر سريان الطاقة خطوة واحدة أبعد .

إن إحضار شحنة موجبة من ما لانهاية فى مجال شحنة موجبة أخرى يتطلب شغلا ، هذا الشغل يبذل بواسطة المنبع الخارجى المحرك للشحنة . دعنا نتخيل أن المنبع الخارجى يحمل الشحنة حتى نقطة قريبة من الشحنة الثابتة ، ثم يُمسكها هناك . الطاقة يجب أن تحفظ ، والطاقة المستنفذة فى إحضار هذه الشحنة لموضعها تمثل الآن طاقة جهد ، لأنه إذا رفع المنبع الخارجى قبضته عن الشحنة ، فإنها ستكتسب عجلة متباعدة عن الشحنة الثابتة ، مكتسبة طاقة حركة لذاتها والقدرة على عمل شغل .

ولكى نوجد طاقة الجهد الموجودة فى نظام شحنات ، يجب أن نوجد الشغل المبذول بواسطة منبع خارجى فى وضع الشحنات فى أماكنها .

ويمكننا أن نبدأ بتصور كون فارغ . فإحضار شحنة Q_1 من مالا نهاية إلى أى موضع لا يتطلب شغلا ، لعدم وجود مجال هناك ^(١) . ووضع Q_2 عند نقطة فى مجال Q_1 يتطلب قدرا من الشغل معطى بحاصل ضرب الشحنة Q_2 والجهد عند تلك النقطة نتيجة Q_1 . فإذا رمزنا لهذا الجهد بـ $V_{2,1}$ ، حيث يبين الرمز السفلى الأول الموضع والرمز السفلى الثانى المنبع ، أى أن $V_{2,1}$ هو الجهد عند موضع Q_2 نتيجة Q_1 فحينئذ

الشغل لوضع Q_2 $V_{2,1} = Q_2$ وبالمثل ، يمكننا التعبير عن الشغل المطلوب لوضع كل شحنة إضافية فى مجال أولئك الموجودين بالفعل :

$$\text{الشغل لوضع } Q_3 \quad Q_3 V_{3,1} + Q_3 V_{3,2} = Q_3$$

$$\text{الشغل لوضع } Q_4 \quad Q_4 V_{4,1} + Q_4 V_{4,2} + Q_4 V_{4,3} = Q_4$$

الخ . والشغل الكلى يحصل عليه باضافة كل مساهمة :

$$\text{الشغل الكلى للوضع} = \text{طاقة جهد المجال} = W_E$$

$$(٤٠) \quad W_E = Q_2 V_{2,1} + Q_3 V_{3,1} + Q_3 V_{3,2} + Q_4 V_{4,1} + Q_4 V_{4,2} + Q_4 V_{4,3} + \dots$$

بملاحظة صورة حد معثل فى المعادلة السابقة ،

$$Q_3 V_{3,1} = Q_3 \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{13}} = Q_1 \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 R_{31}}$$

حيث يمثل كل من R_{31} و R_{13} المسافة المقياسية بين Q_1 و Q_3 ، ونرى أنه كان ممكنا كتابتها $Q_1 V_{1,3}$ بنفس الصيغة . وإذا استبدل كل حد فى تعبير الطاقة الكلية بمساويه ، نحصل على

$$(٤١) \quad W_E = Q_1 V_{1,2} + Q_1 V_{1,3} + Q_2 V_{2,3} + Q_1 V_{1,4} + Q_2 V_{2,4} + Q_3 V_{3,4} + \dots$$

وجمع تعبيرى الطاقة (٤٠) و (٤١) يعطينا فرصة لتبسيط النتيجة قليلا :

$$\begin{aligned} 2W_E = & Q_1(V_{1,2} + V_{1,3} + V_{1,4} + \dots) \\ & + Q_2(V_{2,1} + V_{2,3} + V_{2,4} + \dots) \\ & + Q_3(V_{3,1} + V_{3,2} + V_{3,4} + \dots) \\ & + \dots \end{aligned}$$

(١) على أن ، شخصا ما فى الشغل عند مالا نهاية عليه ان يعمل شبة لانهائية من الشغل لخلق الشحنة النقطية فى المقام الأول ١ . ما كمية الطاقة المطلوبة لنضم نصفى - شحنة . حتى ينطبقا ليكونا وحدة شحنة ؟

لأن كل مجموع للجهود بين الأقواس هو الجهد المتضام نتيجة كل الشحنات عدا الشحنة عند النقطة التي يوجد عندها هذا الجهد المتضام . ويتميز آخر ،

$$V_{1,2} + V_{1,3} + V_{1,4} + \dots = V_1$$

وهو الجهد عند موضع نتيجة وجود Q_2 ، Q_3 ، ولذلك يكون لدينا

$$(42) \quad W_E = \frac{1}{2} (Q_1 V_1 + Q_2 V_2 + Q_3 V_3 + \dots) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{m=N} Q_m V_m$$

ولكى نحصل على تعبير للطاقة المختزنة في منطقة توزيع شحنة متصل ، نستبدل ρdv بكل شحنة ، ويصبح المجموع تكاملا ،

$$(43) \quad W_E = \frac{1}{2} \int_{vol} \rho V dv$$

المعادلات (42) و (43) تتيح لنا أن نجد طاقة الجهد الكلية الموجودة في نظام شحنات نقطية أو كثافة شحنة حجمية موزعة . ويمكن بسهولة كتابة تعبيرات مماثلة بدلالة كثافة شحنة خطية أو سطحية . وعادة نُفضل أن نستخدم (43) وندها تمثل كل نماذج الشحنة المختلفة التي قد يجب علينا اعتبارها . وهذا يمكن أن يعمل دائما باعتبار أن الشحنات النقطية ، كثافة الشحنة الخطية ، أو كثافة الشحنة السطحية توزيعات متصلة لكثافة شحنة حجمية خلال مناطق صغيرة جدا . وسنوضح مثل هذا الأسلوب بمثال بعد قليل .

وقبل أن نشرع في أي تفسير لهذه النتيجة ، يجب أن ندرس أسطرا قليلة من تحليل المتجهات الأكثر صعوبة ونحصل على تعبير مكافئ لـ (43) ولكنه مكتوب بدلالة D و E .

ونبدأ بجعل التعبير أطول قليلا . باستخدام معادلة « ماكسويل » الأولى ، نستبدل ρ بما يساويها $\nabla \cdot D$. ونستفيد من متطابقة اتجاهية صحيحة لأي دالة مقياسية V وأي دالة اتجاهية D ،

$$(44) \quad \nabla \cdot (VD) \equiv V(\nabla \cdot D) + D \cdot (\nabla V) .$$

والتي يمكن بسهولة أن تُثبت بالفك في الاحداثيات الكرتيزية . وعلى ذلك نحصل ، بالتتابع ، على

$$\begin{aligned} W_E &= \frac{1}{2} \int_{vol} \rho V dv = \frac{1}{2} \int_{vol} (\nabla \cdot D) V dv \\ &= \frac{1}{2} \int_{vol} [V \cdot (VD) - D \cdot (\nabla V)] dv \end{aligned}$$

وباستخدام نظرية الانفراج من الفصل الأخير ، يحول التكامل الحجمى الأول فى المعادلة الأخيرة الى تكامل سطحى مغلقة ، حيث يحيط السطح المغلق بالحجم المعتبر . هذا الحجم ، الذى ظهر أولا فى (٤٣) ، يجب أن يحتوى على كل شحنة ، وعلى ذلك لا يمكن أن يكون هناك شحنات خارج هذا الحجم . ولذلك يمكننا أن نعتبر الحجم لانهاى الامتداد إذا رغبنا . ونحصل على

$$W_E = \frac{1}{2} \oint_S (VD) \cdot dS - \frac{1}{2} \int_{\text{vol}} \mathbf{D} \cdot (\nabla V) dv$$

التكامل السطحى يساوى صفرا ، لأن على هذا السطح المغلق المحيط بالكون نرى أن V تقترب من الصفر على الأقل كانهدار $1/r$ (تبدو الشحنات كشحنة نقطية من هناك) ، D تقترب من الصفر على الأقل كانهدار $1/r^2$ ، بينما عنصر السطح التفاضلى ، يظهر أكثر فأكثر مثل جزء من كرة ، متزايدة فقط كـ r^2 . لذلك يقترب المكامل من صفر كانهدار $1/r$ على الأقل . وفى النهاية يكون المكامل والتكامل صفرا . بتعويض $\mathbf{E} = -\nabla V$ فى التكامل الحجمى المتبقى ، نحصل على إجابتنا ،

$$(٤٥) \quad W_E = \frac{1}{2} \int_{\text{vol}} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dv = \frac{1}{2} \int_{\text{vol}} \epsilon_0 E^2 dv$$

دعنا الآن نستخدم هذا التعبير الأخير لنحسب الطاقة المخزنة فى المجال الكهروستاتيكي لقسم من كابل أو مكثف محورى طوله L . عندنا من الفصل السابق

$$\mathbf{E} = \frac{a\rho_S}{\epsilon_0 \rho} \mathbf{a}_\rho$$

حيث ρ_S هى كثافة الشحنة السطحية على الموصل الداخلى ، الذى نصف قطره a . وعلى ذلك ،

$$W_E = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_a^b \epsilon_0 \frac{a^2 \rho_S^2}{\epsilon_0^2 \rho^2} \rho d\rho d\phi dz = \frac{\pi L a^2 \rho_S^2}{\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}$$

وهذه النتيجة نفسها يمكن الحصول عليها من (٤٣) . نختار الموصل الخارجى كمرجعنا الصفرى للمجهود ، على ذلك يكون جهد الاسطوانة الداخلية

$$V_a = - \int_b^a E_\rho d\rho = - \int_b^a \frac{a\rho_S}{\epsilon_0 \rho} d\rho = \frac{a\rho_S}{\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}$$

يمكن أن تُفسر كثافة الشحنة السطحية ρ_S عند $\rho = a$ على أنها كثافة شحنة حجمية $\rho_v = \rho_S/t$ ، ممتدة من $\rho = a - 1/2 t$ إلى $\rho = a + 1/2 t$ ، حيث $t \ll a$. لذلك يكون المكامل فى (٤٣) صفرا فى كل مكان بين الاسطوانتين (حيث تكون كثافة الشحنة

الحجمية صفراً) ، وكذلك على الاسطوانة الخارجية (حيث يكون الجهد صفراً) .
ولذلك يجرى التكامل فقط خلال القشرة الاسطوانية عند $\rho = a$

$$W_E = \frac{1}{2} \int_{\text{vol}} \rho_s V dV = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{a-t/2}^{a+t/2} \frac{\rho_s}{t} \frac{a\rho_s}{\epsilon_0} \ln \frac{b}{a} \rho d\rho d\phi dz$$

ومنها

$$W_E = \frac{a^2 \rho_s^2 \ln(b/a)}{\epsilon_0} \pi L$$

مرة أخرى

ويتخذ هذا التعبير صورة مألوفة أكثر إذا عرفنا أن الشحنة الكلية على الموصل الداخلي هي $Q = 2\pi a L \rho_s$. ويضم ذلك مع فرق الجهد بين الاسطوانتين ، V_a ، نرى أن

$$W_E = \frac{1}{2} Q V_a$$

التي يجب أن تكون مألوفة على أنها الطاقة المخزنة في مكثف .

والسؤال عن أين تُخزن الطاقة في مجال كهربي لم يجب عليه بعد . وطاقة الجهد لايمكن أبداً أن تربط تماماً بدلالة موضع فيزيائي . أحدهم يرفع قلمًا ، يكتب القلم طاقة جهد . هل تُخزن الطاقة في جزيئات القلم ، في مجال الجاذبية بين القلم والأرض أم في مكان ما غامض ؟ . هل تُخزن الطاقة في مكثف في الشحنات نفسها ، في المجال ، أم أين ؟ لا يستطيع أحد أن يقدم أى برهان لرايه أو لرايها الشخصى ، ويجب أن يُترك تقرير هذا الأمر للفلاسفة .

وتسهل نظرية المجال الكهرومغناطيسية الاعتقاد بأن طاقة أى مجال كهربي أوتوزيع للشحنة مخزن في المجال نفسه ، لأنه إذا أخذنا (٤٥) ، وهو تعبير مضبوط وصحيح بصرامه ،

$$W_E = \frac{1}{2} \int_{\text{vol}} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dv$$

ونكتبه على أساس تفاضلى ،

$$dW_E = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dv$$

أو

$$(٤٦) \quad \boxed{\frac{dW_E}{dv} = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}}$$

نحصل على كمية $1/2 D.E$ ، التي لها وحدات كثافة طاقة ، أو جول للمتر المكعب .
ونعرف أننا إذا كالمنا كثافة الطاقة هذه على كل الحجم المحتوى على المجال ، فإن
النتيجة تساوى حقا الطاقة الكلية الموجودة ، ولكن ليس لدينا تبرير لقول أن الطاقة
المختزنة في كل عنصر حجم تفاضلى dv هي $1/2 D.E dv$ أكثر مما لدينا عند النظر الى
(٤٣) والقول أن الطاقة المختزنة هي $1/2 \rho V dv$. ولكن التفسير الذى تقدمه (٤٦)
مناسب ، ونستخدمه الى أن يثبت خطأه .

ت ٤ - أوجد الطاقة المختزنة في فضاء حر في المنطقة الكروية $r \leq 10$ لمجال الجهد
(أ) $V = 100r^2 \sin \theta$ (ب) $V = 100r^2$

الاجابة : 33.4mJ , 44.5mJ .

مراجع مقترحة :

1 - Attwood, S.S.: "Electric and Magnetic Fields" 3d ed., John Wiley & Sons, Inc., New York, 1949.

هناك عدد كبير من خرائط المجال المرسومة جيدا لتوزيعات شحنة مختلفة بما فيها مجال
ثنائى القطب . تحليل المتجهات غير مستخدم

2 - Skilling, H.H.:
(انظر المراجع المقترحة للفصل الثالث)
التدرج مشروح على 19 — 21 pp.
(انظر المراجع المقترحة للفصل الأول)

3 - Thomas, G.B., Jr., and R.L. Finneg :

المشتقة الاتجاهية والتدرج مقدمين على 599 — pp. 59.

مسائل :

١ - ماهو عنصر الطاقة التزايدى (in pico joules) التى يُحتاج اليها لتحريك شحنة $1 \mu c$
فى المجال $E = 12a_p - 20a_\phi + 10a_z$ V/m من النقطة $P(8, 30^\circ, 11)$
إلى النقطة : (أ) $(9, 30^\circ, 11)$ ، Q_A ، (ب) $(8, 30^\circ, 10)$ ، Q_B
(ج) $(8, 30, 11)$ ، Q_C ، (د) $(10, 35^\circ, 8)$ ، Q_D ؟

٢ - مجال كهبرى معطى بـ :

$$E = -10e^y (\sin 2za_x + x \sin 2za_y + 2x \cos 2za_z) V/m$$

(أ) أوجد $|E|$ عند $P(5, 0, \pi/12)$. (ب) ماكمية الشغل المبذول فى تحريك شحنة
مقدارها 2C مسافة عنصرية تزايدية مقدارها 1 mm من P فى اتجاه a_x ؟ (ج) a_y ؟
(د) a_z ؟ (هـ) $(a_x + a_y + a_z)$ ؟

٣ - أوجد قيمة $\int F \cdot dL$ لـ $F = (x^2 + 5yz)a_x - x^2a_y + x^2yza_y$ من $(1, 2, 3)$ الى
(6, 1, 2) على طول المسار المكون من ، (أ) الأجزاء الثلاثة الخطية المستقيمة :

و $x = 11 - 5y$.
 ٤ - د $G = 2x^2y_a - (4x + z)a_y$ وأوجد قيمة التكامل الخطي $\int G \cdot dL$ من نقطة

ابتدائية $P(1,1,1)$ إلى نقطة نهائية $Q(3,5,1)$ مستخدما المسار : (أ) الخط المستقيم $z=1, y=2x-1$ ، (ب) القطع المكافئ : $z=1, 2y=x^2+1$.
 ٥ - إذا أعطيت $E = 10ya_x + 10xa_y - 2a_z$ V/m ، عين الشغل المتضمن في حمل شحنة مقدارها 3C من $(0, -2, 8)$ إلى $(5, 3, 23)$ على طول المسار :
 (أ) $r^3 = 2x^2 - y^2, z = x + 4$ ، (ب) الخط المستقيم المباشر .

٦ - إذا أعطيت المجال الكهربى فى الأحداثيات الكروية :
 $E = 60 (\cos \theta a_r + 0.5 \sin \theta a_\theta)$ V/m
 حمل شحنة 1C من :

(أ) $B(2, \theta = 120^\circ, \phi = 0)$ إلى $A(3, \theta = 60^\circ, \phi = 90^\circ)$ على طول سلسلة من أجزاء المسار التى عليها r و ϕ مثبتين أولا ، r و θ ، وأخيرا θ و ϕ ؟
 ٧ - ثلاث شحنات نقطية متماثلة كل منها $4\mu C$ موضوعة عند أركان مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه $0.5mm$ فى فضاء حر . ما مقدار الشغل الذى يجب أن يبذل لتحريك احدى الشحنات الى نقطة عند منتصف المسافة بين الشحنتين الأخرين ؟
 ٨ - إذا أعطيت شدة المجال الكهربى $E = [10/(x^2 + y^2)](xa_x + ya_y) - 2a_z$ V/m ، د E ، الجهد يكون $10V$ عند $(3, 4, 5)$. أوجد V عند $(6, -8, 7)$.

٩ - إذا كان $E = 50z \sin \phi a_\phi + 50z \cos \phi a_\theta + 50 \rho \sin \phi a_z$ V/m والجهد عند نقطة الأصل مأخوذ على أنه صفر ، أوجد $V(2, 150^\circ, 3)$ باستخدام المسار : (أ) جزءان مستقيما الخط : $\phi = 150^\circ, \rho = 2$ و $z = 0$ ، (ب) $z = 18\phi/5\pi, \rho = 12\phi/5\pi$.

١٠ - لوح منتظم من الشحنة ، $\rho_{z1} = 40 \epsilon_0$ C/m² موضع فى المستوى $x=0$ فى فضاء حر . (أ) أوجد V عند $P(7, -3, 1)$ إذا كان $V=0$ عند $Q(2, 4, 6)$. (ب) لوح شحنة ثان $\rho_{z2} = -15 \epsilon_0$ C/m² موجود عند المستوى $y=6$. مرة أخرى أوجد V عند $P(7, -3, 1)$ إذا كان $V=0$ عند $Q(2, 4, 6)$.

١١ - شحنة خطية منتظمة ذات $0.6 nC/m$ تقع على طول المحور z فى فضاء حر . أوجد الجهد عند $P(3, 4, 2)$ إذا كان : (أ) $V=0$ عند $A(2, -9, 3)$ ، (ب) $V=24V$ عند $B(10, 24, 1)$. أوجد V_{AB} إذا كان : (ج) $V_p = 41V$ ، (د) $V_p = 0$.

١٢ - شحنات نقطية $Q_A = 5nC, Q_B = -2nC$ و $Q_C = 1nC$ موضوعة فى فضاء حر عند $P_A(1, 2, -2), P_B(-2, 4, 1)$ و $P_C(3, 0, 2)$ ، بالترتيب . أوجد الجهد عند $P(-3, -2, 4)$ إذا كان : (أ) $V=0$ عند مالانهاية ، (ب) $V=5V$ عند مالانهاية ، (ج) $V=0$ عند $P_R(0, 5, -2)$.

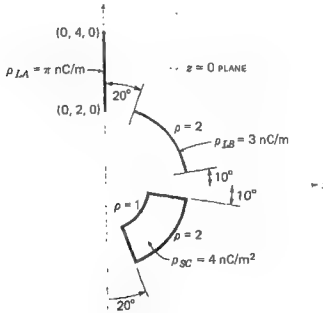
١٣ - خط شحنة ، $\rho_L = 10\pi\epsilon_0 C/m$ ، يقع على طول المحور x في فضاء حر ، بينما شحنة نقطية $Q = 4\pi\epsilon_0 C$ ، موضوعة عند $(2, 4, -1)$. وثلاث نقاط محددة بـ $A(1, -1, 2)$ ، $B(4, 0, 5)$ و $C(-2, -5, 3)$. (أ) أوجد V_{AB} . (ب) أوجد V_C إذا كان $V_B = 0$ (ج) أوجد V_C إذا كان $V_A = 20V$.

١٤ - أوجد V عند $P(0, 0, z)$ لكل من هذه التوزيعات الشحنة في المستوى $z = 0$ في فضاء حر : (أ) ρ_S منتظمة على القرص $0 \leq \rho \leq a$ ، (ب) ρ_S منتظمة على حلقة مستوية ، $a \leq \rho \leq b$ ، (ج) ρ_S منتظمة على القطاع ، $\alpha \leq \phi \leq \beta$ ، $0 \leq \rho \leq a$.

١٥ - الجزء الخطي $0 \leq x \leq 1$ ، $y = 2$ ، $z = 3$ ، يحتوي كل كثافة الشحنة الخطية $\rho_L = 20x \text{ nC/m}$ في فضاء حر . (أ) عين V عند نقطة الأصل . (ب) ماذا ستكون الاجابة اذا وزعت نفس الشحنة الكلية بانتظام على الجزء الخطي ؟ (ج) ماذا ستكون النتيجة إذا ركزت نفس الشحنة الكلية كشحنة نقطية عند مركز الجزء الخطي ؟

١٦ - وزعت شحنة بدون انتظام على محور y السالب في فضاء حر بالصورة : $\rho_L = I/(y^2 + 1) \text{ nC/m}$ - بفرض $V = 0$ عند المالانهاية ، أوجد V عند : (أ) $(0, 1, 0)$ ، (ب) $(1, 0, 0)$.

١٧ - يبين شكل ٤ - ١١ ثلاثة توزيعات شحنة منفصلة في فضاء حر . (أ) أوجد الشحنة الكلية لكل توزيع . (ب) أوجد الجهد عند $P(0, 0, 5)$ بسبب تأثير كل من توزيعات الشحنة الثلاثة بمفردها . (ج) أوجد V_P .



شكل ٤ - ١١ انظر مسألة ١٧

١٨- (أ) كثافة شحنة سطحية $\rho_s = 100\pi \text{ } \epsilon_0 \text{ C/m}^2$ موضوعة على السطح المربع ،
 $-1 \leq x \leq 1$ ، $-1 \leq y \leq 1$ ، $z = 0$ ، في فضاء حر . أوجد V عند $(0,0,1)$.
 (ب) أعد $\rho_s = 100\pi \epsilon_0 |x| \text{ C/m}^2$.

١٩- بمعرفة أن $V = 2x^2y + 20z - 4\ln(x^2 + y^2)$ في فضاء حر ، عين قيما عند $P(6, -2.5, 3)$:
 (أ) V ، (ب) E ، (ج) D ، (د) ρ .

٢٠- إذا أعطيت مجال الجهد في فضاء حر وإحداثيات كروية ، $V = 100r^3 \sin \theta$ ،
 أوجد E و ρ .

٢١- في داخل مكعب وحدى $|x|$ ، $|y|$ و $|z| \geq 0.5$ ، يعطى الجهد بـ

$$V = 80x - 60y + 45z + 130yz + 50zx + 80(x^2 - y^2) + 115 + 300 \ln(y^2 - 4y + x^2 + 6z + 13) \text{ V}$$

أوجد : (أ) $V(0,0,0)$ ، (ب) $E(0,0,0)$ ، (ج) $\rho(x,y,z)$ ، (د) الشحنة الكلية داخل المكعب الوحدى .

٢٢- في الاحداثيات الاسطوانية ، مجال الجهد في فضاء حر معطى بـ $V = -100\rho^2 V$ ،
 $0 \leq \rho \leq 4 \text{ m}$ ، $V = -100 - 100 \ln \rho$ ، $\rho \geq 1$. للمسافة $0 \leq \rho \leq 4$ ،
 ارسم تخطيطيا : (أ) $v(\rho)$ ، (ب) $E_\rho(\rho)$ ، (ج) $\rho_v(\rho)$.

٢٣- السطح المعرف بالمعادلة $x^2 + y^2 + z = 1,000$ حيث x, y, z موجبة ، هو سطح
 متساوى- الجهد عليه الجهد يساوى $200V$ فإذا كان $50V/m = |E|$ عند النقطة
 $P(7.25, 32)$ على السطح ، أوجد E هناك .

٢٤- ثنائى قطب عزمه $p = 2a_x + 5a_y - 3a_z \text{ nC.m}$ ، موضوع عند $P(1,1,1)$ في
 فضاء حر . (أ) أحصل على تعبير للجهد $V(x, y, z)$ عند $A(x,y,z)$ وقدر قيمته
 عند $(5,2, -1)$ ، (ب) أوجد E_x عند $(5,2, -1)$.

٢٥- ثنائى قطب ، $p_1 = 20a_z \text{ nC.m}$ ، عند نقطة الأصل في فضاء حر ، وثنائى قطب
 ثانى ، $p_2 = -50a_z \text{ nC.m}$ ، عند $(0,0,10)$. أوجد V و E عند نقطة منتصف
 المسافة بين ثنائى القطب .

٢٦- ثنائى قطب في فضاء حر مكون من شحنة $1\mu\text{C} +$ عند $(0,0,10^{-3})$ و $1\mu\text{C} -$ عند
 $(0,0, -10^{-3})$. (أ) ارسم تخطيطيا تقاطع المستوى $x = 0$ والسطح متساوى-
 الجهد المار بالنقطة $(0,1,1)$. (ب) ارسم تخطيطيا خط الانسياب في المستوى
 $x = 0$ المار بالنقطة $(0,1,1)$.

٢٧- ثنائى قطب له $p = 10 \epsilon_0 a_z \text{ C.m}$ موضوع عند نقطة الأصل . ما هى معادلة السطح
 الذى عليه $E_x = 0$ ولكن $|E| \neq 0$ ؟

٢٨- إذا أعطيت ثلاثة ثنائيات قطب عند نقطة الأصل في فضاء حر لها عزوم
 $400\pi \epsilon_0 a_x \text{ C.m}$ و $400\pi \epsilon_0 a_y \text{ C.m}$ و $400\pi \epsilon_0 a_z \text{ C.m}$ أوجد V عند :
 (أ) $(0,0,1)$ ، (ب) $(1,0,0)$ ، (ج) $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ ، (د)
 $(1,2,3)$.

٢٩- أوجد طاقة الوضع المخزنة في كل من هذه التشكيلات الشحنة في فضاء حر :

(أ) شحنة Q عند كل ركن لمثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه d ، (ب) شحنة Q عند كل ركن لمربع طول ضلعه d .

٣٠- مجال جهد كهروستاتيكي معطى بـ $V = 1,000 \sqrt{r} V$. ما مقدار الطاقة المخزنة داخل كرة نصف قطرها الوحدة متركزة عند نقطة الأصل في فضاء حر ؟

٣١- مجال جهد في فضاء حر معطى بـ $V = 50/r$. (أ) بين أن $\rho = 0$ لـ $a > r > b$. (ب) أوجد الطاقة المخزنة في المنطقة $a < r < b$.

٣٢- كثافة شحنة في فضاء حر معطاة كدالة لنصف القطر بالصورة : $\rho_v = 0$

لـ $0 \leq \rho \leq 0.1$ ، $\rho = 10^{-8} / \rho$ لـ $0.1 < \rho < 0.2$ و $\rho_v = 0$ لـ $\rho > 0.2$ ، حيث

استخدمت وحدات SI . أوجد : (أ) $D_p(\rho)$ (ب) $E_p(\rho)$ (ج) $V(\rho)$ ، إذا

كان $V(0.2) = 0$. أوجد الطاقة الكهروستاتيكية المخزنة لكل وحدة طول في

المنطقة : (د) $0 \leq \rho < 0.1$ ، (هـ) $0.1 < \rho < 0.2$ ، (و) $\rho > 0.2$.

٣٣- توجد كثافة شحنة حجمية في المنطقة الاسطوانية $0 \leq \rho \leq 1 \text{ mm}$ بالكثافة

$\rho_v = 2\rho^{1.6}$ ، حيث ρ بالمتر ، و $\rho_v = 0$ في أى مكان آخر . (أ) استخدم قانون

« جاوس » لتوجد D_p لـ $0 \leq \rho \leq 1 \text{ mm}$. (ب) أعد لـ $\rho \geq 1 \text{ mm}$. (ج) دع

$V = 0$ عند $\rho = 1 \text{ mm}$ وأوجد V عند $\rho = 0$ و $\rho = 1 \text{ m}$.

الفصل الخامس

الموصلات ، الموازل ، والسعة

نعتزم في هذا الفصل النظر في تطبيق قوانين وطرق الفصول السابقة على بعض المواد التي يجب على المهندس أن يعمل بها . بعد تعريف التيار ، وكثافة التيار ، واستنتاج معادلة الاستمرارية الأساسية ، سنعتبر الموصل ونقدم قانون « أوم » في كل من صورتيه : الميكروسكوبية والماكروسكوبية . وبواسطة هذه النتائج يمكننا حساب قيم المقاومة لقليل من الأشكال الهندسية البسيطة التي قد تتخذها المقاومات . والشروط التي يجب تحقيقها عند حدود الموصل محصور عليها ، وهذه المعرفة تُمكننا من تقديم استخدام الصور .

وبعد اعتبار مختصر لشبه موصل عام ، سنبحث استقطاب المواد العازلة ونُعرف السماحية النسبية ، أو ثابت العازل ، وهو بارامتر هندسى هام . بوجود كلا الموصلات والموازل لدينا ، يمكننا حينئذ أن نضعهم معا لنكون مكثفات . ومعظم محتويات الفصول السابقة سيحتاج إليها لتعيين سعة العديد من المكثفات التي سننشئها .

ومبادئ الكهرومغناطيسية الأساسية التي تعتمد عليها المقاومات والمكثفات هي في الحقيقة موضوع هذا الفصل ، وسوف لا يقدم عضو الحث ، حتى الفصل التاسع .

٥ - ١ التيار وكثافة التيار :

تكون الشحنات الكهربائية المتحركة تيارا . ووحدة التيار هي الأمبير (ampere A) معرف بأنه معدل تحرك شحنة مارة بنقطة اسناد معطاة (أو عبارة بمستوى اسناد معطى بقدر كولوم واحد لكل ثانية . ويرمز للتيار بـ I ، ولذلك

$$(1) \quad I = \frac{dQ}{dt}$$

وعلى ذلك يعرف التيار بأنه « حركة الشحنات الموجبة » مع أن التوصيل في المعادن يحدث عن طريق حركة الالكترونات ، كما سنرى بعد قليل .

وفي نظرية المجال نهتم عادة بالاحداث التي تحدث عند نقطة أكثر منها خلال منطقة كبيرة ، وسنجد مفهوم كثافة التيار ، مقاسا بالأمبير لكل متر مربع (A/m^2) ، أكثر فائدة . وكثافة التيار متجهة^(١) يمثل بـ \vec{J} .

(١) التيار ليس متجهاً ، لأنه من السهل أن تتصور مسألة فيها تيار كل I في موصل مقطعه غير منتظم (مثل كرة) يمكن أن يكون له اتجاه مختلف عند كل نقطة لمقطع سطحى . والتيار في سلك زائد الرفع ، أو تيار فيلى ، يعرف أحيانا كمتجه ، ولكننا عادة نفضل أن تكون غير متناقصين ونعطى الاتجاه للنقطة ، أو المسار ، وليس للتيار .

وعنصر تزايدى للتيار ΔI العابر لعنصر تزايدى للسطح ΔS عموديا على كثافة التيار

هو

$$\Delta I = J_n \Delta S$$

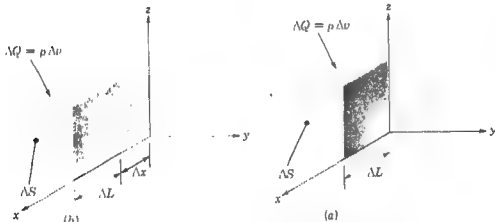
وفى الحالة التى فيها لاتعتمد كثافة التيار على السطح ،

$$\Delta I = J \cdot \Delta S$$

ويحصل على التيار الكلى بتكامل ،

$$(٧) \quad I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

ويمكن أن تُربط كثافة التيار مع سرعة كثافة شحنة حجمية عند نقطة . أعتبر عنصر الشحنة $\Delta Q = \rho \Delta v = \rho \Delta S \cdot \Delta L$ ، كما هو مبين فى شكل ٥ - أ . ولتبسيط الشرح ، دعنا نفرض أن عنصر الشحنة موجه وأحرفه موازية للمحاور الاحداثية ، وأن له مركبة x فقط للسرعة . وفى فترة الزمن Δt ، قد تحرك عنصر الشحنة مسافة Δx ، كما هو مبين فى شكل ٥ - ب .



شكل ٥ - أ عنصر تزايدى للشحنة ، $\Delta Q = \rho \Delta S \Delta L$ ، التى تتحرك مسافة Δx فى زمن Δt نتج فى النهاية مركبة لكثافة التيار مقدارها $J_x = \rho v_x$

بذلك قد حركنا شحنة $\Delta Q = \rho \Delta S \Delta x$. خلال مستوى اسناد عمودى على اتجاه الحركة
فوى تزايد زمنى Δt ، والتيار المحصل هو

$$\Delta I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \rho \Delta S \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

وعندما نأخذ النهاية بالنسبة للزمن ، نحصل على

$$\Delta I = \rho \Delta S v_x$$

حيث تمثل v_x المركبة في اتجاه x للسرعة $V^{(1)}$. وبدلالة كثافة التيار ، نجد

$$J_x = \rho v_x$$

وعامة

$$(3) \quad \boxed{J = \rho v}$$

وهذه النتيجة الأخيرة تبين بوضوح جدا أن شحنة في حالة حركة تكون تيارا . ونسمى هذا النوع من التيار « تيار حمل » ، وتكون ρV كثافة تيار الحمل . لاحظ أن كثافة تيار الحمل مرتبطة خطيا مع كثافة الشحنة وكذلك أيضا مع السرعة . المعدل الكتلي لتدفق السيارات (سيارات لكل قدم مربع لكل ثانية) في نفق هولاندا يمكن أن يزداد اما بالذهاب لسرعات أعلى أو برفع كثافة السيارات لكل قدم مكعب ، فقط اذا كان السائقون قادرين على عمل ذلك .

ت - ٥ - ١ دع $J = 10y^2za_x - 2x^2ya_y + 2x^2za_z$ A/m² وأوجد (أ) التيار الكلي العابر للسطح $x=3$, $2 \leq y \leq 5.2$, $3.8 \leq z \leq 5$. في اتجاه a_x ، (ب) مقدار كثافة التيار عند مركز هذه المساحة ؛ (ج) القيمة المتوسطة لـ J_x على السطح الاجابة : 399A ; 296 A/m² ; 285 A/m² .

٥ - ٢ استمرارية التيار

مع افتراض اننا نقوم بدراسة مجالات استاتيكية في هذا الوقت ، فان ادخال مفهوم التيار يُتيح منطقيا بمناقشة حفظ الشحنة ومعادلة الاستمرارية . ومبدأ حفظ الشحنة ينص ببساطة على أن الشحنات لايمكن أن تُخلق أو تُدمر ، مع أن كميات متساوية من الشحنات الموجبة والسالبة يمكن خلقها في نفس اللحظة ، محصول عليها بالانفصال ، تُدمر ، أو تُفقد باعادة الاتحاد .

وتتبع معادلة الاستمرارية من هذا المبدأ عندما نعتبر أى منطقة محددة بـ سطح مغلق . والتيار خلال السطح المغلق هو

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

(١) الحرف الصغير v مستخدم لكلا الحجم والسرعة . ومع ذلك لاحظ أن السرعة دائما تظهر كمتجه V ، أو مركبة

v_x ، أو مقدار $|V|$ ، بينما يظهر الحجم فقط في صورة نفاضية كـ dV أو ΔV

وهذا السريان الخارج للشحنة الموجبة يجب أن يعادل ينقص للشحنة الموجبة (أو ربما زيادة فى الشحنة السالبة) داخل السطح المغلق . إذا رمز للشحنة داخل السطح المغلق بـ Q_i ، فيكون معدل النقص هو $-dQ_i/dt$ ويتطلب مبدأ احتفاظ الشحنة

$$(4) \quad I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dQ_i}{dt}$$

ربما يستحسن أن نجيب هنا عن سؤال يسأل كثيرا ، « أليس هناك خطأ فى الإشارة ؟ ظننت أن $I = dQ/dt$. » وأن وجود أو غياب إشارة سالبة يعتمد على أى تيار أو شحنة نعتبرها . ففى نظرية الدوائر عادة نقرن سريان التيار فى طرف مكثف مع المعدل الزمنى لزيادة الشحنة على هذا اللوح . والتيار فى (4) تيار سريانه للخارج .

المعادلة (4) هى الصورة التكاملية لمعادلة الاستمرارية ، والصورة التفاضلية ، أو النقطية ، يحصل عليها بتغيير التكامل السطحي الى تكامل حجمى بواسطة نظرية الانفراج ،

$$\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_{vol} (\nabla \cdot \mathbf{J}) dv$$

وبتمثيل الشحنة المحصورة Q_i بالتكامل الحجمى لكثافة الشحنة ،

$$\int_{vol} (\nabla \cdot \mathbf{J}) dv = -\frac{d}{dt} \int_{vol} \rho dv$$

إذا افقنا على أن نبقى السطح ثابتا ، تصبح المشتقة مشتقة جزئية ويمكن أن تظهر داخل التكامل ،

$$\int_{vol} (\nabla \cdot \mathbf{J}) dv = \int_{vol} -\frac{\partial \rho}{\partial t} dv$$

لأن التعبير صحيح لأى حجم ، مهما صغر ، فانه صحيح لعنصر حجم تزايدى ،

$$(\nabla \cdot \mathbf{J}) \Delta v = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta v$$

ومنها نحصل على صورتنا النقطية لمعادلة الاستمرارية ،

$$(5) \quad \boxed{\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}}$$

ويتذكر التفسير الفيزيائى للانفراج ، تبين هذه المعادلة ان التيار ، أو الشحنة لكل ثانية المنفرجة من حجم صغير لكل وحدة حجم يساوى المعدل الزمنى لتناقص الشحنة لكل وحدة حجم عند كل نقطة .

سيكون أول استخدام لنا لهذا المبدأ في القسم ٥ - ٨ عندما ننظر بإيجاز إلى سريان الشحنة من الداخل إلى سطح الموصلات والعوازل .

٥ - ٢ في منطقة بقرب نقطة الأصل ، تكون كثافة التيار في الاتجاه نصف القطرى (للخارج) بقيمة $10r^{-1.5} \text{ A/m}^2$ (أ) ماقدر التيار العابر للسطح الكروى $r = 1 \text{ mm}$ ؟ (ب) أعد لـ $r = 2 \text{ mm}$. (جـ) بأى معدل تزيد ρ عند نقطة عندها $r = 1 \text{ mm}$ ؟ (د) بأى معدل تزيد الشحنة الكلية داخل الكرة $r = 1 \text{ mm}$ ؟

الاجابة : 3.97 A , 5.62 A , $1.581 \times 10^8 \text{ C/m}^3 \cdot \text{S}$, 3.97 C/S . —

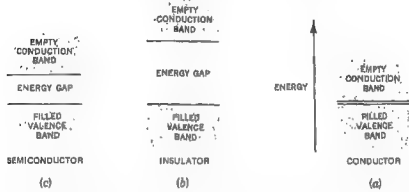
٥ - ٣ الموصلات المعدنية :

يصف الفيزيائيون اليوم سلوك الالكترونات المحيطة بالنواة الذرية الموجبة بدلالة الطاقة الكلية للالكترونات بالنسبة الى مستوى اسناد صفرى لالكترون على بعد لانهاى من النواة . والطاقة الكلية هي مجموع طاقتي الحركة والجهد ، ولأن الطاقة يجب أن تعطى للالكترون لكي يُسحب بعيدا عن النواة ، فان طاقة كل الكترون في الذرة هي كمية سالبة . ومع ان الصورة فيها بعض القصور ، فانه لمن المناسب أن نقرن قيم الطاقة هذه بمدارات محيطة بالنواة ، والطاقات الأكثر سالبية مناظرة للمدارات التى لها نصف قطر أقل . وتبعا لنظرية الكم ، ففي ذرة معطاة مسموح فقط بمستويات طاقة خاصة منفصلة ، أو حالات طاقة ، ولذلك يجب أن يمتص الالكترون أو يطلق كميات منفصلة من الطاقة أو كمات ، بمروره من مستوى الى آخر . وذرة عادية عند درجة حرارة الصفر المطلق لها الكترون محتل كل من طبقات الطاقة السفلى ، مبتدئا من النواة للخارج ومستمر الى أن ينفذ اعداد الالكترونات .

وفي مادة صلبة بللورية ، مثل معدن أوماسة ، تجمع الذرات معا متقاربة ، وتوجد الالكترونات عديدة أكثر ، ويتوافر عديد من مستويات الطاقة المسموح بها بسبب قوى الفعل المتبادل بين الذرات المتجاورة . ونجد أن الطاقات التى يمكن أن تحوزها الالكترونات تجمع في أمدية عريضة ، أو نطاقات "bands" ، وكل نطاق يتكون من مستويات منفصلة عديدة جدا ومتقاربة . عند درجة حرارة الصفر المطلق ، فان المادة الصلبة العادية فيه جميع المستويات مشغولة بالترتيب ، ابتداء من الأقل ، ومتقدما الى أن نوضع جميع الالكترونات . والالكترونات التى لها أعلى (الأقل سالبية) مستويات للطاقة الكترونات التكافؤ ، موضوعة في نطاق التكافؤ . اذا كان هناك مستويات طاقة أعلى مسموح بها في نطاق التكافؤ ، أو اذا اندمج نطاق التكافؤ بنوعه في نطاق توصيل حيثئذ يمكن أن تعطى طاقة حركة اضافية للالكترونات التكافؤ بواسطة مجال خارجي مُتُنَجِّه سريانا الكترونيا . والمادة الصلبة تسمى موصل معدنى نطاق التكافؤ المملوء ، ونطاق التوصيل غير المملوء للموصل عند OK مبيتان في شكل ٥ - ١٢ .

على أنه اذا شغل الالكترون الذى له أعلى طاقة مستوى القمة فى نطاق التكافؤ ، وحدثت فجوة بين نطاق التكافؤ ونطاق التوصيل ، فحينئذ لا يستطيع الالكترون تقبل طاقة اضافية بكميات صغيرة ، وتكون المادة عازلة . وبيان النطاق هذا مبين فى شكل ٥ - ٢ . لاحظ انه اذا أمكن نقل كمية طاقة كبيرة جدا الى الالكترون ، فقد يمكن أن يثار بالقدر الكافى لتقفز الفجوة الى النطاق التالى حيث يمكن أن يحدث التوصيل بسهولة . وهنا ينهار العازل .

وحالة متوسطة تحدث عندما يفصل النطاقين « منطقة محرمة » صغيرة فقط ، كما هو مبين فى شكل ٥ - ٢ ج . وكميات قليلة من الطاقة فى صورة حرارة ، ضوء ، أو مجال كهربي قد ترفع طاقة الالكترونات عند قمة النطاق المملوء وتمد اساس التوصيل . وهذه المواد عوازل والتي تظهر كثيرا من خواص الموصلات وتسمى اشباه موصلات Semiconductors دعنا أولا نعتبر الموصل .



شكل ٥ - ٢ : بنان نطاق - الطاقة فى ثلاثة أنواع للمواد عند OK . (أ) لا يظهر الموصل فجوة للطاقة بين نطاقى التكافؤ والتوصيل . (ب) يظهر العازل فجوة كبيرة للطاقة . (ج) شبه الموصل له فجوة طاقة صغيرة فقط .

هنا تتحرك الكترونات التكافؤ ، أو الكترونات التوصيل أو الحرة ، تحت تأثير مجال كهربي . فان الكترونا له شحنة Q تساوى $-e$ مع مجال E ، سوف يلاقى قوة

$$F = -eE \quad 9$$

فى فضاء حر يجعل الالكترون وتزيد سرعته (طاقته) باستمرار ، فى المادة البلورية يُعاق تقدم الالكترون بالتصادم المستمر مع هيكل شبكية البلورة المثار حراريا ، وسريعا يبلغ سرعة متوسطة ثابتة . وهذه السرعة V_d تُدعى سرعة الانسياب ، وهى ترتبط خطيا مع شدة المجال الكهربي بواسطة حركية الالكترون فى المادة المعطاة ، ونرمز للحركية بالرمز (μ) و μ ، و

$$(٦) \quad v_d = -\mu_e E$$

حيث μ_e هي حركة الكترون وهي موجبة بالتعريف . معادلة (٦) تبين أن الحركية تقاس في وحدات المتر المربع لكل فولت- ثانية ، وقيم نموذجية^(١) هي 0.0012 للالومنيوم ، 0.0032 للنحاس ، و 0.0056 للفضة .

ولهذه الموصلات الجيدة ، سرعة انسياب مقدارها بضع بوصات لكل ثانية تكفى لنتج ارتفاعا ملحوظا في درجة الحرارة ويمكن أن تسبب أنصهار السلك اذا لم يمكن إزالة الحرارة بسرعة بواسطة التوصيل الحرارى أو الاشعاع .

بتعويض (٦) في معادلة (٣) لقسم ٥ - ١ ، نحصل على

$$(٧) \quad J = -\rho_e \mu_e E$$

حيث ρ_e هي كثافة شحنة الالكترونات الحرة ، وهي قيمة سالبة . وكثافة الشحنة الكلية صفر ، لأن شحنة موجبة وسالبة متساوية توجد في المواد المتعادلة .

ومع ذلك العلاقة بين J و E لموصل معدني تحدد أيضا بواسطة الموصلية σ (sigma) .

$$(٨) \quad J = \sigma E$$

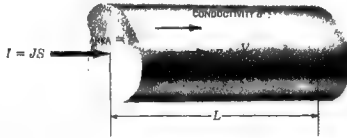
حيث تقاس σ بالمهو لكل متر (Ω / m) . والمهو mho هو واحد أمبير لكل فولت ، وهو (والأوم ohm) يكرم جورج سيمون أوم ، وهو فيزيائي الماني وأول من وصف علاقة التيار والفولت المتضمنة في (٨) . ونسمى هذه المعادلة الصورة النقطية لقانون أوم ، وننظر الى الصورة الأكثر شيوعا لقانون أوم بعد قليل .

- ولكن ، أولا من زيادة المعلومات أن نلاحظ موصلية عدة موصلات معدنية ، كقيم نموذجية (بالمهو لكل متر) 3.82×10^7 للالومنيوم ، 5.80×10^7 للنحاس و 6.17×10^7 للفضة . بيانات لموصلات أخرى توجد في الملحق ج . بمجرد رؤية بيانات مثل تلك ، يكون من الطبيعي أن نفرض أنه قد قدم لنا قيما ثابتة ، وهذا صحيح أساسا . فالموصلات المعدنية تخضع لقانون أوم بصدق كبير ، وهي علاقة خطية ، فالموصلية ثابتة على امدية واسعة لكثافة التيار وشدة المجال الكهربى . وأيضا يوصف قانون أوم والموصلات المعدنية بأنها موحدة الخواص (isotropic) أو أن لها نفس الخواص في كل

(١) P.238 , Wert and Thomson المدمج في المراجع المقترحة عند نهاية هذا الفصل .

اتجاه والمادة التي ليست من هذا النوع تسمى غير موحدة الخواص (anisotropic) وسنذكر مثل هذه المادة بعد صفحات قليلة من الآن .

على أن الموصلية دالة في درجة الحرارة . وتتغير المقاومة ، التي هي مقلوب الموصلية ، تقريبا خطيا مع درجة الحرارة في مدى درجة حرارة الغرفة ، وبالنسبة للالومنيوم ، النحاس ، والفضة فهي تزيد 0.4 في المائة تقريبا لكل 1 K ارتفاع في درجة الحرارة^(١) . ولمعادن عديدة تنحدر المقاومة بشدة الى الصفر عند درجة حرارة قدرها قليل من الكلفن ، وتسمى هذه الخاصية فرط الموصلية . والنحاس والفضة ليسا موصلات فائقة التوصيل مع أن الالومنيوم فائق التوصيل (لدرجات حرارة تحت 1.14 K) .



شكل ٣-٥ . كثافة تيار منتظمة و شدة مجال كهربي E في حيز اسطوانى طوله L ومساحة مقطعة العرضي S . هنا $V = IR$ ، حيث $R = L/\sigma S$.

وإذا ضمنا (V) و (A) الآن ، يمكن أن يعبر عن الموصلية بدلالة كثافة الشحنة وحركية الالكترونات ،

$$(٩) \quad \sigma = -\rho_e \mu_e$$

ومن تعريف الحركية (٦) ، فانه من المقنع الآن أن تلاحظ أن درجة حرارة أعلى تدل على ذبذبات أعظم للشبكة البلورية ، وتقدم الكتروني معاق أكثر عند شدة مجال كهربي معينة ، وسرعة انسياق أقل ، وحركية أقل ، وموصلية أقل من (٩) ، ومقاومية أعلى كما ذكر .

وتطبق قانون أوم في صورة نقطية لحيز ماكروسكوبى (يمكن رؤيته بالعين المجردة) يؤدى الى صورة مألوفة أكثر . مبدئيا ، دعنا نفرض أن J و E منتظمين ، كما هي في الحيز الاسطوانى المبين في شكل ٣-٥ . وحيث انهما منتظمتان ،

(١) نتائج حرارية غزيرة للمواد الموصلة متاحة في "Standard Hand book for Electircal Engineers" . المدمج بين المراجع المقترحة عند نهاية هذا الفصل .

$$(١٠) \quad I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = JS$$

و

$$(١١) \quad V_{ab} = - \int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -\mathbf{E} \cdot \int_b^a d\mathbf{L} = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{L}_{ab}$$

$$= \mathbf{E} \cdot \mathbf{L}_{ab}$$

أو

$$V = EL$$

وعلى ذلك

$$J = \frac{I}{S} = \sigma E = \sigma \frac{V}{L}$$

أو

$$V = \frac{L}{\sigma S} I$$

ولكن نسبة فرق الجهد بين طرفي الاسطوانة الى التيار الداخل للنهاية الموجبة أكثر ، معروفة من نظرية الدوائر الأولية على انها مقاومة الاسطوانة ، ولذلك

$$(١٢) \quad \boxed{V = IR}$$

حيث

$$(١٣) \quad \boxed{R = \frac{L}{\sigma S}}$$

معادلة (١٢) هي ، بالطبع ، معروفة بأنها قانون د أوم ، و (١٣) تمكثنا من حساب المقاومة R ، مقاسة بالأوم (مختصر Ω) ، للأجسام الموصلة التي لها مجالات منتظمة . اذا كانت المجالات غير منتظمة ، يمكن أن نظل المقاومة معرفة على انها نسبة V الى I ، حيث V هي فرق الجهد بين سطحين متساوي - الجهد معينين في المادة و I هو التيار الكلي العابر للسطح الموجب أكثر الى داخل المادة . ومن العلاقات التكامليتين العامتين في (١٠) و (١١) ، ومن قانون أوم (٨) ، يمكن أن نكتب هذا التعبير العام للمقاومة عندما تكون المجالات غير منتظمة ،

$$(١٤) \quad R = \frac{V_{ab}}{I} = \frac{- \int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}}{\int_S \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}$$

والتكامل الخطي مأخوذ بين سطحين متساوي - الجهد في الموصل ، والتكامل السطحي مقدر على متساوي - الجهد الموجب الأكثر من متساويي الجهد هذين . ولانستطيع حالياً

م ١٠ - الكهرومغناطيسيات

حل هذه المسائل غير المنتظمة ، ولكننا يجب أن نستطيع حل عديد منها بعد تصفح الفصلين السادس والسابع بامعان .

وكمثال على تعيين مقاومة اسطوانة ، اعتبر سلك نحاس رقم (١٦) (16 #) ، الذى له قطر 0.0508 in ، أو 1.291×10^{-3} m . وعلى ذلك فمساحة المقطع العرضى هى 1.609×10^{-6} m² ، ومقاومة سلك طوله 1 mi (1,609 m) هى :

$$R = \frac{1,609}{(5.80 \times 10^{-7})(1.308 \times 10^{-6})} = 21.2 \Omega$$

ويستطيع السلك بأمان أن يحمل حوالى 10A ، مناظرا لكثافة تيار 7.65×10^6 A/m² أو 7.65 A/mm² . وبهذا التيار يكون فرق الجهد بين طرفى السلك هو 212 V ، وشدة المجال الكهربى هى 0.132 V/m ، وسرعة الانسياب 0.000422m/s ، أو أكثر قليلا من الفيرلونج^(١) فى الأسبوع ، وكثافة شحنة الالكترون - الحر هى : 1.81×10^{10} C/m³ ، أو تقريبا الكترون فى مكعب طول ضلعه اثنان من الانجستروم .

ت ٥ - ٣ أوجد مقدار كثافة التيار داخل عينة من الالومنيوم اذا كانت : (أ) شدة المجال الكهربى 70mV/m ، (ب) سرعة انسياب الالكترون - الحر 10^{-4} m/S (ج) فى صورة مكعب ، ضلعه 1 mm ، يحمل تيارا كليا مقداره 2.5A ، (د) فى صورة مكعب ، ضلعه 1 mm ، مع فرق جهد 75μV بين وجهين متقابلين .

الاجابة : 2.67 MA/m² ، 3.18 MA/m² ، 2.50MA/m² ، 2.86 MA/m² .

ت ٥ - ٤ ماهى الفولتية بين طرفى موصل نحاسى : (أ) اذا كان له مقطع عرضى دائرى قطره 0.007 in وطوله 100 ft ، ويحمل تيارا مقداره 8 mA ، (ب) اذا كان اسطوانة دائرية مجوفة ، نصف قطرها الداخلى 2 mm ، ونصف قطره الخارجى 3 mm ، طوله 200 mm وله تيار كل مقداره 20A ؟

الاجابة : 0.1693V ، 4.39V .

٥ - ٤ خواص الموصل وشروط الحدود :

مرة أخرى ، يجب علينا مؤقتا أن نعيد عن شروط الاستاتيكية المفروضة ونسمح بتغير زمنى لقليل من الميكروثانية لنرى مايحدث عندما يختل اتزان توزيع الشحنة فجأة داخل مادة موصلة . دعنا نفرض ، من أجل المناقشة ، أنه ظهر هناك فجأة عدد من الالكترونات داخل موصل . المجالات الكهربيه الناتجة بواسطة هذه الالكترونات لآتعادل

(١) الفيرلونج : مقياس للطول يساوى ٢٢٠ ياردة أو ثمن ميل (المترجم) .

بأي شحنات موجبة ، ولذلك تبدأ الالكترونات في التعجيل بعيدا عن بعضها . ويستمر هذا حتى تصل الالكترونات الى سطح الموصل ، أوحى يصل للسطح عدد من الالكترونات يساوى العدد المدخل .

- وهنا يُوقف تقدم الالكترونات الى الخارج ، لأن المادة المحيطة بالموصل هي عازل وليس لها نطاق توصيل مناسب . لايمكن أن تبقى شحنة داخل الموصل . فإذا فعلت ، فسوف يدفع المجال الكهربى الناتج الشحنات الى السطح .

- لهذا فالنتيجة النهائية فى داخل موصل هي كثافة شحنة صفرية ، وكثافة شحنة سطحية مقيمة على السطح الخارجى . وهذه واحدة من خاصيتين للموصل الجيد .

الخاصية الأخرى ، مصاعغة للحالات الاستاتيكية التى لاينساب فيها تيار ، تتبع مباشرة من قانون أوم : تكون شدة المجال الكهربى داخل موصل صفرا . ففيزائيا ، نرى أنه اذا وجد مجال كهربى ، فسوف تتحرك الكترونات التوصيل وتنتج تيارا ، مؤدية هكذا الى حالة غير استاتيكية .

- وملخصين للكهروستاتيكية ، لايمكن أن توجد شحنة ولا مجال كهربى عند أى نقطة داخل مادة موصلة . ومع ذلك قد تظهر الشحنة على السطح ككثافة شحنة سطحية ، ويجتثا التالى يخص المجالات خارج الموصل .

- ونود أن نربط هذه المجالات الخارجية بالشحنة على سطح الموصل . وهى مسألة بسيطة ، ويمكننا أن نبين طريقنا للحل بقليل من الرياضيات .

إذا حُللت شدة المجال الكهربى الخارجى الى مركبتين ، احدهما مماسة ، والأخرى عمودية على سطح الموصل ، فَيُرى أن المركبة المماسية تكون صفرا . فإذا لم تكن صفرا ، ستؤثر قوة مماسة على عناصر الشحنة السطحية ، مسببة تحريكها وحالات غير استاتيكية . ولأن الحالات الاستاتيكية مفروضة فان شدة المجال الكهربى وكثافة التدفق الكهربى المماسيتين تكونا أصفارا .

ويُجيب قانون « جاوس » على أسئلتنا الخاصة بالمركبة العمودية . التدفق الكهربى التارك لعنصر تزايدى صغير من السطح ، يجب أن يساوى الشحنة الواقعة على ذلك العنصر التزايدى للسطح . ولايستطيع التدفق أن يترك الشحنة فى الاتجاه المماس ، لأن هذه المركبة تساوى صفرا ، ولايستطيع أن يتغذى الى داخل الموصل ، لأن المجال الكلى هناك يساوى صفرا . فحينئذ يجب عليها أن تترك السطح عموديا . من الناحية الكمية يمكن أن نقول ان كثافة التدفق الكهربى بالكولوم لكل متر مربع التاركة للسطح عموديا تساوى كثافة الشحنة السطحية بالكولوم لكل متر مربع ، أو $D_n = \rho$.

وإذا استخدمنا بعضاً من نتائجنا المستنتجة سابقاً في عمل تحليل أكثر عناية (ومصادفة
نُقدم طريقة عامة التي يجب أن نستخدمها فيما بعد) ، فيجب أن ننشئ حداً لموصل مع
فضاء حر (شكل ٥ - ٤) مبينا المركبات المماسية والعمودية لـ D و E على جانب الفضاء -
الحر للحد . وكلتا المجالين صفر في الموصل . ويمكن تعيين المجال المماسي بتطبيق القسم
٤ - ٥ ، المعادلة (٧١) ،

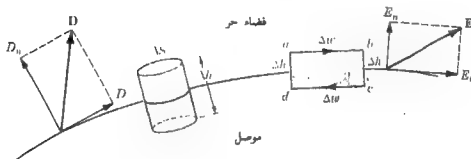
$$\int E \cdot dL = 0$$

حول مسار صغير مغلق $abcda$. ويجب أن يقسم التكامل الى أربعة أجزاء .

$$\int_a^b + \int_b^c + \int_c^d + \int_d^a = 0$$

ونذكر أن $E=0$ داخل الموصل ، ندع الطول من a الى b أو c الى d يكون Δw ومن b
الى c أو d الى a يكون Δh ونحصل على

$$E_t \Delta w - E_{n, at} b/2 \Delta h + E_{n, ct} a/2 \Delta h = 0$$



شكل ٥ - ٤ مسار مغلق مناسب و سطح جاوسي ، مستخدمان لتعيين شروط الحدود عند حد موصل - فضاء حر ،
 $D_n = \rho_s$ و $E_t = 0$

وبينما نسمح لـ Δh أن تقترب من الصفر ، مع ابقاء Δw صغيرة ولكن محدودة ، فلا يؤثر
إذا ما كانت المجالات العمودية متساوية عند a و b أم لا ، لأن Δh تنسب في أن تصبح
هذه الحدود صغيرة للدرجة اهمالها . وعلى ذلك

$$E_t \Delta w = 0$$

ولذلك

$$E_t = 0$$

ويوجد الشرط على المجال العمودي بأقصى مباشرة باعتبار D_n أفضل من E_n واختيار اسطوانة صغيرة كسطح جاوسى . دع الارتفاع يكون Δh ومساحة وجهى القمة والقاع تكون ΔS . ومرة أخرى سندع Δh تقترب من الصفر . باستخدام قانون جاوس ،

$$\int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q$$

ونكامل فوق الأسطح الثلاثة المتميزة

$$\int_{\text{top}} + \int_{\text{bottom}} + \int_{\text{sides}} = Q$$

ونجد أن الأخيرين أصغارا (لأسباب مختلفة) . عندئذ

$$D_n \Delta S = Q = \rho_S \Delta S$$

or

$$D_n = \rho_S$$

أو

وهذه هي شروط الحدود المرغوبة لحد الموصل - الفضاء الحر فى الكهروستاتيكية

$$(١٥) \quad D_t = E_t = 0$$

$$(١٦) \quad D_n = \epsilon_0 E_n = \rho_S$$

يترك التدفق الكهربى الموصل فى اتجاه عمودى على السطح ، وقيمة كثافة التدفق الكهربى تساوى عدديا كثافة الشحنة السطحية .

ونتيجة مباشرة وهامة لصفرية شدة المجال الكهربى المماسية هي الحقيقة أن سطح الموصل هو سطح متساوى - الجهد . وتقدير قيمة فرق الجهد بين أى نقطتين على السطح بواسطة التكامل الخطى تؤدي الى نتيجة صفرية ، لأن المسار يمكن أن يختار على السطح نفسه حيث $E \cdot d\mathbf{L} = 0$.

ولكى نلخص المبادئ التى تطبق على الموصلات فى المجالات الكهروستاتيكية ، يمكننا أن نذكر أن :

- ١ - شدة المجال الكهربى الاستاتيكية داخل موصل تساوى صفراً .
- ٢ - شدة المجال الكهربى الاستاتيكية عند سطح موصل موجهة فى كل مكان عمودية على ذلك السطح .

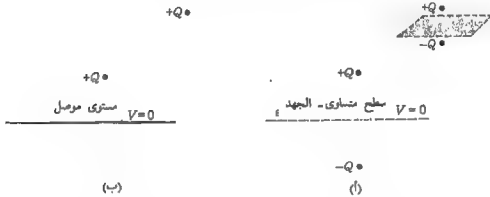
٣- سطح الموصل هو سطح متساوي - الجهد

ت - • • تقع النقطة $P(-2, 4, 1)$ على سطح موصل ، و :
 $E = 400 a_x - 290 a_y + 310 a_z \text{ V/m}$ هناك . أفرض أن الموصل في فضاء حر وأوجد مقدار : (أ) E_n عند P ، (ب) E_t عند P ، (ج) ρ عند P .

الاجابة : 5.16 nC/m^2 ; 0 ; 583 V/m

• • طريقة الصور

خاصية هامة لمجال ثنائي القطب التي أبرزناها في الفصل السابق هي المستوى اللانهائي عند جهد صفري الذي يوجد في منتصف المسافة بين الشحنتين . ومثل هذا المستوى يمكن أن يُمثل بمستوى موصل رفيع حتى يكاد يتلاشى وامتداده لانهائي . والموصل هو سطح متساوي - الجهد عند جهد $V = 0$ ، ولذلك تكون شدة المجال الكهربائي عمودية على السطح . فهكذا ، إذا استبدلنا بتشكيل ثنائي القطب المُبين في شكل (٥ - ٥) شحنة واحدة ومستوى موصل الميئين في شكل ٥ - ٥ ب ، فإن المجالات في النصف العلوي لكلا الشكلين تكون واحدة . كل المجالات أصفاراً أسفل المستوى الموصل لأنه لم تُمد بأي شحنات في تلك المنطقة . وطبعاً ، يمكننا أيضاً أن نستبدل شحنة سالبة واحدة تحت مستوى موصل بتنظيم ثنائي القطب ونحصل على تكافؤ للمجالات في النصف السفلي لكل منطقة .

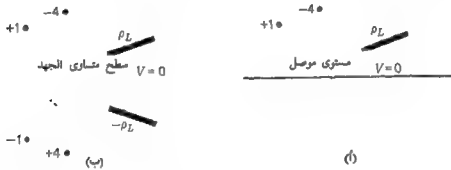


شكل ٥ - ٥ (أ) شحنتان متساويتان ولكن متضادتان يمكن أن يستبدلا بـ (ب) شحنة واحدة ومستوى موصل بدون التأثير على المجالات فوق الأسطح $V = 0$.

وإذا حاولنا هذا التكافؤ من وجهة النظر العكسية ، نبدأ بشحنة واحدة فوق مستوى موصل تام ، وعندئذ نرى أننا يمكننا أن نُبقى على نفس المجالات فوق السطح ، بابعاد

المستوى ووضع شحنة سالبة عند موضع متماثل تحت المستوى . وهذه الشحنة تسمى صورة الشحنة الأصلية ، وهي السالب لتلك القيمة .

وإذا استطعنا عمل ذلك مرة ، فإن الخطية تسمح لنا أن نعملها مرة بعد أخرى ، وعلى هذا فأي تشكيل شحنة فوق مستوى أرضي لانهائي يمكن أن يُستبدل بتنظيم مكون من تشكيل الشحنة المعطى ، وصورته ، ويدون المستوى الموصل . وهذا ما يوحى به التوضيحيان فى شكل (٥ - ٦) . وفى أحوال كثيرة ، يكون إيجاد مجال الجهد للنظام الجديد أسهل بكثير لأنها لا تحتوى المستوى الموصل مع توزيع شحنته السطحية المجهولة .



شكل ٦ - ٥ : (أ) تشكيل شحنة معطى فوق مستوى موصل لانهائى ، يمكن أن يستبدل بـ (ب) تشكيل الشحنة المعطى بالإضافة إلى تشكيل الصورة بدون المستوى الموصل .

وكمثال على استخدام الصور ، دعنا نجد كثافة الشحنة السطحية عند $P(2,5,0)$ على المستوى الموصل $z=0$ إذا كان هناك خط شحنة ذى 30 nC/m موضوع عند $z=3$; $x=0$ كما هو مبين فى شكل (٥ - ٧) . نزيل المستوى ونضع صورة خط شحنة ذى -30 nC/m عند $z=-3$, $x=0$ ، كما هو موضح فى شكل (٥ - ٧ ب) . ويمكن الحصول الآن على المجال عند P بترابك المجالات المعروفة لخطى الشحنة . والمتمجه نصف القطرى من خط الشحنة الموجب الى P هو $R_+ = 2a_x - 3a_z$ بينما : $R_- = 2a_x + 3a_z$. وعلى هذا ، فالمجالات المفردة هى

$$E_+ = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 R_+} a_{R_+} = \frac{30 \times 10^{-9}}{2\pi\epsilon_0 \sqrt{13}} \frac{2a_x - 3a_z}{\sqrt{13}}$$

$$E_- = \frac{-30 \times 10^{-9}}{2\pi\epsilon_0 \sqrt{13}} \frac{2a_x + 3a_z}{\sqrt{13}}$$

وبجمع هذه النتائج ، نحصل على

$$E = \frac{-180 \times 10^{-9} a_z}{2\pi\epsilon_0 (13)} = -249 a_z \text{ V/m}$$

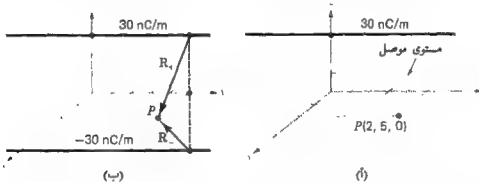
هذا إذن هو المجال عند (أومباشرة فوق) P في كل من التشكيلين في شكل ٥ - ٧ ،
وأنه من المزمى حقا أن نلاحظ أن المجال عمودى على المستوى الموصل ، كما يجب
أن يكون . وعلى هذا ، $D = \epsilon_0 E = -2.20a_z \text{ nC/m}^2$ ، ولأنها موجهة نحو المستوى
الموصل ، فإن ρ_s تكون سالبة وقيمتها 2.20 nC/m^2 عند P .

ت - ٥ - ٦ شحنة نقطية مقدارها $18\mu\text{C}$ موضوعة على المحور z على بعد 0.4m من
مستوى موصل عند $z = 0$ (أ) أوجد كثافة الشحنة السطحية عند $(0.3, 0.4, 0)$.
(ب) أوجد $|D|$ عند $(0, 0.2, 0.2)$.

الإجابة : $4.36 \mu\text{C/m}^2$; $19.77 \mu\text{C/m}^2$.

٥ - ٦ أشباه الموصلات :

إذا حولنا انتباهنا الآن الى مادة شبه موصلة ذاتية ، مثل الجرمانيوم النقى
أو السيليكون النقى ، فإن نوعين من حاملات التيار يكونان موجودين : الالكترونات
والفجوات . والالكترونات هي تلك التى من قمة نطاق التكافؤ المملوء التى تلقت طاقة
كافية (عادة حرارية) لتعبر النطاق المحرم الصغير نسبيا الى نطاق التوصيل . وفجوة
الطاقة للنطاق المحرم فى أشباه موصلات نموذجية فى حدود الكترون فولت واحد .
والخلوات المتركة بهذه الالكترونات تمثل حالات طاقة غير مملوءة فى نطاق التكافؤ
الذى قد تتحرك أيضا من ذرة الى ذرة فى البلورة . ويسمى الخلو فجوة $hole$ وكثير من
خواص اشباه الموصلات يمكن أن توصف بمعاملة الفجوة كما لو كان لها شحنة موجبة
 e ، وحركية μ_h وكتلة فعالة مقارنة لتلك التى للالكترون .



شكل ٥ - ٧ : (أ) خط شحنة فوق مستوى موصل . (ب) أنيل الموصل ، وأضيفت صورة خط شحنة .
يتحرك كلا الحاملين فى مجال كهربي ، ويتحركان فى اتجاهين متضادين ، وعلى ذلك
فكل يساهم بمركبة للتيار الكلى فى نفس الاتجاه ، كالذى ينتج بالأخرى . والموصلية
هى على ذلك دالة لكلا تركيزى الفجوة والالكترون ، وحركتهما ،

$$(١٧) \quad \sigma = -\rho_v H_v + \rho_h H_h$$

ويالنسبة للجرمانيوم النقي ، أو الذاتي ، فإن حركتي الإلكترون والفجوة هما 0.36 و 0.17 ، بالترتيب ، بينما للسيليكون ، فالحركتين هما بالترتيب 0.12 و 0.025 . وهذه القيم معطاة بالمتر المربع لكل فولت - ثانية ، وتتراوح بين 10 و 100 مرة أكبر من تلك التي للألومنيوم ، النحاس ، الفضة ، والموصلات المعدنية الأخرى^(١) . والحركات المدرجة آنفا معطاة عند درجة حرارة 300K .

وتعتمد تركيزات الإلكترون والفجوة بشدة على درجة الحرارة عند 300K ، كلا كثافتي الشحنة الحجمية للإلكترون ، والفجوة يساوي $4.0C/m^3$ في المقدار في الجرمانيوم الذاتي و $0.011C/m^3$: في السيليكون الذاتي . وهذه القيم تؤدي إلى موصليات $2.1 \Omega/m$ في الجرمانيوم و $0.0016 \Omega/m^3$ في السيليكون . وكلما زادت درجة الحرارة ، تقل الحركات ، ولكن تزداد كثافات الشحنة بسرعة جدا . ونتيجة لذلك ، تزداد موصلية الجرمانيوم بعامل قدره 10 عندما تزداد درجة الحرارة من 300 إلى 360K تقريبا وتقل بعامل قدره 10 عندما تقل درجة الحرارة من 300 إلى 255K . لاحظ أن موصلية أشباه الموصلات الذاتية تزداد مع درجة الحرارة ، بينما تلك للموصلات المعدنية تقل مع درجة الحرارة ، وهذه إحدى الاختلافات المميزة بين الموصلات المعدنية ، وأشباه الموصلات الذاتية .

وتحقق أشباه الموصلات الذاتية أيضا الصورة النقطية لقانون «أوم» ، أي أن ، الموصلية ثابتة بدرجة معقولة مع كثافة التيار ومع اتجاه كثافة التيار .

ويمكن أن تزداد بصورة فائقة عدد حاملات الشحنة والموصلية بإضافة كميات قليلة جدا من الشوائب . وتزود المواد المغطية بالكترونات إضافية وتكون نوعا سالبا n -type من أشباه الموصلات ، بينما تجهز المتقبلات فجوات إضافية وتكون نوعا موجبا p -type من المواد . وتعرف العملية بالتطعيم ، وتركيز المغطيات منخفض في السيليكون حتى كجزء واحد من 10^7 بسبب زيادة في الموصلية بعامل قدره 10^5 .

ومدى قيم الموصلية يمتد بين الاقصيين حينما تذهب من أحسن المواد عزلا إلى أشباه الموصلات ، ثم أفضل الموصلات . بالمهو لكل متر ، تتراوح σ من 10^{-17} للكارتز المنصهر ، 10^{-7} للعوازل البلاستيك الرديئة ، وتقريبا الوحدة لأشباه الموصلات إلى 10^8 تقريبا للموصلات المعدنية عند درجة حرارة الغرفة . وتغطي هذه القيم المدى العظيم الاتساع في حدود حوالى خمسة وعشرين لرتبة عظم المقدار .

(١) قيم الحركة لأشباه الموصلات معطاة في المراجع 7,4,2 المدرجة عند نهاية هذا الفصل .

ت = ٧ عند درجة حرارة 290K كلا كثافة الشحنة الحجمية للإلكترون والفجوة في جرمانيوم ذاتي هما 2.35 C/m^3 في المقدار ، بينما هما 4.85 mC/m^3 للسيليكون الذاتي . فإذا فرض أن قيم الحركة المعطاة في قسم ٥ - ٦ عند 300K تطبق عند 290K أيضا ، احسب الموصلية عند درجة الحرارة هذه للـ : (أ) جرمانيوم ، (ب) سيليكون .

الاجابة : $1.25 \text{ } \Omega / \text{m}$, $0.70 \text{ m } \Omega / \text{m}$.

٥-٧ طبيعة المواد العازلة :

مع اننا قد ذكرنا العوازل والمواد العازلة ، فليس لدينا بعد أى علاقات كمية تتضمنهم . على أننا نسرى حالا أن/عازلا فى مجال كهربي يمكن أن ينظر اليه كتنظيم فضاء حر من ثنائيات - قطب كهربية ميكروسكوبية مكونة من شحنات موجبة وسالبة مراكزها لا تنطبق تماما .

وهذه ليست شحنات حرة ، ولا يمكنها أن تساهم فى عملية التوصيل . بل هى مقيدة فى أماكنها بقوى ذرية وجزيئية ويمكنها فقط إزاحة مواضعها قليلا استجابة للمجالات الخارجية / وهى تسمى شحنات مقيدة ، على نقيض الشحنات الحرة التى تعين الموصلية ويمكن معاملتها الشحنات المقيدة كأي منابع أخرى للمجال الكهروستاتيكي . ولذلك ، اذا لم نرغب ، فسوف لانحتاج الى تقديم ثابت العازل كبارامتر جديد أو أن نتعامل مع سماحية مختلفة عن سماحية الفضاء الحر ، على أن البديل يمكن أن يكون أن نعتبر كل شحنة داخل قطعة من مادة عازلة . وهذا ثمن باهظ جدا يدفع لاستخدام كل معادلاتنا السابقة فى صورة غير معدلة ، ولذلك سنقتضى بعض الوقت لنضع دراسة نظرية عن العوازل بطريقة نوعية ، مقدمين الاستقطاب P ، السماحية ϵ ، السماحية النسبية ϵ_R ، ومستنتجين لبعض العلاقات الكمية المتضمنة هذه الكميات الجديدة .

الخواص الخاصة التى يشترك فيها جميع المواد العازلة ، سواء كانت مواد صلبة ، سائلة ، أو غازية ، وسواء كانت ذات طبيعة بللورية أم لا ، هى قابليتها لاختزان الطاقة الكهربائية . ويحدث هذا الاختزان بواسطة إزاحة فى المواضع النسبية للشحنات الموجبة والسالبة الداخلية المقيدة ضد القوى الجزيئية والذرية العادية .

وهذه الإزاحة ضد قوة مقيدة تشبه رفع ثقل أو مط زنبرك ، وتمثل طاقة جهد . ومصدر الطاقة هو المجال الخارجى ، حركة شحنات الإزاحة ربما تنتج تيارا عارضا خلال البطارية التى تنتج المجال .

والآلية الفعلية لازاحة الشحنة تختلف فى المواد العازلة المختلفة . بعض الجزيئات ، تسمى جزيئات قطبية ، لها ازاحة دائمة موجودة بين مركزى ثقل الشحنات الموجبة والسالبة ، ويتصرف كل زوج من الشحنات كشئى قطب . عادة توجه ثنائيات القطب بطريقة عشوائية فى كل أنحاء داخل المادة ، وفعل المجال الخارجى هو أن يصف هذه الجزيئات ، الى حد ما ، فى نفس الاتجاه . ومجال كافى القوة يمكنه أيضا إحداث ازاحة اضافية بين الشحنات الموجبة والسالبة .

والجزء غير القطبى ليس له تنظيم ثنائى القطب هذا الا بعد تسليط مجال . تُزاح الشحنات السالبة والموجبة فى اتجاهات متضادة ضد قوة التجاذب المتبادلة وتُنتج ثنائى قطب الذى يتحاذى مع المجال الكهربى .

وكلا النوعين من ثنائى القطب يمكن أن يوصف بعزم ثنائى قطبه p ، كما أظهر فى قسم ٤ - ٧ ، معادلة (٣٧) ،

$$(١٨) \quad p = Qd$$

حيث Q هى الموجبة من الشحنتين المقيدتين المكونتين لثنائى القطب ، و d هو المنتج من الشحنة السالبة الى الموجبة .

إذا كان هناك n ثنائى قطب لوحدة الحجم ويتعامل مع حجم Δv ، فحينئذ يكون هناك $n\Delta v$ ثنائى قطب ، وعزم ثنائى القطب الكلى يُحصل عليه بالمجموع المنتج ،

$$p_{\text{total}} = \sum_{i=1}^{n\Delta v} p_i$$

حيث كلا من p_i يمكن أن تكون مختلفة . والآن نُعرف الاستقطاب P على أنه عزم ثنائى القطب لكل وحدة حجم :

$$(١٩) \quad P = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \sum_{i=1}^{n\Delta v} p_i$$

بوحداث الكولوم لكل متر مربع .

ستعامل P على أنه مجال مستمر نموذجى ، مع أنه واضح ، أنه أساسا غير معرف عند النقط داخل الذرة أو الجزيء . وبدلا من ذلك ، يجب أن نفكر فى قيمتها عند أى نقطة كقيمة متوسطة مأخوذة على عينة حجم Δv كبيرة بالقدر الكافى لأن تحوى عددا من الجزيئات (عددهم $n\Delta v$) ، ولكن أيضا صغيرة بما يكفى اعتبارها عنصرا فى المفهوم . وهدفنا الحالى هو أن نبين أن كثافة الشحنة الحجمية المقيدة تتصرف مثل كثافة الشحنة الحجمية الحرة فى إنتاج مجال خارجى ، وسنحصل على نتيجة مشابهة لقانون « جاوس » .

لنكون محددين ، دعنا نفرض أن لدينا عازلا محتويا على جزيئات غير قطبية . لا يوجد جزيء له عزم ثنائي قطب ، و $P \approx 0$ خلال كل المادة . وفي مكان ما داخل العازل نختار عنصر سطح تزايدى ΔS ، كما هو مبين في شكل ٥ - أ ، نُسلط مجالا كهربيا E . يتبع المجال الكهربى عزما $p = Qd$ فى كل جزيء ، بحيث أن يعمل p و d زاوية θ مع ΔS ، كما هو موضح فى شكل ٥ - ب .

والآن دعنا نفحص تحرك الشحنات المقيدة عبر ΔS . كل من الشحنات المقترنة بخلق ثنائى قطب ، يجب أن تكون قد تحركت مسافة $\frac{1}{2} d \cos \theta$ فى الاتجاه العمودى على ΔS . وعلى ذلك ، أى شحنة موجبة واقعة ابتدائيا تحت السطح ΔS وفى مدى المسافة $\frac{1}{2} d \cos \theta$ من السطح يجب أن تكون قد عبرت ΔS ذاهبة الى أعلى . أيضا ، وأى شحنة سالبة واقعة ابتدائيا فوق السطح وفى مدى تلك المسافة $(\frac{1}{2} d \cos \theta)$ من ΔS يجب أن تكون قد عبرت ΔS ذاهبة الى أسفل . لذلك ، ولأن هناك : $n \text{ molecule} / m^3$ ، فصافى الشحنة الكلية التى تعبر السطح العنصرى فى اتجاه الى أعلى هو $\Delta S n Q d \cos \theta$ ، أو

$$\Delta Q_b = n Q d \cdot \Delta S$$

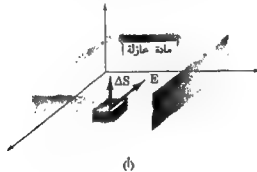
حيث يذكرنا الرمز السفلى على Q أننا نتعامل مع شحنة مقيدة وليست شحنة حرة . وبدلالة الاستقطاب ، لدينا

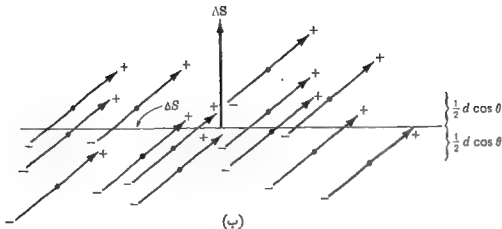
$$\Delta Q_b = P \cdot \Delta S$$

إذا فسرنا ΔS على أنه عنصر لسطح مغلق داخل المادة العازلة ، فإن اتجاه ΔS يكون خارجا ، ويحصل على صافى الزيادة فى الشحنة المقيدة داخل السطح المغلق من خلال التكامل

$$(٢٠) \quad Q_b = - \int_S P \cdot dS$$

وهذه العلاقة الأخيرة لها بعض الشبه مع قانون « جاوس » ، وبمكتنا الآن أن نمم تعريفنا لشدة التدفق الكهربى لكى يطبق لأوساط غير الفضاء الحر .





شكل ٥ - (أ) : عنصر سطح تزايدى ΔS مابين بداخل عازل يوجد فيه مجال كهربي E . (ب) تكون الجزيئات غير القطبية عزوم ثنائي قطب p واستقطاب p . هناك صالى انتقال للشحنة المقيدة عبر ΔS .

نكتب أولا قانون « جاوس » بدلالة E و ϵ_0 ، الشحنة المحصورة الكلية مقيدة وحررة :

$$(٢١) \quad Q_T = \int_S \epsilon_0 E \cdot dS$$

حيث

$$Q_T = Q_b + Q$$

و Q هي الشحنة الحرة الكلية المحتواة داخل السطح S . لاحظ أن الشحنة الحرة تظهر بدون رمز سفلى لأنها نوع الشحنة الأعظم أهمية وستظهر فى معادلات ماكسويل . ويضم هذه المعادلات الثلاث الأخيرة ، نحصل على تعبير للشحنة الحرة المحصورة ،

$$(٢٢) \quad Q = Q_T - Q_b = \int_S (\epsilon_0 E + P) \cdot dS$$

ويمكننا الان أن نعرف D بصورة أكثر تعميما عما فعلنا فى الفصل الثالث ،

$$(٢٣) \quad \boxed{D = \epsilon_0 E + P}$$

وهكذا هناك حد مضاف لـ D والذي يظهر عندما توجد مادة قابلة للاستقطاب . وعلى ذلك ،

$$(٢٤) \quad Q = \int_S D \cdot dS$$

حيث Q هي الشحنة الحرة المحصورة .

ويستخدم كثافات الشحنة الحجمية المتعددة ، نحصل على :

$$Q_b = \int_v \rho_b dv$$

$$Q = \int_v \rho dv$$

$$Q_T = \int_v \rho_T dv$$

وبمساعدة نظرية الانفراج ، يمكننا لذلك تحويل (٢٠) ، (٢١) و (٢٤) الى علاقات الانفراج المكافئة ،

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = -\rho_b$$

$$\nabla \cdot \epsilon_0 \mathbf{E} = \rho_T$$

$$(٢٥) \quad \boxed{\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho}$$

وسنؤكد فقط على (٢٤) و (٢٥) ، التعبيران المحتويان على شحنة حرة ، فى العمل التالى .

ولكى نعمل أى استخدام حقيقى لهذه المفاهيم الجديدة ، يكون من الضرورى أن نعرف العلاقة بين شدة المجال الكهربى \mathbf{E} والاستقطاب \mathbf{P} الذى ينتج .

وهذه العلاقة سوف تكون ، بالطبع ، دالة لنوع المادة ، وسنحصر مناقشتنا أساسا لهذه المواد موحدة الخواص التى فيها \mathbf{E} و \mathbf{P} مرتبطان خطيا .

فى مادة موحدة الخواص يكون المتجهان \mathbf{E} و \mathbf{P} دائما متوازيين ، بغض النظر عن توجيه المجال . ومع أن معظم العوازل الهندسية خطية لشدة المجال المتوسطة وإلى العالية وهى أيضا موحدة الخواص ، فإن البللورات الأحادية قد تكون غير موحدة الخواص . وتنسب الطبيعة الدورية للمواد البللورية فى تكون عزوم ثنائى قطب فى موازاة محاور البللورة بأكثر سهولة ، وليس بالضرورة فى اتجاه المجال المسلط .

والعلاقة بين \mathbf{P} و \mathbf{E} فى المواد العازلة عفوية الاستقطاب (فروكهربية) ليست فقط غير-خطية ، بل أيضا تظهر تأثيرات تخلفية ، أى أن ، الاستقطاب الناتج عن شدة مجال كهربى معطى يعتمد على التاريخ السابق للعينة . وأمثلة هامة لمثل هذا النوع من العازل هى تيتانات الباريوم وملح روثيل .

والعلاقة الخطية بين \mathbf{P} و \mathbf{E} هى

$$(٢٦) \quad \boxed{\mathbf{P} = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E}}$$

حيث χ_e (chi) هى قابلية التأثر الكهربائية للمادة .

وبدلالة البارامترات المستخدمة في التطبيقات الهندسية ، فإن ثابت التناسب لا يكتب بمثل هذه البساطة ،

$$P = (\epsilon_R - 1)\epsilon_0 E$$

ولكن يمكننا استخدام (٢٣) لنكتب

$$D = \epsilon_0 E + (\epsilon_R - 1)\epsilon_0 E$$

أو

$$(٢٧) \quad D = \epsilon_0 \epsilon_R E = \epsilon E$$

حيث

$$(٢٨) \quad \epsilon = \epsilon_R \epsilon_0$$

و ϵ هي السماحية و ϵ_R هي السماحية النسبية ، أو ثابت العازل للمادة وثوابت العازل معطاة لبعض المواد الممثلة في الملحق ج .

ولا يمكن وصف المواد العازلة غير موحدة الخواص بدلالة بارامتر قابلية التأثير أو السماحية البسيط . وبدلاً من ذلك ، نجد أن كل مركبة من D يمكن أن تكون دالة في كل مركبة لـ E ، وتُستبدل العلاقة البسيطة (٢٧) بالمعادلات الثلاث .

$$D_x = \epsilon_{xx} E_x + \epsilon_{xy} E_y + \epsilon_{xz} E_z$$

$$D_y = \epsilon_{yx} E_x + \epsilon_{yy} E_y + \epsilon_{yz} E_z$$

$$D_z = \epsilon_{zx} E_x + \epsilon_{zy} E_y + \epsilon_{zz} E_z$$

وتسمى ϵ_{ij} التسع مجموعة كمية ممتدة . و D و E (و P) ليست بعد متوازيات ، ومع أن $D = \epsilon_0 E + P$ تبقى معادلة صحيحة للمواد غير موحدة الخواص ، فيمكننا أن نستمر في استخدام $D = \epsilon E$ فقط بتفسير ϵ ككمية ممتدة . وسنركز انتباهنا على المواد الخطية موحدة الخواص ونبقى الحالة العامة لكتاب أكثر تفصيلاً .

بالاختصار ، فلدينا بذلك الآن علاقة بين D و E تعتمد على المادة العازلة الموجودة ،

$$(٢٩) \quad D = \epsilon E$$

$$(٣٠) \quad \epsilon = \epsilon_R \epsilon_0$$

وكثافة التدفق الكهربى مازالت مرتبطة بالشحنة الحرة سواء بالصيغة التفاضلية أو التكاملية لقانون « جاوس » .

$$(٢٥) \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

$$(٣١) \quad \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q$$

واستخدام السماحية النسبية ، كما هو مبين بـ (٣٠) انفا ، يجعل اعتبار الاستقطاب ، عزم ثنائى القطب ، والشحنة المقيدة غير ضرورى . غير أن ، عندما يجب اعتبار مواد غير موحدة الخواص أو غير خطية ، فإن السماحية النسبية فى الصورة المقياسية البسيطة التى ناقشناها غير قابلة للتطبيق بعد .

دعنا الآن نوضح هذه المفاهيم الجديدة بمناقشة مثال فيه شريحة من التفلون فى المنطقة $0 \leq x \leq a$ ، وفضاء حر حيث $x < 0$ و $x > a$. خارج التفلون يوجد هناك مجال منتظم $E_{out} = E_0 a_x$ V/m . ثابت العازل للتفلون هو 2.1 وعلى هذا فقابلية التأثير الكهربى هى 1.1 .

وخارج الشريحة ، لدينا مباشرة $D_{out} = \epsilon_0 E_0 a_x$. وأيضاً ، لأنه لا يوجد هناك مادة عازلة فإن $P_{out} = 0$. والان ، أى من المعادلات الأربع أو الخمس الأخيرة ستمكثنا أن نربط المجالات المتعددة داخل المادة ببعضها . هكذا

$$D_{in} = 2.1 \epsilon_0 E_{in} \quad (0 \leq x \leq a)$$

$$P_{in} = 1.1 \epsilon_0 E_{in} \quad (0 \leq x \leq a)$$

حالياً نوجد قيمة لأى من هذه المجالات الثلاثة داخل العازل ، يمكن إيجاد الآخرين فى الحال . وتكمن الصعوبة فى العبور عبر الحد من المجالات المعروفة خارج العازل الى غير المعروفة داخله . ولعمل هذا نحتاج شرط حدود ، وهذا هو موضوع القسم الهام التالى . وحينئذ سنكمل هذا المثال .

وفى بقية هذا الكتاب سنصنف المواد القابلة للاستقطاب بدلالة D و ϵ مفضلاً عن P و χ . وسنقصر مناقشتنا على المواد موحدة الخواص .

ت • ٨ أوجد الاستقطاب داخل مادة التى : (أ) لها كثافة تدفق كهربى مقداره : $1.5 \mu C/m^2$ فى شدة مجال كهربى مقداره 15 KV/m ، (ب) لها $D = 2.8 \mu C/m^2$

و $\gamma = 1.7$ ، (ج) لها $10^{20} \text{ molecules / m}^3$ ، كل له عزم ثنائي قطب 1.5×10^{-26} C.m عندما $E = 10^5 \text{ V/m}$ ، (د) لها $E = 50 \text{ KV/m}$ ، والمساحية النسبية هي 4.4 ،
الاجابة : $1.367 \mu\text{C/m}^2$; $1.763 \mu\text{C/m}^2$, $1.500 \mu\text{C/m}^2$, $1.505 \mu\text{C/m}^2$.

٨ - ٥ شروط الحدود لمواد عازلة مثالية :

كيف نعالج مسألة فيها عازلان مختلفان ، أو عازل وموصل ؟ . هذا مثال آخر لشروط حدود ، مثل الشرط عند سطح الموصل ، والذي عليه المجالات المماسية أصفار ، وكثافة التدفق الكهربى العمودية تساوى كثافة الشحنة السطحية على الموصل . والآن نأخذ الخطوة الأولى في حل مسألة عازلين ، أو مسألة عازل- موصل ، بتعيين تصرف المجالات عند سطح العازل البينى .

دعنا نعتبر أولا السطح البينى بين عازلين لهما السماختان ϵ_1 و ϵ_2 ويشغلان المنطقتين 1 و 2 ، كما هو مبين في شكل (٥ - ٩) . نفحص أولا المركبات المماسية باستخدام

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$$

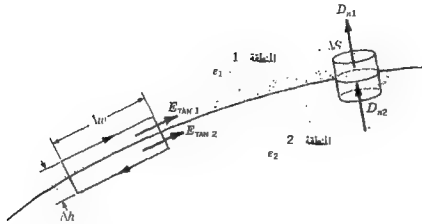
حول المسار المغلق الصغير الى اليسار ، حاصلين على

$$E_{tan 1} \Delta w - E_{tan 2} \Delta w = 0$$

والمساهمة الصغيرة للتكامل الخطى بواسطة المركبة العمودية لـ \mathbf{E} على طول الأقسام التى طولها Δh تصبح مهملة كلما صغرت Δh ولاصق المسار المغلق السطح . واذن ، فى الحال ،

$$(٣٧) \quad E_{tan 1} = E_{tan 2}$$

وقد نشعر أن قانون الجهد لكثيرشوف مازال يمكن تطبيقه على هذه الحالة . وبالتأكيد لقد أوضحنا أن فرق الجهد بين أى نقطتين على الحدود والمتباعدتين بمسافة Δw هى نفسها فوق أو تحت الحدود مباشرة .



شكل ٩ - ٥ - الحدود بين عازلين مثاليين لهما سماحتان ϵ_1 و ϵ_2 استمرارية D_n مينة بالسطح الجاوس الى اليمين ، استمرارية E_{tan} بالتكامل الخطي حول مسار مغلق الى اليسار .

إذا كانت شدة المجال الكهربائي المماسي مستمرة عبر الحدود ، فتكون D المعاسة غير مستمرة ، لأن

$$\frac{D_{tan 1}}{\epsilon_1} = E_{tan 1} = E_{tan 2} = \frac{D_{tan 2}}{\epsilon_2}$$

أو

$$(٣٣) \quad \frac{D_{tan 1}}{D_{tan 2}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$

وتوجد شروط الحدود على المركبات العمودية بتطبيق قانون جاوس على « علبة الجيوب » الصغيرة المبينة على اليمين في شكل ٩ - ٥ . والجواب ، مرة أخرى قصيرة جدا ، والتدفق التارك لسطحي القمة والقاع هو الفرق

$$D_{n1} \Delta S - D_{n2} \Delta S = \Delta Q = \rho_s \Delta S$$

ومنها

$$(٣٤) \quad \boxed{D_{n1} - D_{n2} = \rho_s}$$

مامي كثافة الشحنة السطحية هذه ؟ . انها لا يمكن أن تكون كثافة شحنة سطحية مقيدة ، لأننا نأخذ استقطاب العازل في الاعتبار باستخدام ثابت عازل مختلف عن الوحدة ، أى أنه ، بدلا من اعتبار شحنات مقيدة في فضاء حر ، نستخدم سماحية مزادة . أيضا ، أنه غير محتمل للغاية أن تكون أى شحنة حرة على السطح البيني ، لأن الشحنات

الحررة غير متاحة في العوازل المثالية التي نعتبرها . وإذا فهذه الشحنة يجب أن تكون قد وضعت هناك بتعمد ، وبذلك ملغية توازن الشحنة الكلية في وعلى هذا الجسم العازل .
فبما عدا هذه الحالة الخاصة يمكننا أن نفرض ρ_s صفرا على السطح البيني و

$$(35) \quad D_{n1} = D_{n2}$$

أو أن المركبة العمودية لـ D مستمرة . ويتبع أن

$$(36) \quad \epsilon_1 E_{n1} = \epsilon_2 E_{n2}$$

والمركبة العمودية لـ E غير مستمرة .

وهذه الشروط يمكن أن تُضم لتظهر التغير في المتجهات D و E عند السطح . دع D_1 و E_1 يعمل زاوية θ_1 مع عمودي على السطح (شكل ١٠ - ٥) . لأن المركبات العمودية لـ D مستمرة ،

$$(37) \quad D_{n1} = D_1 \cos \theta_1 = D_2 \cos \theta_2 = D_{n2}$$

النسبة بين المركبات المماسية معطاة بـ (٣٣) بالصورة

$$\frac{D_{\tan 1}}{D_{\tan 2}} = \frac{D_1 \sin \theta_1}{D_2 \sin \theta_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$

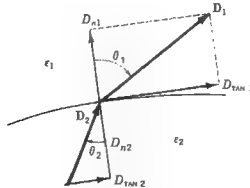
أو

$$(38) \quad \epsilon_2 D_1 \sin \theta_1 = \epsilon_1 D_2 \sin \theta_2$$

وقسمة هذه المعادلة على (٣٧) يعطى

$$(39) \quad \frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$

في شكل ١٠ - ٥ قد افترضنا أن $\epsilon_1 > \epsilon_2$ ، ولذلك $\theta_1 > \theta_2$.



شكل ١٠ - ٥ انكسار D عند سطح بيني لمائزين . للحالة المبينة ، $\epsilon_1 > \epsilon_2$ ، E_1 و E_2 موجبتين على D_1 و D_2 ، مع $E_1 < E_2$ و $D_1 > D_2$.

اتجاه E على كل جانب من الحدود مطابق لاتجاه E ، لأن $D = \epsilon E$ ومقدار D وفى المنطقة ٢ يمكن أن يوجد من (٣٧) و (٣٨) ،

$$(40) \quad D_2 = D_1 \sqrt{\cos^2 \theta_1 + \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\right)^2 \sin^2 \theta_1}$$

ومقدار E_2 هو

$$(41) \quad E_2 = E_1 \sqrt{\sin^2 \theta_1 + \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\right)^2 \cos^2 \theta_1}$$

ويظهر فحص هذه المعادلات أن D أكبر فى المنطقة ذات السماحية الأعلى (إلا إذا كان $\theta_2 = 0$ ، حيث لا يتغير المقدار) وأن E أكبر فى المنطقة ذات السماحية الأقل (إلا إذا كان $\theta_2 = 90^\circ$ ، حيث لا يتغير المقدار) .

وشروط الحدود هذه (٣٢) ، (٣٣) ، (٣٥) و (٣٦) ، أو علاقات المقدار والاتجاه المستنتجة منها ، (٣٩) الى (٤١) ، تسمح لنا أن نجد بسرعة المجال على جانب من الحدود إذا عرفنا المجال على الجانب الآخر . وكانت هذه هى الحالة فى المثال الذى بدأناه عند نهاية القسم السابق . والان دعنا ننبئ تلك المسألة . تذكر أنه كان لدينا شريحة من التفلون تمتد من $x=0$ الى $x=a$ ، كما هو مبين فى شكل ١١ - ٥ ، مع فضاء حر على جانبيها ومجال خارجى E_0 . ولدينا أيضا $D_{out} = \epsilon_0 E_0$. $P_{out} = 0$ و

وبالداخل ، استمرارية D_n عند الحدود تسمح لنا أن نجد أن :

$$E_{in} = D_{in}/\epsilon = \epsilon_0 E_0 a_x / (\epsilon_R \epsilon_0) = D_{in} = D_{out} = \epsilon_0 E_0 a_x$$

$$0.476 E_0 a_x$$

تفلون

$$\epsilon_R = 2.1$$

$$x_p = 1.1$$

$E = E_0 \longrightarrow$	$\longrightarrow E = 0.476 E_0$	$\longrightarrow E = E_0$
$D = \epsilon_0 E_0 \longrightarrow$	$\longrightarrow D = \epsilon_0 E_0$	$\longrightarrow D = \epsilon_0 E_0$
$P = 0 \bullet$	$\longrightarrow P = 0.524 \epsilon_0 E_0$	$\bullet P = 0$

$$x = 0$$

$$x = a$$

شكل ١١ - ٥ معرفة المجال الكهربى خارج المازل يمكننا من أن نجد باقى المجالات الخارجية أولا ، ثم أن نستخدم استمرارية D العمودية لنبدأ ابجد المجالات الداخلية .

لنحصل على مجال الاستقطاب في العازل ، نستخدم $D = \epsilon_0 E + P$ ونحصل على

$$P_{in} = D_{in} - \epsilon_0 E_{in} = \epsilon_0 E_0 a_x - 0.476 \epsilon_0 E_0 a_x = 0.524 \epsilon_0 E_0 a_x$$

$$D_{in} = \epsilon_0 E_0 a_x \quad (0 \leq x \leq a)$$

$$E_{in} = 0.476 E_0 a_x \quad (0 \leq x \leq a)$$

$$P_{in} = 0.524 \epsilon_0 E_0 a_x \quad (0 \leq x \leq a)$$

وفي الغالب لا نمدنا مسألة عملية بمعرفة مباشرة للمجال على أى من جانبي الحدود .
ويجب أن نستخدم شروط الحدود لتساعدنا على تعيين المجالات على جانبي الحدود من
المعلومات الأخرى المعطاة . ومسألة بسيطة من هذا النوع سوف تعتبر في قسم ١٠ - ١٠ .

\\ وشروط الحدود الموجودة عند السطح البيني بين موصل وعازل أبسط بكثير من تلك
السابقة . أولا ، نعرف أن D و E كلاهما صفر داخل الموصل . ثانيا ، المركبات المماسية
للمجال E و D يجب أن يكون كلاهما صفرا ليحقق

$$\int E \cdot dL = 0$$

و

$$D = \epsilon E$$

وأخيرا ، تطبيق قانون جاوس ،

$$\oint D \cdot dS = Q$$

يبين مرة أخرى أن كلا من D و E عمودى على سطح الموصل وأن $D_n = \rho_s$ و $E_n = \rho_s / \epsilon$. عندئذ ، نرى أن شروط الحدود التي استنتجناها من قبل لحدود الموصل -
الفضاء الحرة صحيحة لحدود الموصل - العازل إذا استبدلنا ϵ_0 بـ ϵ . وعلى هذا

$$(٤٢) \quad D_t = E_t = 0$$

$$(٤٣) \quad D_n = \epsilon E_n = \rho_s$$

ومن المجدى أن نقضى لحظة لاكتشاف كيف تصل أى شحنة أدخلت في مادة موصلة
الى السطح كشحنة سطحية . ويجب أن نفهم أن ذلك ليس حدثا عاما ، ولكنه يعطينا
بعض التبصر الإضافي في خواص الموصل .

إذا أعطينا قانون أوم

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

ومعادلة الاستمرارية

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

التي فيها كلا ρ و \mathbf{J} يتضمن شحنات حرة فقط ، نحصل على

$$\nabla \cdot \sigma \mathbf{E} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

أو

$$\nabla \cdot \frac{\sigma}{\epsilon} \mathbf{D} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

إذا فرضنا أن الوسط متجانس ، بحيث لا يكون σ و ϵ دوال في الموضع ،

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = -\frac{\epsilon}{\sigma} \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

والآن يمكننا أن نستخدم معادلة ماكسويل الأولى لنحصل على

$$\rho = -\frac{\epsilon}{\sigma} \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

دعنا الآن نعمل الفرض المبسط أن σ ليست دالة في ρ . ربما لا يكون هذا فرضا جيدا جدا ، لأننا وجدنا في قسم ٣-٥ ، معادلة (٩) ، أن σ تعتمد على كل من ρ والحركية ، ولكنه يؤدي الى حل سهل ، والذي يسمح لنا على الأقل أن نقارن موصلات مختلفة وببساطة نعيد التوزيع ونكامل مباشرة ، حاصلين على

$$\rho = \rho_0 e^{-(\sigma/\epsilon)t}$$

حيث ρ_0 = كثافة الشحنة عند $t = 0$ وهذا يوضح تناقص أسى لكثافة الشحنة عند كل نقطة مع ثابت زمن مقداره ϵ/σ . ثابت الزمن هذا ، غالبا يسمى زمن التراخي ، يمكن أن يحسب لموصل ضعيف نسبيا ، مثل الماء المقطر ، من البيانات في الملحق حـ ، معطيا

$$\frac{\epsilon}{\sigma} = \frac{80 \times 8.854 \times 10^{-12}}{2 \times 10^{-4}} = 3.54 \mu s$$

فأى شحنة نضعها بداخل جسم من الماء المقطر تتناقص الى حوالى 37 في المائة من قيمتها الابتدائية في $3.54 \mu S$. وهذا التناقص السريع من خواص الموصلات الجيدة ، ونرى أنه فيما عدا لفترات عارضة متناهية في القصر ، يمكننا بأمان أن نعتبر كثافة الشحنة صفراً بداخل موصل جيد .

ومع المواد الفيزيائية التى يجب أن نعمل بها ، لا يوجد مادة عازلة بدون بعض الالكترونات حرة قليلة ، وجميعها لها موصلية مختلفة عن الصفر ، وأى شحنة تدخل داخلها فى أى منها ستصل اخيرا الى السطح .

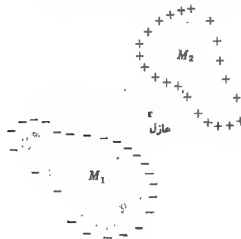
وبالمعرفة التى لدينا الآن عن المواد الموصلة ، المواد العازلة ، وشروط الحدود الضرورية ، فنحن مستعدون أن نعرف ونناقش السعة .

ت - ٥ - ٩ تحترق المنطقة $z < 0$ مادة عازلة لها $\epsilon_{R1} = 2.5$ ، بينما تختص المنطقة $z > 0$ بـ $\epsilon_{R2} = 4$. دع $E_1 = -30a_x + 50a_y + 70a_z$ V/m أوجد (أ) E_{n1} ، (ب) E_{t1} ، (ج) E_{n2} ، (د) E_{t2} ، (هـ) θ_1 .

الاجابة : 70.0 V/m ، $30a_x + 50a_y$ V/m ، 58.3 V/m ، 91.1 V/m ، 39.8 .

ت - ٥ - ١٠ أكمل المسألة ت - ٥ - ٩ بإيجاد : (أ) D_{n2} ، (ب) D_{t2} ، (ج) D_2 ، (د) P_2 ، (هـ) θ_2 .

الاجابة : 1.549 nc/m² ، 2.07 nc/m² ، $1.549a_z$ nc/m² + $1.771a_y$ + $1.062a_x$ — و $1.162a_z$ nc/m² + $1.328a_y$ + $0.797a_x$ ، 53.1° .



شكل ١٧ - ٥ موصولان متضادا الشحنة m و M_2 ، عايمان بعازل متظم . نسبة مقدار الشحنة على أى من الوصلين الى مقدار فرق الجهد بينهما هى السعة C .

• ٩ - السعة :

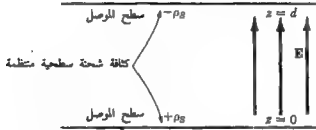
والآن دعنا نعتبر موصلين مغمورين في عازل متجانس (شكل ٥ - ١٢) . يحمل الموصل M_2 شحنة موجبة كلية Q ، ويحمل M_1 شحنة سالبة مساوية . ولاتوجد شحنات أخرى ، والشحنة الكلية للنظام صفر .

ونعرف الآن أن الشحنة معمولة على السطح كثافة شحنة سطحية ، وأيضا أن المجال الكهربائي عمودي على سطح الموصل . وعلاوة على ذلك فإن كل موصل سطح متساوي - الجهد . ولأن M_2 يحمل الشحنة الموجبة فإن التدفق الكهربائي موجه من M_2 إلى M_1 وعند الجهد الموجب أكثر . ويتعبّر آخر فإن شغلا يجب أن يبذل لحمل شحنة موجبة من M_1 إلى M_2 .

دعنا نرمز لفرق الجهد بين M_1 و M_2 بـ V_0 . نستطيع الآن أن نعرف سعة نظام الموصلين هذا بأنه نسبة مقدار الشحنة الكلية على أي موصل إلى فرق الجهد بين الموصلين .

$$(٤٤) \quad C = \frac{Q}{V_0}$$

وبتعبيرات عامة ، نعين Q بتكامل سطحي على الموصل الموجب ، ونجد V_0 بحمل وحدة شحنة موجبة من السطح السالب إلى الموجب ،



شكل ٥ - ١٣ : مسألة المكثف ذي اللوحين الموازيين . السعة لكل متر مربع من مساحة السطح هي ϵ/d .

$$(٤٥) \quad C = \frac{\int_S \epsilon \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}{-\int_+^- \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}}$$

والسعة لا تعتمد على الجهد والشحنة الكلية ، لأن نسبتها ثابتة . إذا أزيلت كثافة الشحنة بعامل N ، فإن قانون جاوس يُبين أن كثافة التدفق الكهربائي أو شدة المجال الكهربائي

تزيد أيضا بـ N ، كما يفعل فرق الجهد . والسعة دالة فقط للأبعاد الفيزيائية لنظام الموصلات ولسمحية العازل المتجانس .

ونقاس السعة بالفاراد (farad F) ، حيث يُعرف الفاراد بأنه واحد كولوم لكل فولت . والقيم الشائعة للسعة تميل الى أن تكون أجزاء صغيرة من الفاراد ، وبالتالي يكون المايكروفاراد (μF) والبيكوفاراد (pF) وحدات عملية أكثر .

ونستطيع أن نطبق تعريف السعة لنظام موصلين بسيط فيه الموصلان متماثلان ، مستويان لانهائيان متوازيان بفاصل d (شكل ٥ - ١٣) . باختيار مستوى الموصل السفلى عند $z = 0$ والعلوى عند $z = d$ ، فإن لوحا منتظما من شحنة سطحية $\pm \rho_s$ على كل موصل يؤدي الى المجال المنتظم (قسم ٢ - ٦ ، معادلة (٢١))

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_s}{\epsilon} \mathbf{a}_z$$

حيث سمحية العازل المتجانس هي ϵ ، و

$$\mathbf{D} = \rho_s \mathbf{a}_z$$

اذن يجب أن تكون الشحنة على المستوى السفلى موجبة ، لأن \mathbf{D} موجهة الى أعلى ، والقيمة العمودية لـ \mathbf{D} ،

$$D_n = D_z = \rho_s$$

تساوي كثافة الشحنة السطحية هناك . وعلى المستوى العلوى ،

$$D_n = -D_z$$

والشحنة السطحية هناك هي سالبة تلك على السطح السفلى . وفرق الجهد بين المستويين السفلى والعلوى هو

$$V_0 = - \int_{\text{upper}}^{\text{lower}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = - \int_d^0 \frac{\rho_s}{\epsilon} dz = \frac{\rho_s}{\epsilon} d$$

لأن الشحنة الكلية على أى من المستويين لانهائية ، فإن السعة لانهائية . ويُحصل على اجابة عملية أكثر باعتبار مستويين ، كل له مساحة S ، وأبعاده الخطية أكبر بكثير من فاصلهما d . وحيث أن يكون المجال الكهربى وتوزيع الشحنة منتظمين تقريبا عند كل النقط غير المجاورة للأحرف ، وهذه المنطقة الأخيرة تساهم فقط بنسبة مئوية صغيرة من السعة الكلية ، مما يسمح لنا أن نكتب النتيجة المألوفة

$$Q = \rho_s S$$

$$V_0 = \frac{\rho_s}{\epsilon} d$$

$$(46) \quad C = \frac{Q}{V_0} = \frac{\epsilon S}{d}$$

وبدقة صارمة أكثر ، يمكن أن نعتبر (46) كسعة جزء من تنظيم المستوى اللانهائي له مساحة سطحية S . ويجب أن تُؤجل طرق حساب تأثير التوزيع المجهول وغير المنتظم قرب الأحرف الى أن نصبح قادرين على حل مسائل جهد أكثر تعقيدا .

وكمثال : اعتبر مكثفا له عازل من الميكا ، $\epsilon_R = 6$ ، ومساحة لوح 10 in^2 وفاصل 0.01 in . السعة هي 1.350 pF . المساحة الكبيرة للوح يحصل عليها في مكثفات لها أبعاد فيزيائية صغيرة برص الواح أصغر في سندوتشات ذات 50 أو 100 لوح ، أو بلف الواح من الرقائق المعدنية مفصولة بعازل قابل للانثناء .

وبين جدول (ح- ١) في الملحق (ح) ايضا أنه يوجد مواد لها ثوابت عازلة أكبر من 1,000 .

إذا استخدم أكثر من موصلين ، فيجب أن تُعرف السعات الجزئية بين كل زوج من الموصلات . وهذا مُناقش بطريقة شيقة في أعمال ماكسويل^(١) .

وأخيرا ، فالطاقة الكلية المخزنة في المكثف هي

$$W_E = \frac{1}{2} \int_{\text{vol}} \epsilon E^2 dv = \frac{1}{2} \int_0^S \int_0^d \frac{\epsilon \rho_s^2}{\epsilon^2} dz dS = \frac{1}{2} \frac{\rho_s^2}{\epsilon} S d = \frac{1}{2} \frac{\epsilon S}{d} \frac{\rho_s^2 d^2}{\epsilon^2}$$

أو

$$(47) \quad W_E = \frac{1}{2} C V_0^2 = \frac{1}{2} Q V_0 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

وجميعها تعبيرات مألوفة . المعادلة (47) تبين أيضا أن الطاقة المخزنة في مكثف بفرق جهد ثابت عبره تزيد كلما زاد ثابت العازل للوسط .

ت ٥ - ١١ : أوجد سعة مكثف متوازي - الألواح له : (أ) الألواح مفصولة بمسافة 8 mm ، وكل بمساحة 2 m^2 ، وعازل له $\epsilon_R = 250$ ، (ب) $d = 0.08 \text{ mm}$ ، $S = 2 \text{ m}^2$ تدرج فولتي

(١) انظر المراجع في نهاية الفصل .

داخل مقداره 10^5 V/m ، وكثافة شحنة على أحد الألواح $2\mu\text{C/m}^2$ (ج) طاقة مخزنة مقدارها $5\mu\text{J}$ مع فولتية مقدارها 4V بين الألواح .

الاجابة : $0.625\mu\text{F}$, $0.500\mu\text{F}$, $0.553\mu\text{F}$.

• - ١٠ امثلة سعة عديلية :

كمثال أول مختصر ، نختار كيلا محوريا ، أو مكثفا محوريا نصف قطره الداخل a ، نصف قطره الخارجى b ، وطوله L . الامر لا يتطلب كفاحا استنتاجيا كبيرا ، لان فرق الجهد يعطى كعادلة (١١) فى قسم ٤-٣ ، وهذه ببساطة تقسم على الشحنة الكلية Q فى الطول L . وعلى هذا

$$(٤٨) \quad C = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln(b/a)}$$

ثم نعتبر مكثفا كرويا مكونا من قشرتين كرويتين موصلتين متحدى المركز نصف قطريهما a و b ، $b > a$. وتعبير المجال الكهربى حصل عليه سابقا باستخدام قانون « جاوس » ،

$$E_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}$$

حيث المنطقة بين الكرتين هي عازل بسماحية ϵ .

وتعبير فرق الجهد وجد من هذا بواسطة التكامل الخطى . وعلى ذلك ،

$$V_{ab} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

هنا تمثل Q الشحنة النكلىة على الكرة الداخلية ، وتصبح السعة

$$(٤٩) \quad C = \frac{Q}{V_{ab}} = \frac{4\pi\epsilon}{1/a - 1/b}$$

إذا سمحنا للكرة الخارجية أن تصبح كبيرة لانهايا ، نحصل على سعة كرة موصلة منفردة ،

$$(٥٠) \quad C = 4\pi\epsilon a$$

ولقطر مقداره 1 cm أو كرة فى حجم بلبه تقريبا ،

فى فضاء حر . $C \approx 0.556 \text{ pF}$

وتغطي هذه الكرة بطبقة عازل مختلف له $\epsilon = \epsilon_1$ عندما $r = a$ الى $r = r_1$ ،

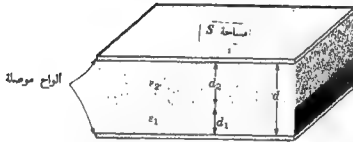
$$D_r = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

$$E_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_1 r^2} \quad (a < r < r_1)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (r_1 < r)$$

ويكون فرق الجهد

$$\begin{aligned} V_a - V_\infty &= - \int_{r_1}^a \frac{Q}{4\pi\epsilon_1 r^2} dr - \int_\infty^{r_1} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr \\ &= \frac{Q}{4\pi} \left[\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r_1} \right) \frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{r_1} \frac{1}{\epsilon_0} \right] \end{aligned}$$



شكل ١٤ - ٥ : مكثف متوازي- الألواح يحتمل عازلين مع سطح العازل البيني موازى للألواح الموصلة ،
 $C = 1/[(d_1/\epsilon_1 S) + (d_2/\epsilon_2 S)]$

ولذلك ،

$$(٥١) \quad C = \frac{4\pi}{(1/a - 1/r_1)/\epsilon_1 + (1/r_1)/\epsilon_0}$$

ولكى ننظر في مسائل العوازل المتعددة بشمول أكثر قليلا ، دعنا نعتبر مكثفا متوازي- الألواح مساحته S ويتباعد d ، مع الفرض المعتاد أن d صغيرة بالنسبة للأبعاد الطولية للألواح . السعة هي $\epsilon_1 S/d$ مستخدمين عازلا سماحيته ϵ_1 . والآن دعنا نستبدل جزءا من هذا العازل بأخر سماحيته ϵ_2 ، واضعين الحد بين العازلين ، موازيا للألواح (شكل ١٤ - ٥) .

وبعضنا قد يظن في الحال أن هذه المجموعة ، من حيث الفاعلية ، هي عبارة عن مكثفين على التوالي ، مُنتجة سعة كلية مقدارها .

$$C = \frac{1}{(1/C_1) + (1/C_2)}$$

حيث $C_1 = \epsilon_1 S/d_1$ ، و $C_2 = \epsilon_2 S/d_2$. وهذه هي النتيجة الصحيحة ، ولكننا نستطيع الحصول عليها باستخدام بداهة أقل وطريقة أكثر أساسية .

ولأن تعريف سعتنا ، $C = Q/V$ يتضمن شحنة وفولتية ، فيمكننا أن نفرض أيهما ، ونجد الآخر بدلاتها . والسعة ليست دالة لأيهما ، ولكن للموازى وهندسة النظام . افترض اننا فرضنا فرق جهد V_0 بين اللوحين . شدة المجال الكهربى فى المنطقتين E_1 و E_2 كلاهما منتظم ، و $V_0 = E_1 d_1 + E_2 d_2$. عند سطح العازل البينى ، E عمودية و $D_{n1} = D_{n2}$ أو $\epsilon_1 E_1 = \epsilon_2 E_2$. ويحذف E_2 فى علاقة V_0 ، نحصل على

$$E_1 = \frac{V_0}{d_1 + (\epsilon_1/\epsilon_2) d_2}$$

ولذلك كثافة الشحنة السطحية مقدارها

$$\rho_{s1} = D_1 = \epsilon_1 E_1 = \frac{V_0}{d_1/\epsilon_1 + d_2/\epsilon_2}$$

ولأن $D_1 = D_2$ فان مقدار الشحنة السطحية هى نفسها على كلا اللوحين . وعندئذ تكون السعة

$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{\rho_{s1} S}{V_0} = \frac{1}{d_1/\epsilon_1 S + d_2/\epsilon_2 S} = \frac{1}{1/C_1 + 1/C_2}$$

وكحل بديل (وأبسط قليلا) ، يمكننا أن نفرض شحنة Q على أحد اللوحين ، مؤدية الى كثافة شحنة Q/S وقيمة لـ D التى هى أيضا Q/S . وهذا صحيح فى كلا المنطقتين ، لأن $D_{n1} = D_{n2}$ و D عمودية . عندئذ :
وفروق الجهد عبر المناطق هى $E_2 = D/\epsilon_2 = Q/\epsilon_2 S$ ، $E_1 = D/\epsilon_1 = Q/\epsilon_1 S$
و $V_1 = E_1 d_1 = Qd_1/\epsilon_1 S$ و $V_2 = E_2 d_2 = Qd_2/\epsilon_2 S$ السعة تكون

$$(٥٢) \quad C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{V_1 + V_2} = \frac{1}{d_1/\epsilon_1 S + d_2/\epsilon_2 S}$$

كيف يمكن أن تتغير طريقة الحل ، أو الاجابة اذا كان هناك مستوى موصل ثالث على السطح البينى ؟ . يمكننا الآن أن نتوقع أن نجد شحنة سطحية على كل من جانبي هذا الموصل ، ومقادير هذه الشحنات يجب أن تكون متساوية . وبتعبير اخر : نفكر فى الخطوط الكهربائية ليست على أنها تمر مباشرة من لوح خارجى الى الآخر ، ولكن على أنها تنتهى على أحد جانبي هذا المستوى الداخلى ، ويعد ذلك مستمرة على الجانب الآخر . والسعة

لاتنغير ، على شرط ، بالطبع ، أن الموصل المضاف ذو سمك مهمل . وإضافة لوح موصل سميك سيزيد السعة إذا بقي الانفصال بين الألواح الخارجية ثابتا ، وهذا مثال لنظرية أكثر عمومية ، والتي تقرر أن استبدال أى جزء من العازل بجسم موصل سيسبب زيادة في السعة .

إذا وضعت حدود العازل عمودية على اللوحين الموصلين وشغل العازلين مساحات S_1 و S_2 ، فإن فرق جهد V_0 مفترض سيتج شدى مجال $E_1 = E_2 = V_0/d$ وهذه مجالات مماسة عند السطح البيني ، ويجب أن يكونا متساويين . إذن يمكننا أن نجد بالتتابع

$$(٥٣) \quad C = \frac{\epsilon_1 S_1 + \epsilon_2 S_2}{d} = C_1 + C_2$$

كما يجب أن نتوقع .

في الوقت الحالى نستطيع أن نتعامل قليلا جدا مع مكثف مستخدم عازلين فيه بحيث أن يكون السطح البيني ليس عموديا أو موازيا للمجالات في كل مكان . بالتأكيد نعرف شروط الحدود عند كل موصل وعند سطح العازل البيني ، ومع ذلك لانعرف المجالات التي تطبق عليها شروط الحدود . ويجب أن نترك جانبا مثل هذه المسألة حتى تزيد معرفتنا بنظرية المجال ، ونكون راغبين وقادرين على استخدام أساليب تقنية رياضية أكثر تقدما .

ت ٥ - ١٢ أوجد السعة لـ : (أ) 100ft من كابل عورئى C/U 58 له موصل داخل قطره 0.0295 in ، وموصل خارجى قطره الداخل 0.116 in ، وعازل بوليثلين ، (ب) كرة موصلة نصف قطرها 1cm ، مغطاة بطبقة بوليثلين سمكها 1cm ، ومحاطة بكرة موصلة متحدة المركز نصف قطرها 2cm ، (ج) كرة موصلة نصف قطرها 1cm ، مغطاة بطبقة من البوليثلين سمكها 1cm ، ومحاطة بكرة موصلة متحدة المركز قطرها 3cm .

الاجابة : 2.87pF , 5.03pF , 2,800pF

ت ٥ - ١٣ في شكل ٥ - ١٤ ، دع $\epsilon_{R2} = 6$ ، $\epsilon_{R1} = 4$ ، $d_1 = 3mm$ ، $d_2 = 2mm$ و $S = 12 cm^2$ ، ودع ρ_s على السطح العلوى للوح السفلى $240nC/m^2$ أوجد E في كل منطقة والفولتية بين اللوحين .

الاجابة : 29.4V , 4,520V/m , 6,780V/m .

٥ - ١١ سعة خط ذى سلكين :

نختتم هذا الفصل بمسألة الخط ذى السلكين . وستكون الهيئة النهائية من اسطوانتين موصلتين متوازيتين ، كل منهما له مقطع دائرى ، وسنستطيع أن نجد معلومات

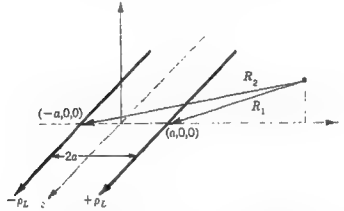
كاملة عن شدة المجال الكهربى ، مجال الجهد ، توزيع كثافة الشحنة السطحية ، والسعة .
وهذا التنظيم هو نوع هام لخط النقل ، كما هو الكابل المحورى الذى قد ناقشناه عدة مرات
من قبل .

ونبدأ بفحص مجال الجهد لخطى شحنة لانهايين . وبين شكل ١٥ - ٥ : خط
شحنة موجب فى المستوى xz عند $x = a$ وخط شحنة سالب عند $x = -a$. وجهد خط
شحنة مفرد مع مرجع صفرى عند r_0 هو

$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_0}{r}$$

والان نكتب تعبير مجال الجهد المتضام بدلالة المسافات نصف القطرية من الخطين الموجب
والسالب ، بالترتيب ، R_2 و R_1 ،

$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon} \left(\ln \frac{R_{10}}{R_1} - \ln \frac{R_{20}}{R_2} \right) = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon} \ln \frac{R_{10} R_2}{R_{20} R_1}$$



شكل ١٥ - ٥ : خطا شحنة لانهايان متوازنان بعملاق شحنة مضادة . والخط الموجب عند $x = a$, $y = 0$ والخط
السالب عند $x = -a$, $y = 0$ ونقطة عامة فى المستوى xy تبعد نصف قطرياً R_1 و R_2 من الخطين
الموجب والسالب ، بالترتيب . والأسطح متساوية - الجهد اسطوانات دائرية .

نختار $R_{10} = R_{20}$ واخضعين هكذا المرجع الصفرى عند مسافات متساوية من كل خط .
وهذا السطح هو المستوى $x = 0$. وبالتعبير عن R_1 و R_2 بدلالة x و y ،

$$(٥٤) \quad V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon} \ln \sqrt{\frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2}} = \frac{\rho_L}{4\pi\epsilon} \ln \frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2}$$

ولكى نتعرف على الأسطح المتساوية - الجهد ، ونفهم المسألة التى سوف نحلها فيها
وافياً ، فان بعض التصريفات الجبرية ضرورية . وباختيار سطح متساوى الجهد
دع $V = V_1$ ،

$$K_1 = e^{4\pi V_1/\rho_L}$$

وبذلك

$$K_1 = \frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2}$$

وبعد الضرب وتجميع الحدود المتساوية القوى ، نحصل على

$$x^2 - 2ax \frac{K_1 + 1}{K_1 - 1} + y^2 + a^2 = 0$$

ويمكننا اكمال المربع ،

$$\left(x - a \frac{K_1 + 1}{K_1 - 1}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2a\sqrt{K_1}}{K_1 - 1}\right)^2$$

مينة أن السطح متساوى - الجهد $V = V_1$ لا يعتمد على z (أى انه اسطوانه) ويقطع المستوى xy في دائرة نصف قطرها b ،

$$b = \frac{2a\sqrt{K_1}}{K_1 - 1}$$

التي تتركز عند $x = h$ ، $y = 0$ ، حيث

$$h = a \frac{K_1 + 1}{K_1 - 1}$$

والآن يمكننا تحديد مسألة فيزيائية بالسؤال عن السعة بين اسطوانة موصلة نصف قطرها b ومستوى على مسافة h من الاسطوانة . والموصلات أسطح متساوية - الجهد ، ونفى بشروطنا بحل أكمادلتين الأخيرتين في a ، موضع خط الشحنة المكافئ ، وفي K_1 ، بارامتر تبسيط الذى هو دالة في الجهد V_1 ، بدلالة h و b ،

$$a = \sqrt{h^2 - b^2}$$

و

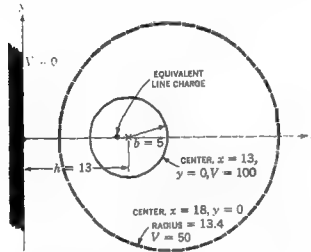
$$\sqrt{K_1} = e^{2\pi V_1/\rho_L} = \frac{h + \sqrt{h^2 - b^2}}{b}$$

ولأن المستوى عند جهد صفري والاسطوانة الدائرية عند جهد V_1 ، فإن فرق الجهد يكون V_1 ، أو

$$V_1 = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon} \ln \frac{h + \sqrt{h^2 - b^2}}{b}$$

ومقدار الشحنة على الاسطوانة ، على المستوى ، أو على خط الشحنة المكافئ. هو ρ_L من قانون « جاوس » ، والسعة بين الاسطوانة والمستوى لطول L هي لذلك

$$(55) \quad C = \frac{\rho_L L}{V_1} = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln [(h + \sqrt{h^2 - b^2})/b]} = \frac{2\pi\epsilon L}{\cosh^{-1}(h/b)}$$



$$h = 13, b = 5, \therefore K_1 = 25; \therefore \rho_L = 3.46 \times 10^{-9} \text{ C/m}, \therefore a = 12$$

$$\text{If } V_1 = 50, K_1 = 5, h = 18, b = 13.4, \rho_L \text{ UNCHANGED}$$

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln 5} = 34.6 \text{ pF/m}$$

شكل ١٦-٥ مثال لحدي لسة ، كثافة الشحنة الخطية ، موضع خط شحنة مكافئ ، وخصائص السطح متساوي الجهد النصفى لموصل اسطوانى نصف قطره 5m عند جهد 100V مواز له وعلى بعد 13m من مستوى موصل عند جهد صفر .

يبين شكل ١٦-٥ : اسطوانة نصف قطرها 5m عند جهد 100V ، بعيدة 13m في فضاء حر عن مستوى عند جهد صفر . والقيم العددية أوجدت - للشحنة الكلية - لكل وحدة طول على الاسطوانة ، والسعة بين الاسطوانة والمستوى ، وموضع سطح متساوى الجهد جهده 50V ، وموضع خط الشحنة الفئيلي الذى أمكنه أن يُنتج اسطوحاً متساوية - الجهد مطابقة .

شدة المجال الكهربى يمكن ايجادها بأخذ تدرج مجال الجهد (٥٤) ، و D تكون ϵE . ويتعين قيمة D عند السطح الاسطوانى ، يمكن إيجاد توزيع الشحنة السطحية . وللمثال السابق ، نجد أن

$$\rho_{S, \max} = 2.25 \rho_{S, \min}$$

ولموصّل نصف قطره صغير موضوع بعيداً عن المستوى ، نجد أن

$$(٥٦) \quad C = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln(2h/b)} \quad (b \ll h)$$

والسعة بين موصلين دائريين منفصلين بمسافة $2h$ هى نصف السعة المعطاة بـ (٥٥) و (٥٦) .

وهذه الاجابات الاخيرة ذات أهمية لأنها تعطينا تعبيراً للسعة لقسم من خط نقل ذى سلكين ، وهو واحد من أنماط خطوط النقل المدروسة فى الفصل الثانى عشر .

ت ٥ - ١٤ : أوجد السعة بين اسطوانة دائرية موصلة فى الهواء ، نصف قطرها 2.5mm و : (أ) مستوى موصل على بعد 1cm من محور الاسطوانة ، باستخدام معادلة (٥٥) ، قسم ٥ - ١١ ؛ (ب) مستوى موصل على بعد 1cm من محور الاسطوانة ، باستخدام معادلة (٥٦) ، قسم ٥ - ١١ ، (ج) اسطوانة ماثلة ، والمحاور منفصلة بمسافة 1cm الاجابة : 21.12pF/m ، 26.75pF/m ، 26.96pF/m .

مراجع مقترحة :

- 1 - Adler. R.B., A.C. Smith, and R.L. Longini : "Introduction to Semiconductor physics", John Wiley & Sons, Inc., New York, 1964.
نظرية اشباه الموصلات معالجة على مستوى دراسات مرحلة البكالوريوس .
- 2 - Dekker, A.J : "Electrical Engineering Materials", Prentice- Hall, Inc., Englewood cliffs, N.J., 1959.

هذا الكتاب الصغير الرائع يغطى الموازل ، الموصلات ، اشباه الموصلات ، والمواد المغناطيسية .

- 3 - Fano. R.M., L.J. Chu, and R.B. Ader: "Electromagnetic Fields, Energy, and Forces", John Wiley & Sons, Inc., New York, 1960.

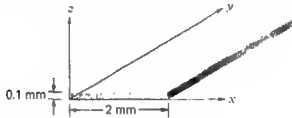
يناقش الاستقطاب فى الموازل فى الجزء الأول من الفصل الخامس . هذا كتاب للصف قبل الأخير يفترض مقرر فيزياء فى الكهربائية والمغناطيسية لفصل دراسى كامل

سابق ، ولهذا فهو متقدم فى المستوى . ويجب أن تقرأ المقدمة التى تبدأ على صفحة 1 .

- 4 - Fink, D.G., and H.W. Beaty : "Standard Handbook for Electrical Engineers", 11th ed., McGraw- Hill Book Company, New York, 1978.
- 5 - Matsch, L.W., "Capacitors, Magnetic Circuits, and Transformers", Prentice - Hall, Inc, Englewood Cliffs, N.J., 1964;
عديد من النواحي العملية للمكثفات مناقشة فى الفصل الثانى .
- 6 - Maxwell, J.C.: "A Treatise on Electricity and Magnetism", 3rd ed., Oxford University press, New York, 1904.
أر بطبعة رخيصة ورقية الغلاف
Dover Publications, Inc., New York, 1954 .
- 7 - Wert, C.A. and R.M. Thomson: "Physics of Solids", 2nd ed., Mc. Graw - Hill Book Company, New York, 1970. .
هذا كتاب متقدم فى مستوى مرحلة البكالوريوس وهو يغطى المعادن ، أشباه الموصلات والعوازل .

مسائل :

- ١ - كتلة تار مينة فى الاحداثيات الاسطوانية $J = 100e^{-2z} (\rho a_\rho + a_z) \text{ A/m}^2$ أوجد التيار الكلى المار خلال كل من هذه الأسطح (أ) $0 \leq \rho \leq 1, z = 0$ ، فى اتجاه a_z ، (ب) $0 \leq \rho \leq 1, z = 1$ فى اتجاه a_z ، (ج) الأسطوانة المخلفة المعروفة $0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq z \leq 1$ ، فى اتجاه نحو الخارج .



شكل ١٧-٥ انظر مسألة ٢ .

- ٢ - موصل شريطى ممين فى شكل ١٧-٥ . يسرى التيار فى اتجاه a_z بكثافة : $12,000 \cos 10^{10}t \text{ A/m}^2$ عند السطحين العلوى والسفلى ، ولكن التأثير السطحي يسبب نقصا فى الاتساع ، وتأخرا فى زاوية الطور عند النقط الداخلية . هكذا

بالقرب من السطح السفلى ، $J = 12,000e^{-10^6 z} \cos(10^{10}t - 10^6 z) \mathbf{a}_z$ A/m²

ومع تأثير مماثل عند السطح العلوى . افترض عدم التغير مع x . (أ) ماهو التيار الكلى $I(t)$ الذى تحمله الشريحة ؟ (ب) مامقدار التيار الذى كانت ستحمله اذا كانت J قيمتها العظمى عند كل النقط الداخلية ؟

٣- سطح عند $z = 0$ عبارة عن كاثود تنبعث منه الكترونات بسرعة ابتدائية صفرية .

ويؤثر عليها عندئذ بمجال كهربي $E = -2 \times 10^6 \mathbf{a}_z$ V/m ومعرفه أن للالكترتون $m = 9.11 \times 10^{-31}$ kg و $e = 1.602 \times 10^{-16}$ C

منبعث عند $t = 0$ (ب) أوجد $z(t)$ (ج) أوجد :

(د) $v(z)$ اذا كانت الالكترونات تترك الكاثود باستمرار كحزمة لها مقطع عرضى 10^{-7} m² و تيار كلى 100μ A ، أوجد كثافة التيار وكثافة الشحنة الحجمية كدوال فى z .

٤- فى المنطقة $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$ ، يعطى الجهد بـ $V = 120x^{4/3}V$

(أ) أوجد D, E ، و ρ اذا كانت كثافة الشحنة لها سرعة فى اتجاه \mathbf{a}_x هى : $6.5 \times 10^6 x^{2/3}$ m/s ، أوجد التيار الكلى العابر لمساحة 1 m^2 فى المستوى ، (ب) $x = 0$ (ج) $x = 1$.

٥- المركبة z لكثافة التيار هى $J_0 e^{-\alpha z} / [(x^2 + 1)(y^2 + 1)]$. عين التيار فى اتجاه \mathbf{a}_z العابر للسطح : (أ) $z = 0$ ، $|x| \leq 1$ ، $|y| \leq 1$ ، (ب) $z = 0$.

٦- كثافة التيار فى منطقة معينة يمكن أن تقرب بالدالة $J = (0.1e^{-10^6/r}) \mathbf{a}_r$ A/m²

فى الاحداثيات الكروية . (أ) ماكمية التيار العابر للسطح $r = 5$ عند $t = 1 \mu$ s ؟

(ب) أعد لـ $r = 6$. (ج) استخدم معادلة الاستمرارية لايجاد $\rho(r, t)$. (د) أوجد تعبيرا لسرعة كثافة الشحنة .

٧- بالقرب من النقطة $P(5, 7, -5)$ ، يمكن تمثيل كثافة التيار بالتعبير الاتجافى

$J = 2x^2 y \mathbf{a}_x - 5x^2 z^2 \mathbf{a}_y + 4x^2 y z \mathbf{a}_z$ A/m² . (أ) ماكمية التيار التارك لمكعب ،

ضلعه 1 m ، وحوافه موازية للمحاور الاحداثية ، متمركزا عند P ؟ (ب) باى معدل

تزيد كثافة الشحنة الحجمية عند P ؟

٨- يمكن كتابة معادلة استمرارية للكتلة مثلما للشحنة ، بفرض أن ليس هناك تحول بين

الكتلة والطاقة . (أ) ما هى الكميات المناظرة لـ J و ρ ؟ (ب) تبين قياسات عملت

على مكعب ضلعه 1 cm ان المعدلات التى تمر بها الكتلة خارجة خلال كل وجه عند

لحظة معينة من الزمن هى $9.7 \text{ mg/s}, 10.2 \text{ mg/s}$ —

و 1.8 mg/s و 2.1 mg/s — و 4.1 g/s . بفرض أن هذا المكعب

يمكن أن يفترض انه عنصر حجم تزايدى ، قرب المعدل الزمنى لتغير الكثافة عند

مركزه .

٩- قطعة من مادة موصلة لها $\sigma = 5M \text{ } \Omega / m$ على هيئة أسفين ميتور :
 $0 < \phi < 0.2\pi$, $4 < \rho < 10 \text{ Cm}$ خلال هذه المادة
 $E = 2a\rho / pmV/m$ (أ) ماهو التيار الكلى المار خلال الجسم ؟ (ب) ماهى مقاومته ؟
 ١٠- فى المسألة ٩ ، دغ $E = 2a\rho / p \text{ mv/m}$ وأوجد التيار الكلى والمقاومة .

١١- (أ) باستخدام البيانات المتوافرة فى الملحق (ج) ، احسب مقاومة سلك $1mi$ من الحديد المغلف بالألومنيوم إذا كان قطر القلب الحديد 0.25 in ، بينما القطر الخارجى هو 0.5 in . (ب) إذا كان الموصل حاملا لتيار مستمر كلى مقداره $50A$ ، أوجد القدرة المتبددة لكل بوصة مربعة من سطح الموصل الخارجى .

١٢- عنصر تسخين من محمصة خبز كهربائية يتكون من 1.5 m من صنف خاص من شريط نيكرامى ، مقطعه العرضى $0.05mm$ فى $0.8mm$ ، مع مقاومة مقدارها $1.1 \times 10^{-4} \Omega cm$. أوجد التيار الذى يسرى عندما يوصل 120 V.d.c بين طرفى المنصر ، وأوجد أيضا القدرة الناتجة .

١٣- عين $|J|$ فى موصل له : (أ) الحركية $4.1 \times 10^{-3} \text{ m}^2/V.s$ ، كثافة الشحنة الحجمية $3.6 \times 10^9 \text{ C/m}^3$ ، وشدة المجال الكهربى 0.085 V/m ، (ب) سرعة الانسياب $0.04mm/s$ وهناك يوجد 6×10^{28} الكترون توصيل لكل متر مكعب ، (ج) المقاومة $3 \times 10^{-8} \Omega m$ وشدة المجال الكهربى $48mV/m$.

١٤- يمكن مقارنة القيم المحسوبة عند نهاية قسم ٥- ٣ لسلك نحاسى مع تلك لموصل من الألومنيوم . سلك ألومنيوم رقمه 16 # له أيضا قطر يساوى 0.0508 in ، ولكن موصليته $3.82 \times 10^7 \text{ } \Omega / m$ (أ) أوجد مقاومة طول مقداره ميل . (ب) إذا كانت مقدرة حمل التيار هى $7A$ ، عين كثافة التيار والفولتية بين طرفى السلك . (ج) احسب E ، v_d و ρ إذا كان $\mu_e = 0.0014 \text{ m}^2/V.s$

١٥- $V = 1,1000\rho^2$ فى الاحداثيات الاسطوانية . (أ) فإذا كان الحيز $0.1 < \rho < 0.3m$ فراغا بينما الاسطح $\rho = 0.39\rho = 0.1$ موصلات ، عين كثافة الشحنة السطحية على كل موصل . (ب) ماهى الشحنة الكلية فى طول 1 m من الحيز المفرغ ، $0.3 < \rho < 0.1$ ؟ (ج) ماهى الشحنة الكلية فى طول 1 m ، مشتتلا كلا الشحنتين السطحيين ؟

١٦- مجال جهد معطى بالصورة $V = x^4 + y^4 - 1$. (أ) ارسم تخطيطا للسطحين متساوى الجهد ، $V = 0$ ، $V = 100V$. هذان سطحان موصلان . (ب) أوجد كثافة الشحنة الحجمية عند النقطة $P(2,1,3)$ فى فضاء حر بين الأسطح . (ج) أوجد كثافة الشحنة السطحية عند النقطة $C(1,0,0)$ على أحد الموصلين .

١٧ - كثافة الشحنة السطحية عند النقطة $P(-2, 5, -4)$ على سطح الموصل الكروي $x^2 + y^2 + z^2 = 45$ هي 75 nc/m^2 . فإذا كان الموصل معزولا في فضاء حر ، أوجد E مباشرة داخل ومباشرة خارج سطح الموصل عند P .

١٨ - السطح $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 100$ هو الحد لجسم موصل يقع في فضاء حر . تقع نقطة الأصل بداخل الموصل وتقع النقطة $A(18, -5, 2)$ على السطح . إذا كانت $|E| = 50 \text{ V/m}$ وموجهة للخارج عند النقطة A ، أوجد D ، E و ρ هناك .

١٩ - مجال جهد معطى بـ $V = 100 \ln \left[\frac{(x+1)^2 + y^2}{(x-1)^2 + y^2} \right]$. معلوم أن نقطة $P(2, 1, 1)$ على سطح موصل ، وأن الموصل يقع في فضاء حر . أوجد وحدة متجه عند P عموديا على السطح وأيضا قيمة كثافة الشحنة السطحية على الموصل .

٢٠ - شحنة نقطية Q موضوعة على مسافة h من مستوى موصل . عين المحل الهندسي للنقط في المستوى التي عندها مقدار كثافة الشحنة السطحية $0.1Q/h^2$.

٢١ - شحنتان نقطيتان قيمة كل منهما $100\pi \mu\text{C}$ — موضوعتان عند $(0, 1, -2)$ و $(2, 1, 0)$ ، السطح $x = 0$ هو مستوى موصل . (أ) عين كثافة الشحنة السطحية عند نقطة الأصل . (ب) عين ρ_s عند $P(0, h, 0)$.

٢٢ - الجزء الخطي $x = 0$ ، $-1 \leq y \leq 1$ ، $z = 1$ يحمل كثافة شحنة خطية : $\rho_L = \pi|y| \mu\text{C/m}$ دع $z = 0$ يكون مستوى موصل وعين كثافة الشحنة السطحية عند : (أ) $(0, 0, 0)$ ، (ب) $(0, 1, 0)$.

٢٣ - عند درجة حرارة معينة ، تعطى حركتي الإلكترون والفجوة في جرمانيوم ذاتي بـ $0.43 \text{ m}^2/\text{V.s}$ و $0.21 \text{ m}^2/\text{V.s}$ ، بالترتيب إذا كان كل من تركيزي الإلكترون والفجوة هو $2.3 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$ ، أوجد الموصلية عند درجة الحرارة هذه .

٢٤ - في عينه سيليكون معينة التي أضيف لها قليل من ذرات الفسفور ، هناك 2.0×10^{17} إلكترونات توصيل لكل متر مكعب و 2.24×10^{16} فجوات لكل متر مكعب . فإذا كان $\mu_n = 0.12 \text{ m}^2/\text{V.s}$ و $\mu_p = 0.025 \text{ m}^2/\text{V.s}$ ، عين الموصلية والمقاومة للعينة .

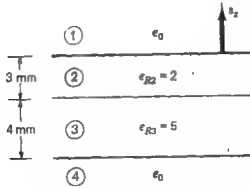
٢٥ - عينة شبه موصل لها مقطع مستطيل $1.5\text{mm} \times 2\text{mm}$ وطول 1.1 cm . والمادة لها كثافتا الإلكترون وفجوة $1.8 \times 10^{18} \text{ m}^{-3}$ و $3 \times 10^{15} \text{ m}^{-3}$ بالترتيب . إذا كان $\mu_n = 0.082 \text{ m}^2/\text{V.s}$ و $\mu_p = 0.552 \text{ m}^2/\text{V.s}$ ، أوجد المقاومة المبداء بين وجهي النهاية للعينة .

٢٦ - مجال الجهد في لوح من مادة عازلة لها $\epsilon_R = 1.6$ معطى بـ $V = -5,000x$. (أ) أوجد D ، E و P في المادة . (ب) عين قيم ρ ، ρ_b و ρ_f في المادة .

٢٧ - شدة المجال الكهربى عند نقطة معينة داخل زجاج بيركس معطاة ب :
 $E = -50a_x + 220a_y - 85a_z \text{ V/m}$ (أ) عين قيمة ϵ_R و χ لهذه المادة .
 (ب) احسب P و D عند النقطة المعينة .

٢٨ - مادة خاصة عازلة خطية ، متجانسة وموحدة الخواص تغطى المجال :
 $P = 18a_x - 30a_y + 5a_z \text{ nC/m}^2$ مع $D_x = 20.5 \text{ nC/m}^2$ عند نقطة معطاة . عين مقدار تدرج الفولتية وكثافة الطاقة عند تلك النقطة .

٢٩ - يحتوى الهيدروجين الذرى $5.42 \times 10^{25} \text{ atoms/m}^3$ عند درجة حرارة وضغط معينين . اذا سلط مجال كهبرى $2,500 \text{ V/m}$ ، فان ثنائى القطب المكون من الالكترون والنواة الموجبة له طول فعال d مقداره $6.7 \times 10^{-9} \text{ m}$. عين ثابت العازل لسته ارقام عشرية .



شكل ١٨ - انظر مسألة ٣٢ .

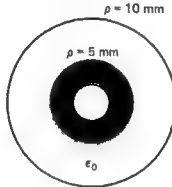
٣٠ - المنطقة 1 ($x \geq 0$) هى عازل له $\epsilon_{R1} = 2$ ، بينما المنطقة 2 ($x < 0$) لها $\epsilon_{R2} = 5$.
 دع $E_1 = 20a_x - 10a_y + 50a_z \text{ V/m}$ (أ) أوجد كثافة الطاقة فى كلتا المنطقتين .

٣١ - اذا أعطيت $\epsilon_{R1} = 1$ ، $\epsilon_{R2} = 2$ ، $E_1 = 30a_x - 15a_y + 45a_z \text{ V/m}$ ، دع سطح الحدود يحتوى على نقطة الأصل ، ودع المتجه $A = -2a_x + 5a_y + 14a_z$ يكون عموديا على السطح هناك ودعه يشير من المنطقة 1 الى المنطقة 2 . عين الزاوية (بين 0° و 90°) بين A و : (أ) E_1 ، (ب) D_1 ، (ج) E_2 ، (د) D_2 .

٣٢ - لوحان عازلان لانهايتان موضوعان فى فضاء حركما هوميين فى شكل ١٨ - ٥ . دع E_1 يكون موجهما الى أعلى . اذا كان $E_1 = 10a_x - 20a_y + 30a_z \text{ V/m}$ ، أوجد الزاوية بين E و E_1 فى المنطقة : (أ) 1 ، (ب) 2 ، (ج) 3 ، (د) 4 .

٣٣ - بالنسبة للكابل المحورى المحوى المحتوى على عازلين مختلفين ، والمبين فى شكل ٥ - ١٩ ، دع ρ_p تكون 20 nC/m^2 على الموصل الداخلى . ما هى الفولتية بين الموصلين الداخلى والخارجى ؟

٣٤- بالنسبة للكرتين الموصلتين المتحدتي المركز المفصلتين بواسطة عازلين مختلفين ، والتي يوحى بها شكل ٥- ١٩ فى مقطع محتو على مركزها ، دع ρ_s تكون 20 nC/m^2 على الكرة الداخلية . ماهى الفولتية بين الموصلين الداخلى والخارجى ؟



شكل ٥- ١٩ انظر مسألة ٣٣ و ٣٤ .



شكل ٥- ٢٠ انظر مسألة ٣٦ .

٣٥- مكثف متوازى- اللوح له انفصال بين اللوحين 4 mm ومساحة 64 cm^2 . والعازل من نوع له $\epsilon_R = 5$. (أ) احسب C . أحدثت الان فولتية 20 V بين اللوحين ، (ب) عين Q ، D ، E والطاقة المخزنة فى المكثف . والان ازيل مصدر الفولتية بدون تغيير الفولتية عبر المكثف . ثم سحب العازل بعناية للخارج من بين اللوحين ، (ج-) ماهى Q الان ؟ (د) أوجد ثمانية قيم D و E و W_E . (هـ) ماهى V_0 الان ؟

٣٦- بينت المناقشة فى الفصل الثانى أن شدة المجال الكهربى فى مكثف محورى ، مثل ذلك المبين فى شكل ٥- ٢٠ ، هو $E = \rho_L \epsilon_p / (2 \pi \epsilon_p)$ ، حيث ρ_L هى الشحنة لكل وحدة طول على الاسطوانة الداخلية . استخدم هذا المجال لتحسين قيمة C باستخدام معادلة (٤٥) ، قسم ٩- ، لطول L على سطح الاسطوانة الداخلية ، ولمسار نصف قطرى من الاسطوانة الخارجية الى الداخلية .

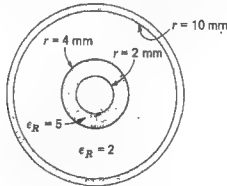
٣٧ - تميل المكثفات الى أن تكون مكلفة أكثر كلما زادت سعتها C وفولتيتها القصوى V_{max} . ويعتمد الفولت V_{max} على شدة المجال الذى ينهار عنده العازل ، E_{BD} . أى من هذه العوازل سيعطى أعلى حاصل ضرب $C \cdot V_{max}$: (أ) ميكا : $E_{BD} = 3 \times 10^6 \text{ V/m}$ ، $\epsilon_R = 5.4$ ، تيتانات الباريوم ، (ب) $E_{BD} = 10^8 \text{ V/m}$ ، $\epsilon_R = 6.6$ ، مطاط نيوبرين : (ج) $E_{BD} = 1.2 \times 10^6 \text{ V/m}$ ، $\epsilon_R = 1$ ، هواء : (د) $E_{BD} = 3 \times 10^6 \text{ V/m}$ ، $\epsilon_R = 1$.

٣٨ - مكثف متوازي الألواح له مساحة $S = 0.8 \text{ m}^2$ ، وافتصال $d = 10^{-4} \text{ m}$ ، وعازل له $\epsilon_R = 1,000$ ، ومجال 10^6 V/m فى العازل . (أ) احسب C و V_0 . (ب) كم عدد المكثفات اللازمة لاختزان الطاقة الكهربائية التى يمكن استردادها ، حوالى $5,000 \text{ J}$ ، فى خلية اضاءة واحدة ؟

٣٩ - كابل محورى مبين مقطعه العرضى فى شكل ٥ - ٢١ . (أ) أوجد السعة لكل متر طولى . (ب) اذا كان هناك 100 V بين الموصلين ، احسب $|E|$ فى كل مكان وارسمها كدالة فى ρ .

٤٠ - كرة موصلة قطرها 5 cm لها شحنة كلية مقدارها $1 \mu\text{C}$. الكرة محاطة بقشرة عازلة غير متجانسة $5 \leq r \leq 10 \text{ cm}$ ، فيها تتغير السماحية النسبية مع نصف القطر بالصورة $\epsilon_R(r) = 0.1/r$. وكرة موصلة ثانية عند $r = 10 \text{ cm}$. احسب السعة وفرق الجهد بين الموصلين .

٤١ - للمكثف متوازي - الألواح ذى العوازل المتعددة المبين فى شكل ٥ - ٢٢ ، احسب d_1 ، d_2 و d_3 اذا كانت : (أ) الطاقة المخزنة (لكل وحدة مساحة لوح) فى كل منطقة هى نفسها ، (ب) فرق الجهد عبر كل منطقة هو نفسه ، (ج) أوجد السعة لكل وحدة مساحات اذا كان $d_1 = 3 \text{ mm}$ ، $d_2 = 2 \text{ mm}$ ، $d_3 = 5 \text{ mm}$.



شكل ٥ - ٢١ انظر مسألة ٣٩ .

٤٢ - فى المكثف المبين فى شكل ٥ - ١٤ ، شدة المجال الكهربى تساوى 30 KV/m مباشرة فوق السطح البينى للعازل و 75 KV/mg مباشرة تحته د.ع. $V_0 = 90 \text{ V}$ ودع

اللوحين على بعد 2mm من بعضهما وبمساحة 10cm^2 . أوجد السعة اذا كان : $\epsilon_{RI} = 1.5$

٤٣ - لوحان موصلان متوازيان لكل مساحة سطحية 2m^2 . وانفصالهما 1.25mm في فضاء حر . وصلت بطارية 100V عبرهما ثم أبعثت . (أ) اعط مقادير Q , p_2 , E , D , W_E و C . (ب) أزلنا الآن بحرص بين اللوحيين لوحا من عازل سمكه 1mm وله نفس الشكل والمساحة كاللوحين . اذا كان $\epsilon_r = 5$ للمعازل ، فاعط مقادير V_0 , ρ_s , Q , W_E و C ، وأيضا E و D في المادة العازلة .
٤٤ - مكثف ينشأ من لوحين معدنيين ، كل مساحته 2m^2 ، مفصولين بـ 2mm . اذا اعطيت $1.5 \times 10^{-3} \text{m}^3$ من مادة عازلة لها $\epsilon_R = 4$ ، كيف يجب أن يستخدم العازل للحصول على النهاية العظمى للسعة بين اللوحيين ، وما هي C_{\max} ؟
٤٥ - موصل نصف قطره 7mm ومحوره يوازي وعلى بعد 25 mm من مستوى موصل . جهد الموصل 2,000V وذلك للمستوى هو 0V ، بفرض حالات فضاء حر ، أوجد : (أ) السعة لكل وحدة طول ، (ب) الشحنة لكل وحدة طول على الاسطوانة ، (ج) شدة المجال الكهربى عند النقطة على الاسطوانة الأكثر من المستوى .

٤٦ - موصلان نحاس رقمهما 16 # (قطر 1.29 mm) متوازيان بفواصل d بين المحورين . عين d لكي تكون السعة بين السلكين في الهواء 30pF/m
٤٧ - للمثال المبين فى شكل ٥-١٦ ، عين الفاصل (الأقل) بين الموصل الاسطوانى والسطح متساوى - الجهد ذى 75-V .



شكل ٥-١٦ انظر مسألة ٤١ .

الفصل السادس

طرق التخطيط التجريبية

لقد رأينا فى الفصول القليلة الأخيرة أن الجهد هو المدخل لآى معلومات نودها عن المجال الكهروستاتيكي عند نقطة . والمسار مباشر ، والسير عليه سهل فى أى اتجاه نرغب اتباعه ، ويمكن أن توجد شدة المجال الكهربى من الجهد بواسطة اجراء التدرج ، التى هى تفاضل ، ويمكن عندئذ ان يستخدم شدة المجال الكهربى لايجاد كثافة التدفق الكهربى بالضرب فى السماحية . وانفراج كثافة التدفق ، وهو مرة أخرى تفاضل يعطى كثافة الشحنة الحجمية ، وكثافة الشحنة السطحية على أى موصلات فى المجال توجد بسرعة بواسطة تقدير كثافة التدفق عند السطح . وتبين شروط الحدود أنها يجب أن تكون عمودية على مثل هذا السطح .

ولا يزال التكامل مطلوبا اذا احتجنا الى معلومات أكثر من قيمة مجال أو كثافة شحنة عند نقطة . فإيجاد الشحنة الكلية على موصل . والطاقة الكلية المخزنة فى مجال كهروستاتيكي ، أو قيمة سعة أو مقاومة هى أمثلة لمثل هذه المسائل ، فكل منها يتطلب تكاملا . وهذه التكاملات لايمكن عامة أن تتجنب ، مهما تكن سعة معرفتنا بنظرية المجال ، وفى الحقيقة ، سوف نجد أنه كلما أصبحت هذه المعرفة أكبر ، زادت التكاملات التى سوف نرغب فى إيجاد قيمها . والجهد يمكن أن يؤدى شيئا مهما لنا ، وهو أن يمدنا بسرعة ويسر بالكمية التى يجب ان نكاملها .

ومهمتنا ، عندئذ ، أن نوجد الجهد أولا . وهذا لايمكن أن يُعمل بدلالة تشكيل شحنة فى مسألة عملية ، لأنه لا يوجد أحد يستطيع أن يخبرنا بالضبط كيف توزع الشحنة ، بدلا من ذلك ، فعادة نعطى عدة أجسام موصلة أو حدود موصلة وفرق الجهد بينها ، مالم يحدث تعرفنا بأن أسطح الحدود تخص مسألة سهلة قد فرغنا منها بالفعل ، فاننا نستطيع أن نفعل القليل الآن ، ويجب أن نتظر حتى تناقش معادلة « لابلاس » فى الفصل القادم .

ومع اننا بذلك نؤجل الحل الرياضى لهذا النوع الهام من المسائل العملية ، فيمكننا أن نلم بالطرق التجريبية العديدة لايجاد مجال الجهد . وبعض من هذه الطرق يشمل على معدات خاصة مثل الحوض الالكترولى ، جهاز انسياب مائع ، ورق مقاومة ومعدنه الفظطرة المرتبطة به ، أو ألواح مطاط ، والبعض الآخر يستخدم فقط قلما ، وورقة وامدادا جيدا من الممححات . والجهد المضبوط لايمكن ابدا تعينه ، ولكن عادة يمكن

الوصول الى دقة كافية للأغراض الهندسية . وطريقة أخرى ، تسمى طريقة التكرار تسمح لنا أن نحقق أى دقة مرغوبة للجهد ، ولكن عدد الحسابات المطلوبة يزيد بسرعة جدا كلما زادت الدقة المرغوبة .

وعديد من الطرق التجريبية التى ستوصف بعد مبنية على تناظر مع المجال الكهروستاتيكي ، بدلا من قياسات مباشرة على هذا المجال نفسه .

وأخيرا ، لانتطيع تقديم هذا الموضوع عن الطرق التجريبية لايجاد مجالات الجهد بدون تأكيد الحقيقة أن عديدا من المسائل العملية لها هندسة معقدة لدرجة أنه غير ممكن أو محتمل ايجاد طريقة مضبوطة لايجاد هذا المجال . والطرق التقنية التجريبية هى الوحيدة التى يمكن استخدامها .

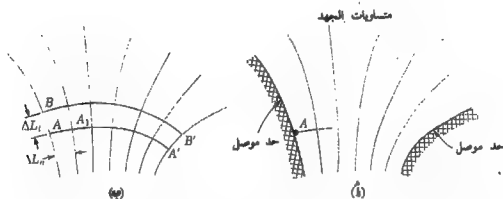
٦ - ١ المربعات المنحنية المخطوط

طريقتنا الأولى هى طريقة تخطيطية ، متطلبة فقط قلما وورقة . وبجانب كونها اقتصادية ، فهى أيضا قادرة على تقديم دقة جيدة اذا استخدمت بمهارة وصبر . يمكن الحصول على دقة مناسبة (خمسة الى عشرة فى المائة فى تقدير سعة) بواسطة مبتدئ والذى لايفعل أكثر من تتبع القواعد القليلة والتلميحات للأصول الفنية .

والطريقة التى سوف توصف يمكن تطبيقها فقط لمجالات لا يوجد فيها تغيير فى الاتجاه العمودى على مستوى الرسم التخطيطي . والطريقة مبنية على عدة حقائق قد أوضحناها فعلا :

١ - حد موصل هو سطح متساوى الجهد .

٢ - كل من شدة المجال الكهربى وكثافة التدفق الكهربى عموديان على الأسطح المتساوية الجهد .



شكل ٦ - ١ (أ) رسم تخطيطى للأسطح المتساوية الجهد بين موصلين . تزايد الجهد بين كل من المتساويين الجهد المتجاورين هو نفسه . (ب) خط تدفق واحد قد رسم من A إلى A' وأخر من B إلى B'

٣- E و D هما لذلك عموديان على حدود الموصل ولهما قيم مماسة صفرية .

٤ - خطوط التدفق الكهربى ، أو خطوط الانسياب ، تبدأ وتنتهى على شحنة ، وعلى ذلك ، فى عازل متجانس خالى الشحنة ، تبدأ وتنتهى على حدود الموصل فقط .

دعنا نعتبر مضمون معنى هذه النصوص برسم خطوط الانسياب على رسم تخطيطى مبين فيه الأسطح متساوية الجهد . فى شكل ٦- ١١ مبين حدود موصلين ، وقد رسمت مساويات - الجهد مع فرق جهد ثابت بين الخطوط . يجب أن نتذكر أن هذه الخطوط هى مجرد مقاطع الأسطح متساوية الجهد ، التى هى اسطوانات (وأن كانت غير دائرية) ، لأنه غير مسموح بتغير فى الاتجاه العمودى على سطح الورقة . ونختار بها للمعرف أن نبدأ خط انسياب ، أو خط تدفق ، عند A على سطح الموصل الموجب أكثر . الخط يترك السطح عموديا ويجب أن يتقاطع بزوايا متعامدة مع الأسطح متساوية الجهد غير المرسومة ، ولكنها حقيقية جدا ، بين الموصل وأول سطح مبين . ويمد الخط الى الموصل الاخر خاضعا للقاعدة الوحيدة ، ان التقاطع مع كل متساوى جهد يجب أن يكون متعامدا . وبادارة الورقة من جانب الى جانب ، بينما يتقدم الخط يمكننا أن نحافظ على التعامد بدقة أكثر . وقد اكمل الخط فى شكل ٦- ١١ ب .

وبطريقة مماثلة ، يمكننا أن نبدأ عند B ونرسم تخطيطيا خط انسياب آخر متتبايا عند B' . وقبل المواصلة ، دعنا نفسر معنى هذا الزوج من خطوط الانسياب . خط الانسياب ، بالتعريف ، مماس فى كل مكان لشدة المجال الكهربى أولكثافة التدفق الكهربى . ولأن خط الانسياب مماس لكثافة التدفق الكهربى ، فكثافة التدفق مماسة لخط الانسياب ، ولا يمكن لتدفق كهبرى أن يقطع أى خط انسياب . وبتعبير آخر ، اذا كان هناك شحنة مقدارها $5\mu C$ على السطح بين A و B (وممتدة 1 m الى داخل الورقة) ، عندئذ يبدأ $5\mu C$ من التدفق فى هذه المنطقة وكلها يجب أن تنتهى بين A' و B' .

مثل هذا الزوج من الخطوط يسمى أحيانا أنبوية تدفق ، لأنها فيزيائيا تبدو أنها تحمل تدفقا من نقطة لأخرى بدون أى فقد .

ونرغب الآن أن ننشئ خط انسياب ثالث ، وكلا من التفسيرات الرياضية والبصرية التى يمكن أن نمثلها من الرسم التخطيطى سوف تبسط بشدة اذا رسمنا هذا الخط ابتداء من نقطة ما C مختارة بحيث تحمل نفس كمية التدفق فى الانبوية BC مثل تلك المحتواة فى AB . كيف نختار موضع C ؟

شدة المجال الكهربى عند منتصف الخط الذى يصل A مع B يمكن أن توجد تقريبا بفرض قيمة للتدفق فى الانبوية AB ، مثلا $\Delta\psi$ ، التى تسمح لنا أن نعبّر عن كثافة

التدفق الكهربى بـ $\Delta\Psi / \Delta L_i$ ، حيث عمق الانبوبة هو I m و ΔL_i هو طول الخط الذى يصل A مع B . ومقدار E عندئذ هو

$$E = \frac{1}{\epsilon} \frac{\Delta\Psi}{\Delta L_i}$$

ومع ذلك ، يمكننا أيضا أن نجد مقدار شدة المجال الكهربى بقسمة فرق الجهد بين النقط A و A_i ، الواقعتين على سطحين متساويى - الجهد متجاورين ، على المسافة بين A الى A_i . اذا رمز لهذه المسافة بـ ΔL_n وفرض تزايد للجهد بمقدار ΔV بين متساويات - الجهد ، فان

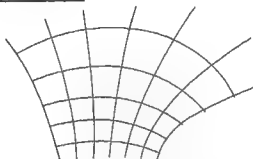
$$E = \frac{\Delta V}{\Delta L_n}$$

هذه القيمة تنطبق بأعلى دقة على النقطة عند منتصف جزء الخط من A الى A_i ، بينما كانت القيمة السابقة أدق ما تكون عند منتصف جزء الخط من A الى B . على أنه اذا كانت متساويات - الجهد متقاربة مع بعضها (ΔV صغيرة) وخطا الانسياب متقاربان مع بعضهما ($\Delta\Psi$ صغيرة) ، فان القيمتين المعيتين لشدة المجال الكهربى يجب أن تكونا متساويتين تقريبا ،

$$(١) \quad \frac{1}{\epsilon} \frac{\Delta\Psi}{\Delta L_i} = \frac{\Delta V}{\Delta L_n}$$

وفى رسمنا التخطيطى كله قد فرضنا وسطا متجانسا (ϵ ثابتة) ، تزايد جهد ثابت بين متساويات الجهد (ΔV ثابتة) ، ومقدار تدفق ثابت لكل أنبوبة ($\Delta\Psi$ ثابتة) . ولكنى تتحقق كل هذه الشروط ، يظهر من (١) أن

$$(٢) \quad \frac{\Delta L_i}{\Delta L_n} = \text{ثابت} = \frac{1}{\epsilon} \frac{\Delta\Psi}{\Delta V}$$



شكل ٦-٢ : ياقى خطوط الانسياب قد أضيفت لشكل ٦-١ ببدء كل خط جديد عموديا على الموصل والابتقاء على مربعات منحنية المخطوط فى الرسم التخطيطى كله .

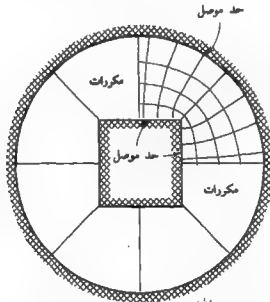
ويمكن عمل مناقشة مشابهة عند أى نقطة فى رسمنا التخطيطى ، ولذلك نقاد الى النتيجة أنه يجب المحافظة على نسبة ثابتة بين المسافة بين خطوط الانسياب كما تقاس

على طول متساوى جهد ، والمسافة بين متساويات الجهد كما تقاس على طول خط انسياب . وأن هذه النسبة هي التي يجب أن يكون لها نفس القيمة عند كل نقطة ، وليست الأطوال المفردة . ويجب أن يقل كل طول في المناطق ذات قوة مجال أعلى لأن ΔV ثابتة .

وأبسط نسبة يمكن أن تستخدمها هي الوحدة ، وخط الانسياب من B الى B' الموضح في شكل ٦-١ ب بدئىء عند نقطة لها $\Delta L_n = \Delta L_r$. ولأن النسبة بين هذه المسافات محفوظة عند الوحدة ، تقسم خطوط الانسياب ومتساويات الجهد المنطقة المحتوية على المجال الى مربعات منحنية الخطوط ، وهو تعبير يدل على شكل هندسى مستوى يختلف عن مربع حقيقى فى أن له جوانب منحنية قليلا وغير متساوية قليلا وتقترب من مربع كلما صغرت أبعاده . تلك العناصر السطحية التزايدية فى نظم احدائياتا الثلاث التي تكون مستوية يمكن أيضا أن ترسم كمربعات منحنية الخطوط .

والآن يمكننا بسرعة أن نرسم تخطيطيا فى باقى خطوط الانسياب بحفظ كل صندوق صغير مربعا ما أمكن . والرسم التخطيطى الكامل مبين فى شكل ٦-٢ .

والفرق الوحيد بين هذا المثال وانتاج تخطيط مجال باستخدام طريقة المربعات منحنية الخطوط هو أن أسطح الجهد البيئية تكون غير معطاة . وخطوط الانسياب ومتساويات الجهد يجب أن يرسموا على رسم تخطيطى أصلى يظهر حدود الموصل فقط . وحل واحد فقط هو الممكن ، كما سنثبت فيما بعد باستخدام نظرية الوحدات لمعادلة « لابلاس » ، والقواعد التي أوجزناها آنفا كافية . يبدأ بخط انسياب ، ثم يرسم



شكل ٦-٣ . مثال لتخطيط المجال بالمربع منحنى الخطوط . جانب المربع يساوى ثلثى نصف قطر الدائرة .

$$C = \epsilon_0 N_D / N_V = 57.6 \text{ pF/m} \text{ ولذلك } N_D = 8 \times 3.25 = 26 \text{ و } N_V = 4$$

بالتقريب خط متساوي - جهد في الشكل ، ويضاف خط انسياب آخر ، مكونا مربعا متحنى الخطوط ، وتدرجيا يمد التخطيط خلال كل المنطقة المرغوبة . ولأن لأحد منا يستطيع أبدا أن يتوقع أن يكون كاملا في تحقيق هذا ، سنجد بعد قليل أننا لم نعد نستطيع عمل مربعات مع المحافظة على أركان قائمة الزوايا .

ويتراكم خطأ في الرسم ، ومتاعنا الحالية يجب أن تبين طبيعة التصحيح الذي يعمل على بعض العمل السابق . وعادة أنه من الأفضل أن نبدأ ثانية رسما جديدا ، مع وجود الشكل القديم كمرشد .

وانشاء تخطيط مفيد للمجال هو فن ، والعلم يوفر القواعد فقط . ويتطلب الحلق في أى فن مرانا . ومسألة جيدة للمبتدئين هي الكابل المحورى أو المكثف المحورى ، لأن جميع متساويات - الجهد دوائر ، والرسم التخطيطي التالى الذى نشرع فيه يجب أن يكون لموصلين دائريين متوازيين ، حيث متساويات - الجهد دوائر مرة أخرى ، ولكن ذوات مراكز مختلفة . وكل من هذه معطى كمسألة عند نهاية الفصل ، ودقة الرسم التخطيطي يمكن أن تختبر بواسطة حساب السعة كما هو موضح فيما يلى :

يبين شكل ٦-٣ تخطيطا مكتملا لكابل يحترى موصل داخلى مربع محاط بموصل دائرى . وتوجد السعة من $C = Q / V_0$ باستبدال $Q = N_Q \Delta Q$ ، حيث N_Q هو عدد أنابيب التدفق التى تربط الموصلين ، وبأن ندع $V_0 = N_V \Delta V$ حيث N_V هو عدد تزايدات الجهد بين الموصلين ،

$$C = \frac{N_Q \Delta Q}{N_V \Delta V}$$

ثم باستخدام (٢) ،

$$(3) \quad C = \frac{N_Q}{N_V} \epsilon \frac{\Delta L_1}{\Delta L_n} = \epsilon \frac{N_Q}{N_V}$$

لأن $\Delta L_1 / \Delta L_n = 1$. تعيين السعة من رسم تدفق يشمل فقط عدد المربعات في اتجاهين ، بين الموصلات وحول أى من الموصلين . ونحصل من شكل ٦-٣ على

$$C = \epsilon_0 \frac{8 \times 3.25}{4} = 57.6 \text{ pF/m}$$

رامو ، هوينرى ، وفان دوزر لهم مناقشة ممتازة مع أمثلة لتكوين تخطيطات المجال بالمرمعات منحنية الخطوط . ويقدمون المقترحات التالية^(١) :

١ - خطط لعمل عدد من رسوم تخطيطية تقريبية ، كل منها يأخذ حوالى دقيقة ، قبل بدء أى رسم يُعمل بعناية . واستخدام ورق شفاف فوق الحدود الرئيسية يجعل بهذا الرسم التخطيطى الأولى .

٢ - قسم فرق الجهد المعروف بين الأقطاب الكهربائية الى عدد متساو من التقسيمات ، مثلا أربعة أو ثمانية كحداية .

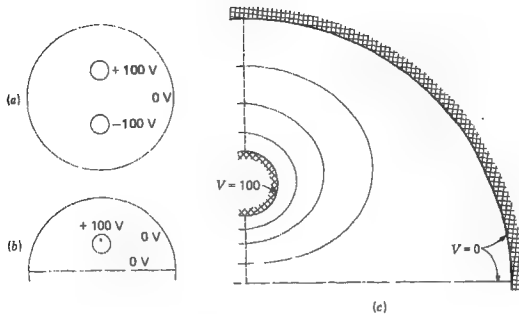
٣ - ابدأ رسم متساويات - الجهد التخطيطى فى المنطقة المعروف فيها المجال أكثر ما يمكن ، على سبيل المثال مثل منطقة ما حيث يقترب من مجال منتظم . مد متساويات الجهد طبقا لأحسن تخمين خلال كل الرسم . لاحظ انها يجب أن تميل الى الاحاطة بالزوايا الحادة للحدود الموصلة وتتباعد بالقرب من الزوايا المنفرجة للحدود .

٤ - ارسم مجموعة خطوط المجال المتعامدة . منذ البدء فى رسمها يجب أن تكون مرمعات منحنية الخطوط ، ولكن ، وهى تُمد ، يجب أن يبقى شرط التعامد قائما ، حتى ولو تسبب هذا فى بعض المستطيلات بنسب غير الوحيدة .

٥ - انظر المناطق التى لها نسب جوانب غير سليمة وحاول أن ترى ماذا كان خطأ فى التخمين الأول لمتساويات - الجهد . صححها وأعد الطريقة حتى توجد مرمعات منحنية الخطوط معقولة خلال الرسم كله .

٦ - فى المناطق التى لها شدة مجال ضعيف ، سيكون هناك أشكال كبيرة ، غالبا ما تكون لها خمسة أو ستة جوانب . ولكى تحكم على صحة الرسم فى هذه المنطقة ، يجب أن تقسم هذه الوحدات الكبيرة الى اقسام صغيرة . والتقسيمات الصغيرة يجب العودة لبدئها ، وكل مرة تقسم انبوية تدفق الى نصفين ، ويجب أن تقسم اقسام الجهد فى هذه المنطقة بنفس العامل .

(١) يصريح من S. Ramo, J.R. Whinnery, and T. Van Duzer, "Fields and Waves in Communication Electronics", Jhon Wiley & Sons, Inc., New York, 1965, PP. 160 -



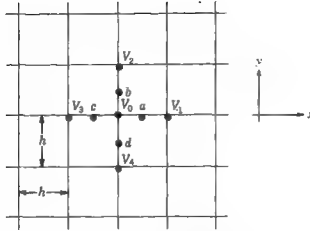
شكل ٦-٤ انظر مسألة ٦-١

ت ٦-١ : يبين شكل ٦-٤ أ المقطع العرضي لخط نقل ذي سلكين مدرع . دع الدرع الخارجية تكون عند $0V$ والموصل المملوء عند $100V$ والسفلى $-100V$. بالتماثل ، المستوى المركزي الأفقي أيضا عند $0V$ ، وتبسط المسألة لتلك التي في شكل ٦-٤ ب . ومرة أخرى نستخدم التماثل لتحديد موضع خطي تدفق رأسيين في مركز الشكل . ولذلك يبين شكل ٦-٩ ج ربع خط النقل المعطى . ومبين متساويات الجهد $25V$, $50V$ و $75V$. نصف القطر الداخلي للموصل الخارجي هو $8mm$ في الخط الفعلي . جهاز تخطيط مربع - منحنى الخطوط على شكل ٦-٤ ج واستخدمه لإيجاد قيم مناسبة لـ : (أ) السعة لكل متر طول للخط في شكل ٦-٤ أ إذا كان $\epsilon_R = 2.4$ ؛ (ب) E عند السطح الداخلي للدرع عند أعلى نقطة ؛ (ج) كثافة الشحنة السطحية عند أسفل الموصل ذو الـ $100V$.

الاجابة : $45pF/m$; $20kV/m$; $1.4\mu C/m^2$.

٦-٢ طريقة التكرار

في مسائل الجهد حيث يحدد الجهد كلية على حدود منطقة معطاة ، خاصة المسائل التي فيها لا يتغير الجهد في اتجاه واحد ، أي أن توزيعات الجهد ذات بعدين ، توجد هناك طريقة تكرارية تستخدم قلما وورقة ، قادرة على إعطاء أى دقة مرغوبة .



شكل ٥.٦ - جزء من منطقة تحتوي على مجال جهد ذي بعدين ، مقسمة إلى مربعات ضلعها h . والجهد V_0 يساوى تقريبا متوسط الجهود عند النقاط الأربع المجاورة .

ويجب أن تستخدم الحاسبات الرقمية عندما تطلب قيمة الجهد بدقة عالية ، وإلا ، فإن الزمن المطلوب يكون مانعا فيما عدا أبسط المسائل . وطريقة التكرار ، التي ستوصف فيما يلي ، تناسب جيدا الحاسب يأى حاسبة رقمية .

دعنا نفرض مسألة ذات بعدين لا يتغير فيها الجهد مع الاحداثى z ونقسم داخل المقطع العرضى للمنطقة حيث يرغب الجهد إلى مربعات طول جانبيها h . وجزء من هذه المنطقة مبينة في شكل ٥ - ٦ . والقيم المجهولة للجهد عند خمس نقاط متجاورة يرمز لها بـ V_4, V_3, V_2, V_1, V_0 . إذا كانت المنطقة خالية - الشحنة وتحتوى على عازل متجانس ، فإن $\nabla \cdot D = 0$ و $\nabla \cdot E = 0$ ومنها ، فى بعدين ، نحصل على .

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0$$

ولكن عملية التدرج تعطى $E_x = -\partial V / \partial x$ و $E_y = -\partial V / \partial y$ ، ومنها نحصل على^(١)

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

ويمكن الحصول على قيم تقريبية لهذه المشتقات الجزئية بدلالة الجهود المفروضة

لان

$$\left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_0 \approx \frac{V_1 - V_0}{h}$$

(١) هذه هي معادلة لابلاس فى بعدين . وستتبع صيغة الأبعاد - الثلاثة فى الفصل القادم .

و

$$\left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_c = \frac{V_0 - V_3}{h}$$

ومنها

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right|_0 = \frac{\left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_a - \left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_c}{h} = \frac{V_1 - V_0 - V_0 + V_3}{h^2}$$

وبالمثل

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right|_0 = \frac{V_2 - V_0 - V_0 + V_4}{h^2}$$

وبالضم نحصل على

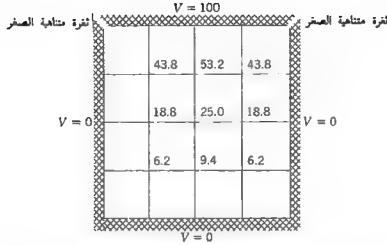
$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{V_1 + V_2 + V_3 + V_4 - 4V_0}{h^2} = 0$$

أو

$$(4) \quad V_0 = \frac{1}{4}(V_1 + V_2 + V_3 + V_4)$$

وبصيح التعبير مضبوطا كلما تقترب h من الصفر ، وسنكتبه بدون علامة التقريب . وهو صحيح بديهيا ، يخبرنا أن الجهد هو متوسط الجهد عند النقاط الأربع المجاورة . وطريقة التكرار تستخدم (4) فحسب لتعيين الجهد عند ركن كل مربع تقسيم جزئى بالدور ، ثم تكرر العملية على كل المنطقة عدة مرات حسب يلزم الى أن لا تتغير القيم بعد . وأحسن توضيح للطريقة بالتفصيل يكون بمثال .

للتبسيط ، اعتبر منطقة مربعة لها حدود موصلة (شكل ٦ - ٦) . جهد الحد العلوى هو 100V وذلك للجوانب والقاعدة هو صفر . والمسألة ذات بعدين ، والرسم التخطيطى مقطع عرضى للتشكيل الفزيائى . والمنطقة مقسمة أولا الى ١٦ مربعا ، ويجب الآن عمل تقدير ما للجهد عند كل ركن قبل تطبيق طريقة التكرار .



شكل ٦-٦ مقطع عرضي لحوض مربع جوانبه وقاعه عند جهد صفري والحد العلوي عند 100V . وقد قسم المقطع الى ١٦ مربعا ، مع جهد مقدر عند كل ركن . ويمكن تعيين قيم اكثر دقة باستخدام طريقة التكرار .

وكلما كان التقدير أحسن ، قصر الحل ، مع أن النتيجة النهائية لاتعتمد على هذه التقديرات الابتدائية . وعندما يستخدم الحاسب للتكرار ، عادة توضع الجهود الابتدائية تساوى صفرا لتبسيط البرنامج . ويمكن الحصول على قيم معقولة الدقة من تخطيط تقريبي للمربعات منحنية الخطوط ، أو يمكننا تطبيق (٤) على المربعات الكبيرة . وعلى ذلك يكون تقدير الجهد عند مركز الشكل $25.0 = 1/4 (100 + 0 + 0 + 0)$.

والآن يمكن تقدير الجهد عند مراكز المربعات الأربعة ذات الأطوال المضاعفة بأخذ متوسط الجهود عند الأركان الأربعة بتطبيق (٤) على مجموعة محاور قطرية . واستخدام هذا « المتوسط القطري » يُعمل فقط في تحضير تقديرات ابتدائية . وللمربعين العلويين المضاعفين ، نختار جهدا يساوى 50V للثغرة (متوسط 100,0) ، وعندئذ :

$$43.8 = 1/4 (50 + 100 + 25 + 0) = V \text{ (أقرب عشر للفولت}^{(١))} \text{ ، وللسفليات ،}$$

$$V = 1/4 (0 + 25 + 0 + 0) = 6.2$$

والجهد عند النقط الأربع الباقية يمكن أن نحصل عليه الآن بتطبيق (٤) مباشرة . والمجموعة الكاملة للقيم المقدرة مبينة في شكل ٦-٦ .

(١) عندما تقرب جزءا عشريا متنهايا بخمسة بالضبط ، يجب أن يعمل الرقم السابق زوجيا ، فمثلا ، 42.75 تصبح 42.8 و 6.25 تصبح 6.2 . وعامة يضمن ذلك طريقة عشوائية تزدى الى دقة افضل مما قد يحصل عليها بزيادة الرقم السابق دائما بواحد .

V = 100			
	43.0 42.6 42.8 42.8	52.8 52.5 52.6 52.6	43.0 42.6 42.8 42.8
V = 0			V = 0
	18.6 18.6 18.7 18.7	24.8 24.8 25.0 25.0	18.6 18.6 18.7 18.7
	7.0 7.1 7.1 7.1	9.7 9.8 9.8 9.8	7.0 7.1 7.1 7.1
V = 0			

شكل ٧-٦ نتائج كل من الخطوات الأربع الضرورية لمسألة شكل ٦-٦ مبنية بالترتيب في الأعمدة . القيم النهائية ، لم تتغير في الخطوة الأخيرة ، عند أسفل كل عمود .

والخطوة الأولى تعمل الآن للحصول على مجموعة مصححة للجهود ، ابتداء بالركن العلوي ليسار (بالقيمة 43.8 ، وليس بالحد حيث الجهد معروف وثابت) ، وبالعمل عبر الصف إلى اليمين ، ثم النزول إلى أسفل إلى الصف الثاني والتقدم من اليسار إلى اليمين مرة أخرى . وعلى ذلك فالقيمة 43.8 تتغير إلى :

$$430 = 100 + 53.2 + 18.8 + 0$$

وإذا تم استخدام الجهود الأحسن ، أو الاحداث عند تطبيق (٤) ، ولذلك نجد كلا النقطتين المعلمتين 43.8 تغيرت إلى 43.0 ، بسبب التماثل الواضح ، والقيمة 53.2 تصبح :

$$52.8 = 100 + 43.0 + 25.0 + 43.0$$

وبسبب التماثل ، فإن قليلا قد يكتسب بالاستمرار عبر الخط الملوى . كل نقطة على هذا الخط قد تحسنت الآن مرة واحدة . والنزول إلى أسفل إلى الخط التالي ، فإن القيمة 18.8 تصبح

$$\frac{1}{4}(43.0 + 25.0 + 6.2 + 0) = 18.6$$

ويستمر الخطو على هذا النحو . والقيم عند نهاية هذه الخطوة مبنية بالعدد العلوى في كل عمود في شكل ٧-٦ .

V = 100					
نقرة				خط تماثل	
	48.2	65.2 66.2 66.0 66.0 66.0 66.0 66.0 66.0 66.0 66.1 66.1	73.8 73.0 72.8 72.9 73.0	75.0 74.6 74.7 74.8 74.8 74.9	73.8 73.0 72.8 72.9 73.0
	48.2		73.0	74.9	73.0
	28.6 28.6 28.8 26.9	42.8 42.9 43.0 43.0 43.0 43.0 43.1 43.1	51.0 50.8 50.9 51.0 51.1 51.1 51.2 51.2	52.6 53.2 53.4 53.4 53.8 53.6	51.0 50.8 50.9 51.0 51.1 51.1 51.2
	26.9	43.1	51.2	53.6	51.2
	15.4 16.2 16.4	27.9 28.2	34.8 34.8 34.9 34.9 34.9 35.0	36.8 37.0 37.0 37.0 37.1 37.2	34.8 34.8 34.9 34.9 34.9 35.0
	16.4	28.2	35.0	37.2	35.0
V = 0	10.1 10.4 10.3	18.7 18.4	23.4	25.0	23.4
	10.3	18.4	23.4	25.0	23.4
	6.4 6.5	11.8	15.2 15.2 15.1	18.3 18.3 16.2	15.2 15.2 15.1
	6.5	11.8	15.1	16.2	15.1
	3.8	7.1 7.0	9.1 9.0	9.8 9.7	9.1 9.0
	3.8	7.0	9.0	9.7	9.0
	3.8	3.3 3.2	4.2	4.6 4.5	4.2
	3.8	3.2	4.2	4.5	4.2
V = 0					

شكل ٦-٨ مسألة شكلية ٦-٦ و ٦-٧ مقسمة إلى مربعات أصغر . والقيم المتحصل عليها في الخطوات التسع المتتالية مدرجة بالترتيب في الأعمدة .

يجب الآن عمل خطوات اضافية حتى تبدى القيمة عند كل ركن عدم تغير . وعادة تدخل قيم الخطوات المتتابعة تحت بعضها في صورة عمود ، كما هو مبين بشكل ٦- ٧ ، والقيمة النهائية مينة عند أسفل كل عمود . وأربع خطوات فقط مطلوبة في هذا المثال .

إذا كانت كل القيم التسع الابتدائية وضعت تساوى صفرا ، فمن المهم أن نلاحظ أن عشر خطوات كانت مطلوبة . وتكاليف جعل حاسب يعمل هذه الخطوات الإضافية ربما تكون أقل بكثير من تكاليف البرمجة الضرورية لعمل تقديرات ابتدائية مناسبة .

ولأن هناك فرقا كبيرا في الجهد من مربع إلى مربع ، لا يجب أن نتوقع أن تكون اجاباتنا دقيقة الى العشر من الفولت المبين (وربما ليست الى اقرب فولت) . وتأتى الدقة الأعلى من تقسيم كل مربع الى أربعة مربعات أصغر ، وليس من إيجاد الجهد لعدد أكبر من الأرقام المعنوية عند كل ركن .

في شكل ٦- ٨ ، الذى يظهر فقط أحد الأنصاف المتماثلة علاوة على عمود اضافى ، انجزت هذه التقسيمات الجزئية ، والجهد عند الأركان الجديدة الانشاء مقدر بتطبيق (٤) مباشرة حيث يمكن ذلك وقطريا عند الضرورة . ومجموعة القيم المقدرة تظهر عند أعلى كل عمود ، والقيم المنتجة بالخطوات المتتابعة تظهر بالترتيب الى أسفل .

وهنا يتطلب تسع مجموعات من القيم ، ويجب أن يلاحظ أنه لانتغير في القيم في الخطوة الأخيرة (شروط ضرورى للخطوة الأخيرة) ، وان قيمة واحدة فقط تتغير في كل من الخطوات الثلاث السابقة . ولانتغير أى قيمة في الصفوف الأربعة الأخيرة بعد الخطوة الثانية ، وهذا ينتج وفرا عظيما في الوقت ، لأنه اذا لم يتغير أى من الجهود الأربعة في (٤) ، فان الاجابة طبعا لانتغير .

ولهذه المسألة ، من الممكن أن نقارن قيمنا النهائية مع الجهود المضبوطة ، المتحصل عليها بتقدير قيم بعض المتسلسلات اللانهائية ، كما هو مناقش عند نهاية الفصل التالى . عند النقطة التى كان لها التقدير الاصلى 53.2 ، القيمة النهائية للشبكة الواسعة كانت 52.6 ، القيمة النهائية للشبكة الأدق كانت 53.6 ، والقيمة النهائية لشبكة 16×16 هي 53.93 V لرقمين عشرين ، باستخدام البيانات المتحصل عليها ببرنامج فورتران Fortran التالى :

```

1 DIMENSION A(17, 17), B(17, 17)
2 DO 6 I=2,17
3 DO 5 J=1,17
4 A(I,J)=0.
5 CONTINUE
6 CONTINUE
7 DO 9 J=2,16
8 A(1,J)=100.
9 CONTINUE
10 A(1,1)=50.

```

```

11 A(I,17)=50.
12 DO 16 I=2,16
13 DO 15 J=2,16
14 A(I,J)=(A(I,J-1)+A(I-1,J)+A(I,J+1)+A(I+1,J))/4.
15 CONTINUE
16 CONTINUE
17 DO 23 I=2,16
18 DO 22 J=2,16
19 C=(A(I,J-1)+A(I-1,J)+A(I,J+1)+A(I+1,J))/4.
20 B(I,J)=A(I,J)-C
21 IF((ABS(B(I,J))-.00001).GT.0.) GO TO 12
22 CONTINUE
23 CONTINUE
24 WRITE(6,25)((A(I,J),J=1,17),I=1,17)
25 FORMAT (1H0,17F7.2)
26 STOP
27 END

```

وبين خط 21 أن التكرار يستمر حتى يكون الفرق بين خطوتين متتاليتين أقل من 10^{-5} .

والجهد المضبوط المتحصل عليه بمفكوك فورير هو 54,05V لرقمين عشرين.

نقطتان أخريان مقارنتان أيضا في صورة جدولية ، كما هو مبين في جدول ٦ - ١ .

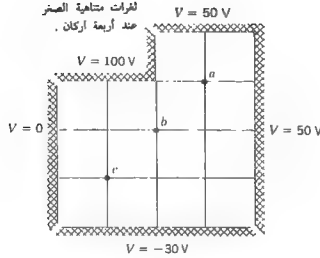
جدول ٦ - ١

تقدير أملي	53.2	25.0	9.4
4×4	52.6	25.0	9.8
8×8	53.6	25.0	9.7
16×16	53.93	25.00	9.56
مضبوط	54.05	25.00	9.54

ومخططات انسياب الحاسب وبرامج الحلول التكرارية معطاة في الفصل الرابع والعشرين من Boast^(١) والفصل الثاني والملحق من Silvester^(٢).

وتحسين طريقة التكرار معروف بطريقة الاسترخاء . وعامة تتطلب عملا أقل ، ولكن عناية أكثر في إجراء خطواتنا الحسابية^(٣).

١ - انظر المراجع المقترحة عند نهاية الفصل الثاني
٢ - انظر المراجع المقترحة عند نهاية هذا الفصل .
٣ - وصف مفصل يظهر في Scarborough ، والطريقة الأساسية ومثال موجود في Hayt . انظر بيانات المراجع عند نهاية الفصل .



شكل ٩ - ٦ : انظر مسألة ت ٩ - ٦

ت - ٦ - ٢ في شكل ٩ - ٦ ، شبكة مربعة مبنية داخل حوض جهد غير منتظم . باستخدام طريقة التكرار لإيجاد الجهد لأقرب فولت ، عين القيمة النهائية عند : (أ) نقطة a (ب) نقطة b ، (ج) نقطة c .
الاجابة : $4V$, $48V$, $61V$.

٦ - ٣ تناظرات بالتيار :

تعتمد عدة طرق تجريبية على تناظر بين كثافة التيار في وسط موصل وكثافة التدفق الكهربى فى وسط عازل . والتناظر موضع بسهولة ، لأنه فى وسط موصل ، لتيارات مستمرة فقط ، قانون أوم وعلاقة التدرج هما ،

$$J = \sigma E_o$$

$$E_o = -\nabla V_o$$

بينما فى عازل متجانس

$$D = \epsilon E_e$$

$$E_e = -\nabla V_e$$

وتخدم الرموز السفلية تمييز المسائل المتناظرة . ومن الواضح أن الجهود V_o و V_e ، وشدة المجال الكهربى E_o و E_e ، والموصلية والسماحية σ و ϵ ، وكثافة التيار وكثافة التدفق الكهربى J و D متناظرة أزواجاً .

بالرجوع الى التخطيط بالمربع - منحني الخطوط ، يمكننا تفسير أنابيب التدفق كأنابيب تيار ، وكل انبوبة تحمل الان عنصر تيار لا يستطيع ترك الانبوبة .

أخيرا ، يجب أن ننظر الى الحدود . ما هو المناظر لحدود موصلة التي تنهى تدفقا كهربيا عموديا ، ويكون سطحها متساوي - الجهد ؟ . والتناظر يقدم الاجابة ، ونرى أن السطح يجب أن ينهى كثافة التيار عموديا ويكون مرة أخرى سطحها متساوي - الجهد هذا هو سطح موصل تام ، مع انه في الممارسة العملية من الضروري فقط أن نستخدم واحدا تكون موصليته عدة مرات تلك التي للوسط الموصل .

ولذلك ، اذا رغبتا في أن نوجد المجال في مكثف محوري ، الذي - كما قد رأينا عدة مرات من قبل - هو جزء من مجال خط شحنة لانهاى ، فيمكننا أن نأخذ اسطوانتين نحاسيتين ونملأ المنطقة بينهما ، للتيسير ، بمحلول الكترولى . بوضع فرق جهد بين الاسطوانتين ، يمكننا أن نستخدم مجسلا لايجاد الجهد عند اى نقطة بينية ، أو لايجاد كل تلك النقاط ذات نفس الجهد . وهذا هو جوهر الحوض أو الخزان الالكترولى . والميزة العظمى لهذه الطريقة تقع في الحقيقة أنها ليست مفصولة على مسائل ذات البعدين . واقتراحات عملية لانشاء واستخدام الحوض معطاة في أماكن عديدة^(١) .

وتعيين السعة من قياسات الحوض الالكترولى سهلة جدا . التيار الكلى التارك للموصل الموجب أكثر هو

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \sigma \int_S \mathbf{E}_\sigma \cdot d\mathbf{S}$$

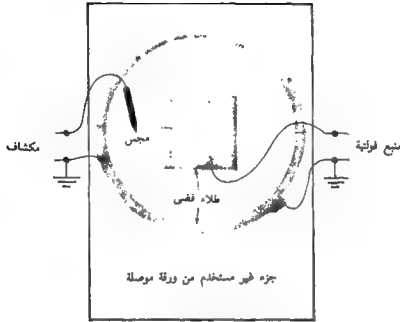
حيث التكامل السطحي المغلق مأخوذ على كل سطح الموصل . وفرق الجهد يعطى بسالب التكامل الخطى من اللوح الأقل الى الأكثر موجبة ،

$$V_{e0} = - \int \mathbf{E}_\sigma \cdot d\mathbf{L}$$

ولذلك فالمقاومة الكلية هي

$$R = \frac{V_{e0}}{I} = \frac{- \int \mathbf{E}_\sigma \cdot d\mathbf{L}}{\sigma \int_S \mathbf{E}_\sigma \cdot d\mathbf{S}}$$

(١) مرجع Weber حسن . انظر بيانات المراجع عند نهاية الفصل .



شكل ٦-١٠ مسالة موصلين في بعدين ، مماثلة لتلك التي في شكل ٦-٣ مرسومة على ورقة موصلة . ويمكن أن يستخدم المجلس لتتح مكان سطح متساوي- الجهد .

والسعة تعطى بنسبة الشحنة الكلية الى فرق الجهد ، ..

$$C = \frac{Q}{V_{c0}} = \frac{\epsilon \int_S \mathbf{E}_\epsilon \cdot d\mathbf{S}}{-\int_L \mathbf{E}_\epsilon \cdot d\mathbf{L}}$$

والان نطبق التناظر بأن ندع $V_{c0} = V_{\infty}$ و $\mathbf{E}_\epsilon = \mathbf{E}_\infty$. النتيجة هي

$$(٥) \quad RC = \frac{\epsilon}{\sigma}$$

وبمعرفة موصلية المحلول الالكتروليتي ومساحية العازل ، يمكننا تعيين السعة بقياس بسيط للمقاومة .

وطريقة تقنية أسهل متاحة للمسائل ذات البعدين . وتستخدم ورقة موصلة كقاعدة يرسم عليها الحدود الموصلة بطلاء فضة . في حالة المكثف المحوري ، يجب أن نرسم دائرتين نصف قطريهما ρ_A و ρ_B ، بمد طلاء مسافة قصيرة للخارج من ρ_B وإلى الداخل من ρ_A ليوفر مساحة كافية لتصنع اتصالا جيدا مع أسلاك الى منبع جهد خارجي . ومرة أخرى يستخدم مجلس لايجاد قيم الجهد بين الدوائر .

يظهر شكل ٦-١٠ حدود طلاء الفضة التي قد ترسم على ورقة موصلة لتعيين سعة خط نقل مربع . داخل دائرة مثل ذلك المبين في شكل ٦-٣ . المولد والمكشاف

يعملان في أكثر الأحيان عند $1,000\text{Hz}$ للسماح باستخدام مكشاف موالف أو قنطرة أكثر حساسية .

ت ٦-٣ الورق الموصل المستخدم في شكل ٦-١٠ يعطى مقاومة مقدارها $2,500\Omega$ بين جوانب متقابلة لمربع ضلعه 1m . ما المقاومة التي سوف تقاس بين جوانب متقابلة لـ :
 (أ) مربع ضلعه 10cm ، (ب) مستطيل $5 \times 15\text{cm}$ ، للجوانب التي على بعد 15cm ؟
 (ج) مستطيل $5 \times 15\text{cm}$ ، للجوانب التي على بعد 5cm ؟ (د) إذا رسم الشكل الهندسي المبين في شكل ٦-١٠ على هذه الورقة ، فما المقاومة التي سوف تقاس بين الدائرة والمربع إذا كان الكبل مملوءا بالهواء وله سعة 40pF/m ؟
 الاجابة : $2,500\Omega$ ، $7,500\Omega$ ، 833Ω ، 553Ω .

٦-٤ نماذج مادية :

التناظر بين المجال الكهربى ومجال الجاذبية قد ذكر عدة مرات من قبل ويمكن أن يستخدم لإنشاء نماذج مادية قادرة أن تعطى حلولاً لمسائل كهروستاتيكية ذات هندسة معقدة . وأساس التناظر هو ببساطة : فى المجال الكهروستاتيكي فرق الجهد بين نقطتين هو الفرق فى طاقة الجهد لوحدة شحنات موجبة عند هاتين النقطتين ، وفى مجال جاذبية منتظم الفرق فى طاقة الجهد لكل نقطة عند نقطتين يتناسب مع فرق ارتفاعها . ويتعبّر

$$\Delta W_E = Q \Delta V \text{ (كهروستاتيكي)}$$

$$\Delta W_G = M_g \Delta h \text{ (تجاذبي)}$$

حيث M هى الكتلة النقطية و g هى المجلة بسبب الجاذبية ، ثابتة أساساً عند سطح الأرض . ولذلك ، نفس فرق الطاقة ،

$$\Delta V = \frac{Mg}{Q} \Delta h = k \Delta h$$

حيث k هو ثابت التناسب . وهذا يبين التناظر المباشر بين فرق فى الجهد وفرق فى الارتفاع .

ويسمح لنا هذا التناظر أن ننشئ نموذجاً مادياً - لمجال جهد - ذا بعدين معروف بصنع سطح ، ربما من الخشب ، الذى ارتفاعه h فوق أى نقطة (x, y) واقعة فى مستوى الارتفاع - الصفرى الجهد - الصفرى يتناسب مع الجهد عند تلك النقطة . لاحظ أن مجالات ذات الأبعاد الثلاثة لايمكن التعامل معها .



شكل ١١-٦ نموذج لمجال الجهد لخط شحنة لانهاى . الفرق فى الجهد يتناسب مع الفرق فى الارتفاع . وتبين خطوط المناسيب تزايدت جهد متساوية .

والمجال لخط شحنة لانهاى ،

$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon} \ln \frac{\rho_B}{\rho}$$

مبين على مثل هذا النموذج فى شكل ١١-٦ ، الذى يعطى صورة دقيقة لتغير الجهد مع نصفى القطر بين ρ_A و ρ_B . الجهد والارتفاع عند ρ مأخوذاً يساويان صفراً للتيسير .

مثل هذا النموذج يمكن أن ينشأ لى مجال جهد ذى بعدين ويمكننا من أن نتصور المجال أحسن قليلا . وانشاء النماذج نفسها ييسر بقدر كبير ، ماديا ونظريا ، باستخدام الواح مطاط . ويوضع اللوح تحت شد متوسط ويقرب الى حد بعيد الغشاء المرن فى الميكانيكا التطبيقية . يمكن ايضا^(١) أن الازاحة الرأسية للغشاء تحقق معادلة التفاضل الجزئى من الرتبة الثانية .

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$$

إذا كان ميل السطح صغيرا .

سترى فى الفصل التالى ان كل مجال جهد فى منطقة خالية - الشحنة يحقق أيضا هذه المعادلة ، معادلة لابلاس فى بعدين ،

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

ستبت أيضا نظرية الوجدانية التى تضمن لنا أنه اذا حقق حل جهد فى منطقة ما معادلة المعادلة الانفة ويعطى أيضا الجهد الصحيح على حدود هذه المنطقة ، فان

(١) انظر ، مثلا ، Spangenberg, pp. 75-76 فى بيانات المراجع عند نهاية هذا الفصل .

هذا الحل هو الحل الوحيد . وعلى ذلك فاننا نريد فقط ارغام ارتفاع اللوح لتناظر قيم جهد محددة على الحدود ، والارتفاع عند كل النقط الأخرى يتناسب مع الجهد .

فمثلا ، مجال خط الشحنة اللانهائى يمكن أن يُعرض بالعرف على التماثل الدائرى وتثبيت اللوح المطاط عند ارتفاع الصفر حول دائرة باستخدام حلقة تثبيت كبيرة نصف قطرها p_B . ولأن الجهد ثابت عند p_A ، نرفع ذلك الجزء من اللوح الى ارتفاع أعلى بدفع أسطوانة نصف قطرها p_A الى أعلى ضد اللوح المطاط . وينهار التناظر عند الميول السطحية العالية ، ويمكن فقط ازالة طفيفة عند p_A . ويمثل السطح عندئذ مجال الجهد ، ويمكن ان يستخدم بلى لتعيين مسارات جسيم ، وفى هذه الحالة واضح انها خطوط نصف قطرية كما ترى من أعلى .

هناك أيضا تناظر بين الكهروستاتيكية والهيدروليكا وهو مفيد خاصة فى الحصول على صورة فوتوغرافية لخطوط الانسياب أو خطوط التدفق . وهذه العملية مشروحة كاملة بواسطة Moor فى عدد من المنشورات⁽¹⁾ التى تحتوى على عديد من الصور الفوتوغرافية الممتازة .

ت ٦-٤ نموذج من الجهد منشأ بحيث يكون ارتفاعه (بالبوصات) معطى :

$$y^2 - x^2 = 2h$$
 ، حيث x و y مقياسان على الأفقى (بالقدم) . والمنطقة التى عمل لها النموذج هى المنطقة المثلثية التى لها $x \leq 2$ ، $x \geq y$ و $y \geq -x$. (أ) ما هو أقصى ارتفاع للنموذج ؟ (ب) ماهى أقصى ميل للنموذج ؟ (ج) ماهى الزاوية التى يعملها العمود على سطح النموذج مع الرأسى عند (1.5, 0.5) ؟
 الاجابة : 27.8° , 0.943 , $8in$

مراجع مقترحة :

- 1 Hayt, W. H., Jr.: "Engineering Electromagnetics," 1st ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1958, pp. 150-152.
- 2 Moore, A. D.: Fields from Fluid Flow Mappers, *J. Appl. Phys.*, vol. 20, pp. 790-804, August 1949; Soap Film and Sandbed Mapper Techniques, *J. Appl. Mech.* (bound with *Trans. ASME*), vol. 17, pp. 291-298, September 1950; Four Electromagnetic Propositions, with Fluid Mapper Verifications, *Elec. Eng.*, vol. 69, pp. 607-610, July 1950; The Further Development of Fluid Mappers, *Trans. AIEE*, vol. 69, part II, pp. 1615-1624, 1950; Mapping Techniques Applied to Fluid Mapper Patterns, *Trans. AIEE*, vol. 71, part I, pp. 1-5, 1952.
- 3 Ramo, S., J. R. Whinnery, and T. Van Duzer: "Fields and Waves in Communications Electronics," John Wiley & Sons, Inc., New York, 1965.

(١) انظر بيانات المراجع عند نهاية هذا الفصل .

هذا الكتاب هو أساسا الطبعة الثالثة لكتب المؤلف الأول الشائعة المطبوعة في 1944 و 1953. مع أنه موجه أساسا للمطلبة البادئين في الدراسات العليا ، ويمكن أن يقرأ باستفادة بأي شخص عليم بمفاهيم الكهرومغناطيسية الأساسية . والتخطيطات المنحنية الخطوط مناقشة على الصفحات ١٥٩ - ١٦٣ .

- 4 Salvadon, M. G., and M. L. Baron: "Numerical Methods in Engineering," 2d ed., Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1961.

طرق التكرار والاسترخاء مناقشة في الفصل الأول

- 5 Scarborough, J. B.: "Numerical Mathematical Analysis," 6th ed., The John Hopkins Press, Baltimore, 1966.

يصف طرق التكرار والاسترخاء ويعطي أمثلة كاملة عديدة . الأخطاء المتأصلة مناقشة .

- 6 Silvester, P.: "Modern Electromagnetic Fields," Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1968.
- 7 Soroka, W. W.: "Analog Methods in Computation and Simulation," McGraw-Hill Book Company, New York, 1954.
- 8 Spangenberg, K. R.: "Vacuum Tubes," McGraw-Hill Book Company, New York, 1948.

طرق التخطيط التجريبية مناقشة على الصفحات ٧٥ - ٨٢ .

- 9 Weber, E.: "Electromagnetic Fields," vol. I, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1950. Experimental mapping methods are discussed in chap. 5.

طرق التخطيط التجريبية مناقشة في الفصل الخامس

مسائل :

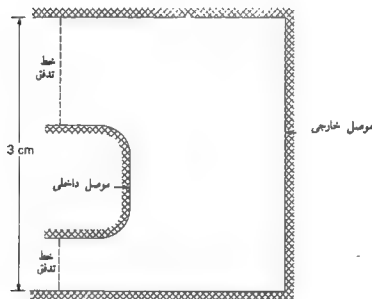
١ - ارسم خريطة مربعات - منحنية الخطوط لمكثف محوري نصف قطره الداخلي 3 cm ونصف قطره الخارجى 9 cm . وهذه الأبعاد مناسبة للرسم . كاختيار للدقة ، احسب السعة لكل متر من كل من رسمك التخطيطى والصيغة المضبوطة اذا كانت $\epsilon_R = 1$.

٢ - ارسم خريطة مربعات - منحنية الخطوط لمجال الجهد حول اسطوانتين دائريتين متوازيتين فى الهواء ، كلا منهما نصف قطره 2.5cm ، متفصلتين بمسافة من المركز

إلى المركز قدرها 15cm. هذه الأبعاد مناسبة للرسم التخطيطي الفعلي إذا اعتبر التماثل . وكتحقيق ، احسب السعة لكل متر من كل من رسمك التخطيطي ومن الصيغة المضبوطة .

٣- ارسم خريطة مربعات- منحنية الخطوط لمجال الجهد بين اسطوانتين دائريتين متوازيتين ، واحدة نصف قطرها 4cm داخل أخرى نصف قطرها 10cm . والمحوران مزاحان بمسافة 3cm . وهذه الأبعاد مناسبة للرسم . وكاختبار للدقة ، احسب السعة لكل متر من الرسم التخطيطي ومن التعبير المضبوط

$$C = \frac{2\pi\epsilon}{\cosh^{-1} \left(\frac{a^2 + b^2 - D^2}{2ab} \right)} \quad \text{F/m}$$



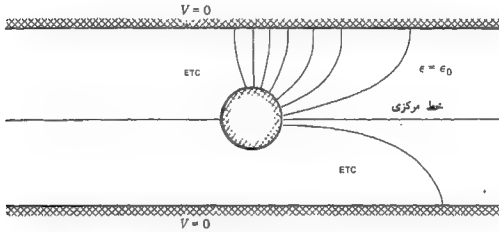
شكل ٦- ١٢ : انظر مسألة ٤ .

حيث a و b هما نصف قطري الموصلين و D هي المسافة بين المحورين .

- ٤- نصف خط نقل مدرج خاص جدا مبين يقطع عرضي في شكل ٦- ١٢ . دع $\epsilon_R = 2.2$. عين قيمة معقولة الدقة لـ (أ) السعة لكل متر طول ، (ب) أقصى شدة مجال كهربي موجودة عند أى نقطة إذا كانت الفولتية بين الموصلين هي 1,000V .
- ٥- انشئ رسماً تخطيطياً لقطع خط محوري فيه الموصل المركزي شريط مستوي سمكه صفر وعرضه 1cm ، محمك في موصل اسطوان خارجي قطره 4cm . وفي رسمك التخطيطي ، مثل 1cm بـ 1 in لتحصل على مقياس مناسب . اعمل خريطة مربعات- منحنية الخطوط وقدر قيمة السعة لكل متر طول ، إذا كان للعازل $\epsilon_R = 1.2$.

٦ - عدة أنابيب تدفق مبنية على الرسم التخطيطي للمجال لشكل ٦-١٣ . اذا كانت كل انبوبة ، ذات طول 1 m الى داخل الورقة ، تحمل 1 nC ، اكمل خريطة المربعات منحنية - الخطوط وقدر قيمة فولتية الموصل المركزي ، والسعة بينه وبين المستويات الأرضية المشتركة ($V = 0$) .

٧ - السطح متساوي - الجهد الأوسط مبين على الخط الهوائي الشريطي الدقيق الموضح في شكل ٦-١٤ . اكمل خريطة المجال وقدر قيمة سعة 1 ft من الخط .
٨ - استخدم التكرار على الحوض المربع المبين في شكل ٦-٦ بتقسيمه الى 6×6 شبكة مربعة . اعمل الى 0.1 V . ارسم قيم الجهد المحصول عليها على طول خط الوسط الرأسى كدالة للمسافة من أسفل نقطة . أيضا ضع القيم المحصول عليها للشبكة 4×4 على رسمك التخطيطي . ما حال الانطباق ؟



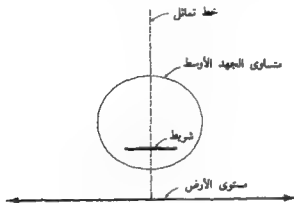
شكل ٦-١٣ انظر مسألة ٦ .

٩ - الحوض المربع المبين في شكل ٦-١٥ له قيم الجهد التالية على الحوائط :
 $V_1 = 100\text{ V}$, $V_2 = 50\text{ V}$, $V_3 = -70\text{ V}$, $V_4 = 0\text{ V}$. قسم الداخل الى شبكة 4×4 واستخدم طرق التكرار لايجاد الجهد عند كل نقط الشبكة . (أ) احسب لأقرب فولت . (ب) احسب لأقرب 0.1 V .
١٠ - الحوض المربع المبين في شكل ٦-١٥ ضلعه 10 cm . له قيم الجهد المعروفة التالية على الحوائط الأربعة $V_1 = -300\text{ V}$, $V_2 = 100\text{ V}$, $V_3 = 400\text{ V}$ و $V_4 = -100\text{ V}$. استخدم طرق التكرار لتقدير قيمة الجهد عند نقطة داخلية على بعد 2 cm من الحائط الأيمن و 4 cm من الحائط الأسفل .

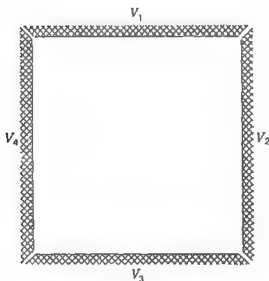
١١ - استخدم طريقة التكرار على الشبكة المبينة في شكل ٦-١٦ لتقدير قيمة الجهد عند نقطة x . اعمل أجزاء الفولت .

١٢ - استخدام التكرار على الحوض المثلثي المبين في شكل ٦-١٧ لتقدير قيمة الجهد التقريبي عند P ، الواقعة على بعد 1 cm من الحائط الأيمن و 3 cm من الأسفل .

١٣- في الحوض المربع المبين في شكل ٦- ١٥ ، $V_2 = V_3 = V_4 = 0$ ، بينما يتغير V_1 جيبيا من 0 عند كلا الجانبين الى $400V$ عند الوسط . قدر قيمة الجهد عند مركز الحوض مستخدما : (أ) شبكة 4×4 وحاسبا لأقرب فولت .
 (ب) شبكة 4×4 ، وحاسبا لأقرب $0.1V$ ، (ج) شبكة 8×8 ، وحاسبا لأقرب $1V$ ، (د) شبكة 16×16 وحاسبا لأقرب $0.01V$. (اقتراح : غير الأسطر 7 الى 11 للبرنامج المعطى في قسم ٦- ٧) .

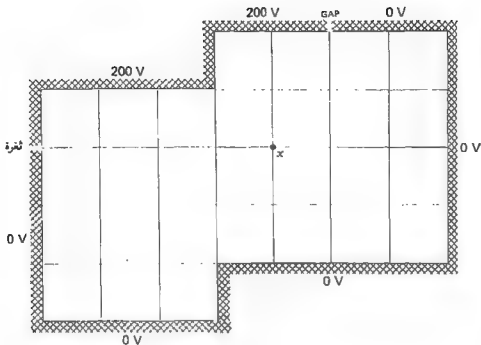


شكل ٦- ١٤ انظر مسألة ٧ .

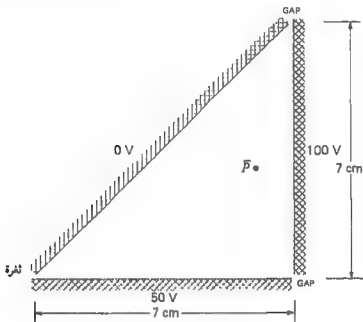


شكل ٦- ١٥ انظر مسائل ٩ ، ١٠ ، ١٣ .

١٤- طبق طرق التكرار لايجاد قيمة تقريبية للجهد عند نقطة الشبكة المعطاة x في شكل ٦- ١٨ . احسب لأقرب فولت .



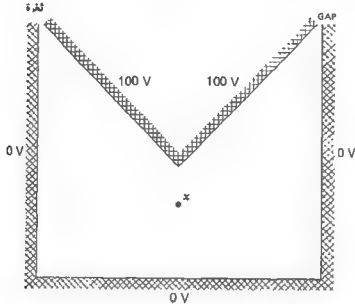
شكل ٦- ١٦ انظر مسألة ١١ .



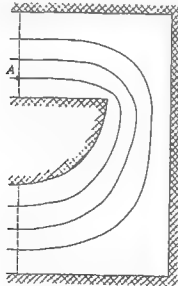
شكل ٦- ١٧ انظر مسألة ١٢ .

١٥- يختبر خط نقل من نوع خاص بإنشاء نموذج من الألومنيوم أبعاده ست عشرة مرة الأبعاد الفعلية . وطول النموذج 30cm والطرفان مغطين بالواح عازلة ، والنموذج موضوع في حوض الكتروليت له $\sigma = 0.0025 \text{ } \Omega/\text{m}$. استخدم فرق جهد 25V

بين الموصليين . (أ) إذا أظهرت القياسات في الحوض أن أسطح متساويات الجهد لكل $I - V$ تبعد عن بعضها 2cm عند نقطة معينة ، فكم يجب أن تكون E عند النقطة المناظرة على خط النقل الفعلي مع استخدام 1kV ؟ (ب) إذا سحب تيار كل مقداره 40 mA من المنبع 25V ، ما هي السعة لكل وحدة طول للنموذج في الهواء ؟ (ج) للخط الفعلي في الهواء



شكل ٦-١٨ : انظر مسألة ١٤ .



شكل ٦-١٩ : انظر مسألة ١٨ .

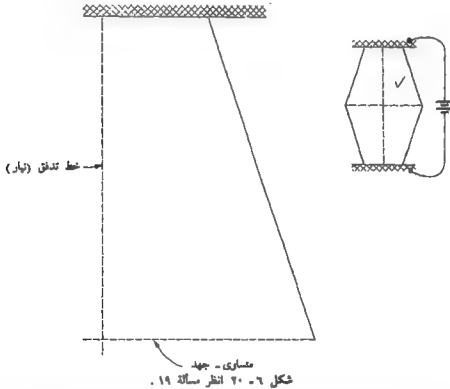
١٦- خط نقل محوري نصف قطرية 6mm و 16mm مملوء بمادة لها :
 $\sigma = 2 \times 10^{-4} \text{ S/m}$ و $\epsilon_R = 2.8$. عين السعة والمقاومة بين الموصليين

لطول 1m من الخط .

١٧ - المقطع العرضي لخط نقل محوري ، $a = 1.8\text{mm}$ و $b = 10.6\text{mm}$ ، مرسوم على لوح من ورق موصل ذي مقاومة $4,000\Omega$ لكل مربع . ماهي المقاومة المقاسة بين الموصلين ؟

١٨ - بين شكل ٦ - ١٩ أكثر قليلاً من نصف الرسم على لوح من ورق موصل لخط نقل ذي موصلين . والأسطح متساوية - الجهد مرسومة تخطيطياً ، حسب قيم مقاسة تجريبياً . الرسم خمس مرات المقاس الفعلي للخط . (أ) اكمل خريطة المربعات منحنية - الخطوط وقدر قيمة E عند نقطة A للورقة الموصلة إذا كان هناك $25V$ بين الموصلين . (ب) كم يجب أن تكون E عند A على خط النقل إذا كان هناك $250V$ بين الموصلين ؟ (ج) ما المقاومة التي يجب أن تقاس بين الموصلين إذا كانت الورقة لها مقاومة $5,000\text{ ohms}$ لكل مربع ؟

١٩ - بين الرسم التخطيطي الأكبر في شكل ٦ - ٢٠ ربع مقاوم متماثل في مقاسه الفعلي إذا كانت $\sigma = 10^4\text{ U/m}$ وسلك الأداة 0.2mm ، احسب المقاومة .



٢٠ - نموذج من لوح مطاط منشأ لخط نقل محوري فيه الأبعاد الأفقية أربعين مرة تلك للخط الفعلي . الخط له نصف قطر 0.8mm و 4mm . والنموذج ارتفاعه 5cm عند الموصل الداخلي ، وصفر الخارجى . (أ) كم ارتفاعه عند منتصف المسافة بين الموصلين ؟ (ب) ما الزاوية التي يعملها عمود على السطح عند نصف القطر الداخلي مع الرأس ؟

الفصل السابع

معادلتا بواسون ولاپلاس

نبين دراسة الفصل السابق أن عديدا من التناظرات المستخدمة للحصول على تخطيطات مجال تجريبية تضمنت بيان أن الكمية المناظرة تحقق معادلة لابلاس . وهذا صحيح لانحراف بسيط لغشاء مرن ، وانسياب مائع فى طبقة رقيقة ، وقد كان يمكننا اثبات تناظر التيار ببيان أن كثافة التيار المستمر فى وسط موصل تحقق أيضا معادلة لابلاس . ويظهر أنها معادلة أساسية فى أكثر من مجال للعلم ، وربما بدون أن نعرف قد قضينا الفصل السابق فى الحصول على حلول معادلة لابلاس بطرق تجريبية ، تخطيطية وعددية . والان نحن مستعدون للحصول على هذه المعادلة منهجيا ونناقش طرقا عديدة يمكن أن تحل بواسطتها تحليليا .

وقد يبدو أنه من الصائب أن تنتمى هذه المادة لما قبل ذاك للفصل السابق ، ومادمتنا نحل معادلة واحدة بطرق كثيرة ، أليس من المناسب أن نرى المعادلة أولا ؟ . وعيب هذا الترتيب الأكثر منطقية يقع فى الحقيقة أن حل معادلة لابلاس هو تمرين فى الرياضيات ، ومالم تكن لدينا المسألة الفيزيائية واضحة فى أذهاننا ، قد نفقد بسهولة المعنى الفيزيائى لما نعمله .

وتخطيط خطوط - منحنية تقريبا يمكن أن يخبرنا كثيرا عن المجال ، وعلى ذلك يمكن أن يستخدم فيما بعد لاختبار حلولنا الرياضية للأخطاء الكبيرة ، أوليين مناطق خاصة غير عادية - فى المجال التى تتطلب معاملة خاصة .

بهذا الشرح دعنا أخيرا نحصل على معادلتى لابلاس وبواسون .

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad \text{معادلتا بواسون ولاپلاس}$$

ان الحصول على معادلة بواسون سهلة للغاية ، لأن من الصورة النقطية لقانون جاوس ،

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (1)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad \text{تعريف } \mathbf{D} \quad (2)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad \text{وعلاقة التلرج} \quad (3)$$

وبالتعويض نحصل على

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = -\nabla \cdot (\epsilon \nabla V) = \rho$$

$$(4) \quad \nabla \cdot \nabla V = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad \text{أو} \quad \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

لمنطقة متجانسة فيها ϵ ثابتة .

معادلة (4) هي معادلة بواسون ، ولكن عملية « ∇ المزدوجة » يجب أن تفسر وتفك ، على الأقل في الاحداثيات الكرتيزية ، قبل أن تكون المعادلة مفيدة . في الاحداثيات الكرتيزية ،

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{a}_z$$

ولذلك

$$(5) \quad \nabla \cdot \nabla V = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right) \\ = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

عادة تختصر العملية $\nabla \cdot \nabla$ الى ∇^2 (وتنطق « دل تربيع ») ، كمذكر جيد للمشتقات الجزئية من الدرجة الثانية التي تظهر في (5) ، ونحصل على

$$(6) \quad \boxed{\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}}$$

في الاحداثيات الكرتيزية .

إذا كانت $\rho = 0$ تشير الى كثافة شحنة حجمية صفرية ، ولكن مسموح لشحنات نقطية ، خط شحنة ، وكثافة شحنة سطحية ، أن توجد على الحدود كمصادر للمجال ، فحيث

$$(7) \quad \boxed{\nabla^2 V = 0}$$

التي هي معادلة لابلاس . وعملية الـ ∇^2 تسمى لابلاسي ∇^2 .

وفى الاحداثيات الكرتيزية معادلة لابلاس هي

$$(A) \quad \nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

وصورة $\nabla^2 V$ فى الاحداثيات الاسطوانية والكروية يمكن الحصول عليها باستخدام تعبيرات الانفراج والتدرج التى تم الحصول عليها فى تلك النظم الاحداثية . وكمراجع ، اللابلاس فى الاحداثيات الاسطوانية هو

$$(٩) \quad \nabla^2 V = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \right) + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \quad (\text{cylindrical})$$

وفى الاحداثيات الكروية هو

$$(١٠) \quad \nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \quad (\text{spherical})$$

هذه المعادلات يمكن أن تفك بأخذ المشتقات الجزئية المبينة ، ولكن عادة أكثر نفعا أن نبقياها فى الصور المعطاة آنفا ، بالإضافة الى أنه أسهل بكثير أن تفك فيما بعد اذا كان ضروريا عن أن توضع أقسامها معا ثانية .

ومعادلة لابلاس حاوية الكل - اذ لكونها تنطبق فى أى مكان تكون فيه كثافة الشحنة الحجمية صفرا ، فانها تقرر أن كل تشكيل يمكن التفكير فيه للاقطاب الكهربائية أو الموصلات ينتج مجالا له $\nabla^2 V = 0$. وكل هذه المجالات مختلفة ، وذات قيم جهد مختلفة ومعدلات تغير فراغية مختلفة ، ومع ذلك لكل منها $\nabla^2 V = 0$ ولأن كل مجال (اذا كانت $\rho_v = 0$) يحقق معادلة لابلاس ، فكيف يمكن أن نتوقع أن نعكس الاجزاء ونستخدم معادلة لابلاس لنجد مجالا واحدا محددا يحدث أننا نهتم به ؟ من الواضح ، المطلوب معلومات أكثر ، وسنرى أننا يجب أن نحل معادلة لابلاس طبقا لشروط حدود معينة .

كل مسألة فيزيائية يجب أن تحتوى على الأقل على حد موصل واحد وعادة تحتوى على اثنين أو أكثر . والجهد على هذه الحدود هو قيم محددة ، ربما V_1, V_0, \dots ، وربما قيما عديدة . وهذه الأسطح متساوية الجهد المحددة ستجهز شروط الحدود لنوع المسائل التى ستحل فى هذا الفصل . فى أنماط أخرى من المسائل ، تأخذ شروط الحدود صورة قيم محددة لـ E على سطح حار ، أو خليط من قيم معروفة لـ V و E .

وقبل استخدام معادلة لابلاس ومعادلة بواسون في أمثلة عديدة ، يجب أن نتوقف لنبين أنه إذا حققت اجابتنا معادلة لابلاس وحققت أيضا شروط الحدود ، فحينئذ هي الاجابة الوحيدة الممكنة . فانه لما يبعث على القلق أن نعالج مسألة بحل معادلة لابلاس بطريقتين مختلفتين معتمدتين ثم نحصل على اجابتين مختلفتين . وسنبين أن الاجابتين يجب أن يكونا متطابقتين .

ت - ٧ - ١ : حدد ماذا كانت مجالات الجهد الآتية تحقق معادلة لابلاس أم لا :
(أ) $V = x^2 - y^2 + z^2$ ، (ب) $V = \rho \cos \phi + z$ ، (ج) $V = r \cos \theta + \phi$.

الاجابة : لا ، نعم ، نعم .

٧ - ٢ : نظرية الوجدانية :

دعنا نفرض أن لدينا حلين لمعادلة لابلاس ، V_1 و V_2 ، وكلاهما دوال عامة للاحداثيات المستخدمة . لذلك

$$\nabla^2 V_1 = 0$$

و

$$\nabla^2 V_2 = 0$$

ومنها

$$\nabla^2 (V_1 - V_2) = 0$$

كل حل يجب أيضا أن يحقق شروط الحدود ، وإذا مثلنا قيم الجهد المعطاة على الحدود بـ V_b فان قيمة V_1 على الحدود V_{1b} وقيمة V_2 على الحدود V_{2b} يجب أن تطابق كلاهما V_b .

$$V_{1b} = V_{2b} = V_b$$

$$V_{1b} - V_{2b} = 0$$

و

في قسم ٤ - ٨ ، معادلة (٤٤) ، استخدمنا المتطابقة الاتجاهية ،

$$\nabla \cdot (V \mathbf{D}) \equiv V (\nabla \cdot \mathbf{D}) + \mathbf{D} \cdot (\nabla V)$$

والتي تنطبق على أى مقياس V وأى متجه D . وللتطبيق الحالى سنختار $V_1 - V_2$ على أنه المقياس و $\nabla(V_1 - V_2)$ على أنه المتجه ، معطيا

$$\begin{aligned} \nabla \cdot [(V_1 - V_2)\nabla(V_1 - V_2)] \\ \equiv (V_1 - V_2)[\nabla \cdot \nabla(V_1 - V_2)] + \nabla(V_1 - V_2) \cdot \nabla(V_1 - V_2) \end{aligned}$$

التي سوف نكملها خلال كل الحجم المحتوى بأسطح الحدود المعنية :

$$\begin{aligned} (١١) \int_{\text{vol}} \nabla \cdot [(V_1 - V_2)\nabla(V_1 - V_2)] dv \\ \equiv \int_{\text{vol}} (V_1 - V_2)[\nabla \cdot \nabla(V_1 - V_2)] dv + \int_{\text{vol}} [\nabla(V_1 - V_2)]^2 dv \end{aligned}$$

تسمح لنا نظرية الانفراج أن نستبدل التكامل الحجمى فى الطرف الأيسر من المعادلة بالتكامل السطحي المغلق على السطح المحيط بالحجم . وهذا السطح يتكون من الحدود المعنية فعلا والتي عليها $V_{1b} = V_{2b}$ ، ولذلك

$$\begin{aligned} \int_{\text{vol}} \nabla \cdot [(V_1 - V_2)\nabla(V_1 - V_2)] dv \\ = \oint_S [(V_{1b} - V_{2b})\nabla(V_{1b} - V_{2b})] \cdot dS = 0 \end{aligned}$$

احد عوامل التكامل الأول على الطرف الايمن لمعادلة (١١) هو $\nabla \cdot \nabla(V_1 - V_2)$ ، أو $\nabla^2(V_1 - V_2)$ التي تساوى صفرا بالفرض ، ولذلك فان هذا التكامل يساوى صفرا . ومن ثم فان التكامل الحجمى المتبقى يجب أن يكون صفرا :

$$\int_{\text{vol}} [\nabla(V_1 - V_2)]^2 dv = 0$$

هناك عامة سببان لماذا يمكن لتكامل أن يكون صفرا : اما أن يكون المكامل (الكمية تحت علامة التكامل) صفرا فى كل مكان ، أو أن يكون المكامل موجبا فى بعض المناطق ، وسالبا فى أخرى ، والمساهمة تتلاشى جبريا . وفى هذه الحالة يجب أن ينطبق السبب الأول لان $[\nabla(V_1 - V_2)]^2$ لا يمكن أن يكون سالبا . لذلك

$$[\nabla(V_1 - V_2)]^2 = 0$$

و

$$\nabla(V_1 - V_2) = 0$$

أخيرا ، اذا كان تدرج $(V_1 - V_2)$ صفرا في كل مكان ، فان $V_1 - V_2$ لا يمكن أن تتغير مع أي إحداثي وهكذا

$$V_1 - V_2 = \text{ثابت}$$

اذا استطعنا أن نبين أن هذا الثابت هو صفر ، فسنكون قد اتصنا برهاننا . والثابت يمكن تقديره بسهولة باعتبار نقطة على الحدود . هنا $V_1 - V_2 = V_{1B} - V_{2B} = 0$ ، ونرى أن الثابت - فعلا - صفر ، ولذلك

$$V_1 = V_2$$

معطيا حلين متطابقين .

وتتطبيق نظرية الوحدانية أيضا على معادلة بواسون ، لأنه اذا كان $\nabla^2 V_1 = \rho/\epsilon$ و $\nabla^2 (V_1 - V_2) = 0$ كما سبق . وشروط الحدود مازالت تتطلب أن $V_{1B} - V_{2B} = 0$ ، والبرهان مطابق من هذه النقطة .

هذا يشكل برهان نظرية الوحدانية . منظور اليه كاجابة للسؤال ، « كيف يقارن حلان لمعادلة لابلاس أو بواسون اذا حقق كلاهما نفس الشروط الحدود ؟ » نظرية الوحدانية يجب أن تغطينا بتأكيدنا أن الاجابتين متطابقتان . وبمجرد أن نجد أي طريقة لحل معادلة لابلاس أو بواسون ، تحت شروط حدود معطاة ، نكون قد قمنا بحل مسائلنا بصفة نهائية . ولاتستطيع طريقة أخرى أبدا أن تعطي اجابة مختلفة .

ت ٧-٢ : المخروطان $\theta = \pi/6$ و $\theta = \pi/3$ عند الجهدين $1.317V$ و $0.549V$ ، بالترتيب .

$$(أ) \text{ هل تحقق دوال الجهد } V_1 = \ln (\tan I/2\theta)$$

$$\text{و } V_2 = -I/2 \ln [(I + \cos \theta)/(I - \cos \theta)] \text{ شروط الحدود هذه ؟}$$

(ب) هل تحقق كلا V_1 و V_2 معادلة لابلاس ؟ . (ج- هل V_1 و V_2 متطابقتان ؟ .

الاجابة : نعم ، نعم ، نعم .

٧-٣ : أمثلة لحل معادلة لابلاس :

قد تكشفنا عدة طرق لحل المعادلة التفاضلية الجزئية من الرتبة الثانية المعروفة بمعادلة لابلاس . والطريقة الأولى والأبسط هي التكامل المباشر ، وسنستخدم هذه التقنية لمعالجة أمثلة عدة في نظم إحداثيات مختلفة في هذا القسم . في قسم ٧-٥ سنستخدم طريقة أخرى في مسألة أكثر صعوبة . وطرقا اضافية ، متطلبية معرفة رياضية أكثر تقدما ، مشروحة في المراجع المعطاة عند نهاية هذا الفصل .

وطريقة التكامل المباشر يمكن تطبيقها فقط على المسائل « ذات البعد الواحد » ،
أو التي فيها مجال الجهد دالة لواحد فقط من الاحداثيات الثلاثة . ولأننا نعمل مع نظم
احداثيات ثلاث فقط ، فقد يبدو ، حيثئذ ، أن هناك تسع مسائل يراد حلها ، ولكن
بتفكير قليل سيبين أن جهدا يتغير فقط مع x هو اساسا مثل جهد يتغير فقط مع y . فادارة
المسألة الفيزيائية ربع دورة ليس تغييرا . وفي الحقيقة ، هناك خمس مسائل فقط يراد
حلها ، واحدة في الاحداثيات الكرتيزية ، واثنان في الاسطوانية ، واثنان في الكروية .
سنحلها جميعها .

مثال ١ : دعنا نفرض أن V دالة في x فقط ونهتم فيما بعد بمعرفة أية مسألة فيزيائية نحل
عندما نحتاج شروطا للحلود . وتختزل معادلة لابلاس الى

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$$

تكامل مرتين ، حاصلين على

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = 0$$

و

$$\frac{dV}{dx} = A$$

$$(١٢) \quad V = Ax + B$$

حيث A و B ثوابت التكامل . معادلة (١٢) تحتوي على اثنين من تلك الثوابت ، كما
يجب أن نتوقع لمعادلة تفاضلية من الرتبة الثانية . ويمكن أن تعين هذه الثوابت من شروط
الحلود فقط .

ماهى شروط الحلود التي يجب أن نزود بها ؟ انها اختيارنا ، لأنه لم تحدد بعد
مسألة فيزيائية ، باستثناء الفرض الأصلي أن الجهد تغير مع x فقط . ويجب الان أن
نحاول أن نتصور مثل هذا المجال . من المحتمل أن معظمنا لديهم الاجابة في الحال ،
ولكن يمكن الحصول عليها بالطرق المضبوطة .

لأن المجال يتغير مع x فقط وليس دالة في y و z ، فإذا كانت x ثابتة فإن V تكون
ثابتة ، وبتعبير آخر ، الأسطح متساوية - الجهد توصف بوضع x ثابتة . وهذه الأسطح
مستويات متوازية عمودية على المحور x . وعلى ذلك فالمجال هو ذلك لمكثف متوازي
الألواح ، وبمجرد أن نحدد الجهد على أى مستويين ، يمكننا أن نقدر قيمة ثوابت
تكاملنا .

وللتعميم الشديد ، دع $V = V_1$ عند $x = x_1$ و $V = V_2$ عند $x = x_2$ ثم نعوض
هذه القيم في (١٢) ، معطية

$$V_1 = Ax_1 + B \quad V_2 = Ax_2 + B$$

$$A = \frac{V_1 - V_2}{x_1 - x_2} \quad B = \frac{V_2 x_1 - V_1 x_2}{x_1 - x_2}$$

و

$$V = \frac{V_1(x - x_2) - V_2(x - x_1)}{x_1 - x_2}$$

وقد كان يمكن الحصول على اجابة ايسر باختيار شروط حدود ايسر . فاذا ثبتنا

$$A = \frac{V_0}{d} \quad B = 0$$

$$(١٣) \quad \boxed{V = \frac{V_0 x}{d}}$$

افترض أن غرضنا الرئيسى هو أن نوجد سعة مكثف متوازي - الألواح . وقد قمنا
بحل معادلة لابلاس ، حاصلين على (١٢) مع الثابتين A و B . هل يجب أن تقدر
قيمتها أم أن يتركها ؟ من المفترض أننا لسنا مهتمين بمجال الجهد نفسه ، ولكن فقط
بالسعة ، ويمكننا أن نستمر بنجاح مع A و B أو يمكننا تبسيط الجبر بقليل من البصيرة .
فالسعة تعطى كنسبة الشحنة الى فرق الجهد ، ولذا يمكننا الآن اختيار فرق الجهد كـ
 V_0 ، الذى تكافئ شرطاً واحداً للحدود ، ثم نختار أى شرط حدود ثان ، يبدو أن يساعد
بأقصى درجة صورة المعادلة . وهذا جوهر المجموعة الثانية لشروط الحدود التى أنتجت
(١٣) . ففرق الجهد ثبت كـ V_0 باختيار جهد أحد الألواح صفراً ، والاخر V_0 ، وموضع
هذه الألواح جعل بسيطاً ما أمكن بجعل $V = 0$ عند $x = 0$.

باستخدام (١٣) ، فحيثذ ، مازلنا نحتاج الشحنة الكلية على أى من اللوحين قبل
أن يمكن إيجاد السعة . ويجب أن نتذكر أنه عندما قمنا بحل مسألة المكثف هذه فى
الفصل الخامس ، أمدنا لوح الشحنة بنقطة البداية . ولم نضطر أن نعمل بشدة جداً
لايجاد الشحنة ، لأن كل المجالات عبر عنها بدالاتها . وقد بذل العمل حينذاك فى
ايجاد فرق الجهد . الآن انعكست المسألة (وبسطة) .

والخطوات الضرورية هي ، بعد عمل اختيار شروط الحدود :

١- إذا أعطيت V استخدم $E = -\nabla V$ لتجد E .

٢- استخدم $D = \epsilon E$ لتجد D .

٣- قدر قيمة D عند أى من لوحى المكثف $D_n = D_s = D_n a_n$.

٤- نعرف أن $D_n = \rho_s$.

٥- أوجد Q بالتكامل السطحي على لوح المكثف ،

عند $x = 0$ $V = V_0$ و عند $x = d$ $V = 0$ ، عندئذ

$$Q = \int_S \rho_s dS$$

هنا لدينا

$$V = V_0 \frac{x}{d}$$

$$E = -\frac{V_0}{d} a_x$$

$$D = -\epsilon \frac{V_0}{d} a_x$$

$$D_s = D \Big|_{x=0} = -\epsilon \frac{V_0}{d} a_x$$

$$a_n = a_x$$

$$D_n = -\epsilon \frac{V_0}{d} = \rho_s$$

$$Q = \int_S \frac{-\epsilon V_0}{d} dS = -\epsilon \frac{V_0 S}{d}$$

وتكون السعة

$$(١٤) \quad C = \frac{|Q|}{V_0} = \frac{\epsilon S}{d}$$

سنستخدم هذه الطريقة عدة مرات فى الأمثلة التالية .

مثال ٢ : لأنه لاتحل مسائل جديدة باختيار مجالات تتغير فقط مع y أو مع z فى الاحداثيات الكرتيزية ، سنعبر الى الاحداثيات الاسطوانية لمثالنا التالى . التغيرات بالنسبة لـ z مرة ثانية ليست شيئاً جديداً ، ونفترض بالتالى تغيراً بالنسبة لـ ρ فقط . تصبح معادلة لابلاس

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) = 0$$

أو

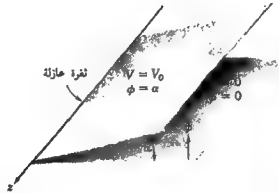
$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dV}{d\rho} \right) = 0$$

ملاحظتين ρ في المقام ، نستبعد $\rho = 0$ من حلنا ثم نضرب في ρ ونكامل ،

$$\rho \frac{dV}{d\rho} = A$$

نعيد الترتيب ، ونكامل مرة أخرى ، (١٥)

$$(١٥) \quad V = A \ln \rho + B$$



شكل ١-٧ : مستويان نصف قطريين لانهائيين مع زاوية داخلية α . توجد ثغرة عازلة منتهية الصغر عند f . يمكن إيجاد مجال الجهد بتطبيق معادلة لابلاس في الإحداثيات الاسطوانية .

الأسطح متساوية - الجهد معطاة بـ $\rho = \text{ثابت}$ وهي أسطوانات ، والمسألة هي لمكثف محوري أو خط نقل محوري . نختار فرق جهد V_0 بأن ندع $V = V_0$ عند $\rho = a$ و $V = 0$ عند $\rho = b$ ، $b > a$ ، ونحصل على

$$(١٦) \quad V = V_0 \frac{\ln(b/\rho)}{\ln(b/a)}$$

ومنها

$$E = \frac{V_0}{\rho} \frac{1}{\ln(b/a)} a_p$$

$$D_{n(\rho=a)} = \frac{\epsilon V_0}{a \ln(b/a)}$$

$$Q = \frac{\epsilon V_0 2\pi a L}{a \ln(b/a)}$$

$$(١٧) \quad C = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln(b/a)}$$

التي تتفق مع نتائجنا في الفصل الخامس .

مثال ٣ : والآن دعنا نفرض أن V دالة فقط في ϕ في الاحداثيات الاسطوانية . يمكننا أن ننظر الى المسألة الفيزيائية أولاً للتبسيط ونرى أن الأسطح متساوية - الجهد معطاة بـ $\phi = \text{ثابت}$. وهذه مستويات نصف قطرية . وشروط الحدود يمكن أن تكون $V=0$ عند $\phi=0$ و $V=V_0$ عند $\phi=\alpha$ ، مؤدية الى المسألة الفيزيائية المفصلة في شكل ١ - ٧ .

والآن معادلة لابلاس هي

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0$$

نستبعد $\rho = 0$ ونحصل على

$$\frac{d^2 V}{d\phi^2} = 0$$

الحل هو

$$V = A\phi + B$$

تحدد شروط الحدود A و B ، ونحصل على

$$(١٨)$$

$$(١٨) \quad V = V_0 \frac{\phi}{\alpha}$$

أخذ تدرج (١٨) يعطى شدة المجال الكهربى ،

$$(١٩) \quad E = - \frac{V_0 a_\phi}{\alpha \rho}$$

وأنه من المهم أن نلاحظ أن E دالة في ρ وليست في ϕ . وهذا لا يتعارض مع فروضنا الأصلية ، التي كانت قيوداً على مجال الجهد فقط . مع ذلك ، لاحظ أن المجال المنتج E دالة في ϕ .

مسألة تشتمل على سعة هذين المستويين نصف القطريين متضمنة عند نهاية الفصل .

مثال ٤ : والآن نتجه الى الاحداثيات الكروية ، تاركين في الحال التغيرات بالنسبة لـ ϕ فقط لأنها قد تم حلها ترواً ، ونعالج أولاً $V = V(r)$.

والتفاصيل متروكة لمسألة فيما بعد ، ولكن مجال الجهد النهائي يعطى بـ

$$(٢٠) \quad V = V_0 \frac{1/r - 1/b}{1/a - 1/b}$$

حيث شروط الحدود هي بوضوح $V = 0$ عند $r = b$ و $V = V_0$ عند $r = a$ ، $b > a$.
والمسألة هي تلك التي لكرتين متحلتى - المركز .

وقد وجدت السعة سابقاً (بطريقة مختلفة نوعاً) وهي

$$(٢١) \quad C = \frac{4\pi\epsilon}{1/a - 1/b}$$

مثال ٥ : في الاحداثيات الكروية نقصر الآن دالة الجهد على $V = V(\theta)$ ، حاصلين على

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dV}{d\theta} \right) = 0$$

نستبعد $r = 0$ و $\theta = 0$ أو $\theta = \pi$ ونحصل على

$$\sin \theta \frac{dV}{d\theta} = A$$

وحيث يكون التكامل الثانى

$$V = \int \frac{A d\theta}{\sin \theta} + B$$

الذى ليس واضحاً مثل سابقه . من جداول التكامل (أو ذاكرة جيدة) نحصل على

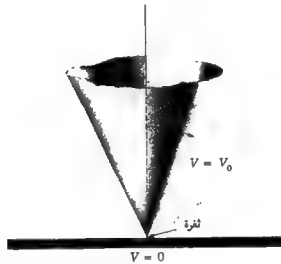
$$V = A \ln (\tan \frac{1}{2}\theta) + B$$

الأسطح متساوية - الجهد مخروطات . يبين شكل ٧-٢ الحالة حيث $V = 0$ عند $V = V_0$ و $\theta = \pi/2$ عند $\theta = \alpha$ و $\alpha < \pi/2$. ونحصل على

$$(٢٢) \quad V = V_0 \frac{\ln(\tan \frac{1}{2}\theta)}{\ln(\tan \frac{1}{2}\alpha)}$$

لكي نجد السعة بين مخروط موصل رأسه منفصل عن مستوى موصل بواسطة ثغرة عازلة متناهية الصغر ومحوره عمودي على المستوى ، دعنا أولاً نجد شدة المجال .

$$E = -\nabla V = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \mathbf{a}_\theta = -\frac{V_0}{r \sin \theta \ln(\tan \frac{1}{2}\alpha)} \mathbf{a}_\theta$$



شكل ٧-٢ للمخروط $\theta = \alpha$ عند V_0 والمستوى $\theta = \pi/2$ عند $V = 0$ ، يمثل مجال الجهد $V = V_0 \left[\ln(\tan 1/2 \theta) / \ln(\tan 1/2 \alpha) \right]$.

وحيث أن تكون كثافة الشحنة السطحية

$$\rho_s = \frac{-\epsilon V_0}{r \sin \alpha \ln(\tan \frac{1}{2}\alpha)}$$

$$Q = \frac{-\epsilon V_0}{\sin \alpha \ln(\tan \frac{1}{2}\alpha)} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{r \sin \alpha \, d\phi \, dr}{r}$$

ويؤدي هذا إلى قيمة لانهائية للشحنة والسعة ، ويصبح من الضروري أن نعتبر مخروطاً ذا مقاس محدود . وستكون إجابتنا الآن تقريبية فقط ، لأن السطح النظري المتساوي - الجهد هو $\theta = \alpha$ ، سطح مخروطي ممتد من $r = 0$ إلى $r = \infty$ ، بينما سطح مخروطنا الطبيعي يمتد فقط من $r = 0$ إلى ، مثلاً ، $r = r_1$. والسعة التقريبية هي

$$(٧٣) \quad C \doteq \frac{2\pi\epsilon r_1}{\ln(\cot^{1/2}\alpha)}$$

إذا رغبنا في اجابة أكثر دقة ، يمكننا عمل تقدير لسعة قاعدة المخروط بالنسبة للمستوى ذى الجهد الصغرى ، ونضيف هذه الكمية الى اجابتنا آنفاً ، وقد أهملت مجالات التهذب ، أوغير المنتظمة ، فى هذه المنطقة وهى تدخل مصدراً إضافياً للخطأ .

ت ٧-٣ أوجد مقدار E عند (1,2,3) لمجال (أ) اسطوانتين موصلتين متحدثى - المركز $V = 100V$ عند $\rho = 1m$ و $V = 20V$ عند $\rho = m$ ، (ب) مستويين موصلين نصفى قطرين ، $V = 100V$ عند $\phi = 20^\circ$ و $V = 20$ عند $\phi = 80^\circ$ ، (ج) كرتين موصلتين متحدثى - المركز ، $V = 100V$ عند $r = 1m$ و $V = 10V$ عند $r = 4m$ ، (د) مخروطين موصلين متحدثى - المحور $V = 100V$ عند $\theta = 4^\circ$ و $V = 20V$ عند $\theta = 75^\circ$.

الإجابة : $32.6V/m$, $34.2V/m$, $8.57V/m$, $147.3V/m$.

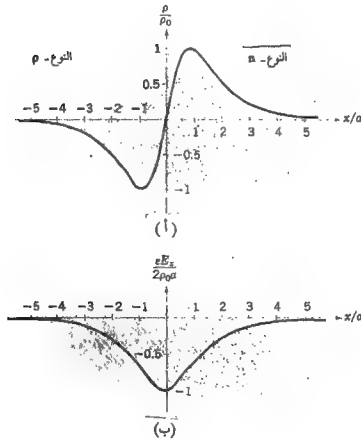
٧-٤ : مثال لحل معادلة بواسون

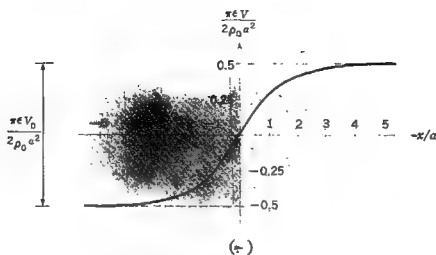
لكى نختار مسألة بسيطة بدرجة معقولة والتي يمكن أن نوضح تطبيق معادلة بواسون ، سنضطر أن نفرض أن كثافة الشحنة الحجمية محددة . ولكن هذه ليست الحالة عادة ، ففى الحقيقة ، غالباً ما تكون هى الكمية التى نبحث عن معلومات أكثر عنها . ونوع المسائل التى قد نواجهها فيما بعد قد يبدأ بمعرفة فقط قيم الحدود للجهد ، شدة المجال الكهربى ، وكثافة التيار . ومن تلك يكون علينا أن نطبق معادلة بواسون ، معادلة الاستمرارية ، وبعض العلاقات تعبر عن القوى على الجسيمات المشحونة ؛ مثل معادلة القوة للورنتز أو معادلة الانتشار ، ونحل كل منظومة المعادلات آتياً . مثل هذا الموقف الصعب خارج نطاق هذا الكتاب ، ولذلك سنفترض كمية كبيرة بقدر معقول من المعلومات .

وكمثال ، دعنا نختار ملتى pm بين نصفين من قضيب شبه موصل ممتد فى اتجاه x . وسنفرض أن المنطقة $x < 0$ مطعمة بنوع p وأن المنطقة $x > 0$ هى نوع n . ودرجة التطعيم متماثلة على جانبيى الملتقى . ولكى نراجع نوعياً بعض الحقائق عن ملتقى شبه الموصل ، نلاحظ أنه ابتدائياً هناك فجوات زائدة على يسار الملتقى ، والكترونات زائدة على اليمين . وكل ينتشر عبر الملتقى الى أن يبنى مجال كهبرى فى اتجاه يؤدى لتناقص

تيار الانتشار الى الصفر . وعلى ذلك ، لكى تمنع فجوات أكثر من التحرك الى اليمين ، يجب أن يوجه المجال الكهربى بالقرب من الملتقى الى اليسار ، E_x تكون سالبة هناك . وهذا المجال يجب أن ينتج بواسطة صافى شحنة موجبة الى يمين الملتقى وصافى شحنة سالبة الى اليسار . لاحظ أن طبقة الشحنة الموجبة تتكون من جزئين - الفجوات التى عبرت الملتقى ، والأيونات المعطية الموجبة التى غادرتها الالكترونات . وطبقة الشحنة السالبة متكونة بالطريقة المضادة من الالكترونات وأيونات متقبلة سالبة . وصافى كثافة الشحنة الحجمية ليست صفرا بالقرب من الملتقى .

ونوع توزيع الشحنة الذى ينتج مبين فى شكل (٧-١٣) ، والمجال السالب الذى تنتجه مبين فى شكل (٧-١٣ب) . وبعد النظر الى هذين الشكلين ، يمكن قراءة الفقرة السابقة باستفادة .





شكل ٣-٧ : (أ) كثافة الشحنة ، (ب) شدة المجال الكهربائي ، و(ج) الجهد مرسومة لمنحنى ρn كنوال للمسافة من مركز المنحنى . المادة من النوع p إلى اليسار ، والنوع n إلى اليمين .
توزيع شحنة له هذه الصورة يمكن أن يقرب بعدة تعبيرات مختلفة . أحد التعبيرات الأبسط هو

$$(٢٤) \quad \rho = 2\rho_0 \operatorname{sech} \frac{x}{a} \tanh \frac{x}{a}$$

الذى له كثافة شحنة عظمى $\rho_{max} = \rho_0$ التى تحدث عند $x = 0.881a$. نهاية عظمى لكثافة الشحنة ρ_0 مرتبطة بتركيزات المتقبل والمعطى N_a و N_d بملاحظة أن جميع أيونات المعطى والمتقبل فى هذه المنطقة (طبقة النزح) انتزع منها إلكترون أو فجوة ، وعلى ذلك

$$\rho_0 = eN_a = eN_d$$

دعنا الآن نحل معادلة بواسون ،

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

بشروط توزيع الشحنة المفترض آنفا ،

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = -\frac{2\rho_0}{\epsilon} \operatorname{sech} \frac{x}{a} \tanh \frac{x}{a}$$

فى هذه المسألة ذات البعد الواحد التى فيها التغيرات مع y و z غير موجودة . نكامل مرة ،

$$\frac{dV}{dx} = \frac{2\rho_0 a}{\epsilon} \operatorname{sech} \frac{x}{a} + C_1$$

ونحصل على شدة المجال الكهربى ،

$$E_x = -\frac{2\rho_0 a}{\epsilon} \operatorname{sech} \frac{x}{a} - C_1$$

لتقدير قيم ثابت التكامل C_1 ، نلاحظ أنه لا يمكن أن يوجد صافى كثافة شحنة أو مجالات بعيداً عن الملتقى . وعلى ذلك ، عندما $x \rightarrow \pm \infty$ يجب أن تقترب E_x من الصفر . ولذلك $C_1 = 0$ ، و

$$(٢٥) \quad E_x = -\frac{2\rho_0 a}{\epsilon} \operatorname{sech} \frac{x}{a}$$

وبالتكامل مرة أخرى ،

$$V = \frac{4\rho_0 a^2}{\epsilon} \tan^{-1} e^{x/a} + C_2$$

دعنا اختارياً ننتى مرجعنا الصفرى للجهد عند مركز الملتقى ، $x = 0$ ،

$$0 = \frac{4\rho_0 a^2}{\epsilon} \frac{\pi}{4} + C_2$$

وأخيراً ،

$$(٢٦) \quad V = \frac{4\rho_0 a^2}{\epsilon} \left(\tan^{-1} e^{x/a} - \frac{\pi}{4} \right)$$

يبين شكل ٧-٣ توزيع الشحنة ، شدة المجال الكهربى ، والجهد ، كما هى معطاة بـ (٢٤) ، (٢٥) ، و (٢٦) ، بالترتيب .

والجهد ثابت بمجرد أن نكون على مسافة تقريباً $4a$ أو $5a$ من الملتقى . و فرق الجهد الكلى V_0 عبر الملتقى يحصل عليه من (٢٦) ،

$$(٢٧) \quad V_0 = V_{x \rightarrow \infty} - V_{x \rightarrow -\infty} = \frac{2\pi\rho_0 a^2}{\epsilon}$$

يوحى هذا التعبير بإمكانية تعيين الشحنة الكلية على جانب واحد من الملتقى ثم استخدام (٢٧) لإيجاد سعة الملتقى . والشحنة الموجبة الكلية هى

$$Q = S \int_0^{\infty} 2\rho_0 \operatorname{sech} \frac{x}{a} \tanh \frac{x}{a} dx = 2\rho_0 a S$$

حيث S هى مساحة مقطع الملتقى . إذا استخدمنا (٢٧) لتلقى بإرومتر المسافة a ، تصبح الشحنة

$$(٢٨) \quad Q = S \sqrt{\frac{2\rho_0 \epsilon V_0}{\pi}}$$

لأن الشحنة الكلية دالة لفرق الجهد ، علينا أن نكون حريصين في تعريف سعة .
وبالتفكير بتعابير « الدوائر الكهربائية » للحظة ،

$$I = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dV_0}{dt}$$

وعلى ذلك

$$C = \frac{dQ}{dV_0}$$

لذلك بفاضل (٢٨) يكون لدينا السعة ،

$$(٢٩) \quad C = \sqrt{\frac{\rho_0 \epsilon}{2\pi V_0}} S = \frac{\epsilon S}{2\pi a}$$

والصورة الأولى لـ (٢٩) تبين أن السعة تتغير عكسيا مع الجذر التربيعي للفولتية . أى أن ، فولتية أعلى نسب فصل أعلى لطبقات الشحنة وسعة أصغر . والصورة الثانية هامة في أنها تبين أننا يمكننا أن نفكر في الملتقى لمكثف متوازي الألواح مع فاصل الألواح قيمته $2\pi a$. بالنظر إلى أبعاد المنطقة التي تتركز فيها الشحنة ، تكون هذه نتيجة منطقية .

تدخل معادلة بواسون في أى مسألة تشمل كثافة شحنة حجمية . وبجانب صمام شبه الموصل الثنائي ونماذج الترانزستور ، نجد أن الصمامات المفرغة ، تحويل الطاقة الهيدروديناميكية - المغناطيسية ، والدفع الأيوني تتطلب استخدامهما في انشاء نظريات مرضية .

ت ٧ - ٤ : صمام ثنائي ذئى ملتقى سيليكونى منشأً بحيث :
فرق الجهد عبر الملتقى 5V ، (أ) أوجد سعة الملتقى .
(ب) أوجد E عند الملتقى .

الإجابة : 1.425pF ، 2.68MV/m .

ت ٧ - ٥ : إذا كانت $V = IV$ عند :
 $x = 1 \text{ mm}$ و $V = 0$ عند $x = 0$ ، أوجد V عند $x = 2 \text{ mm}$ في فضاء حر عندما :
(أ) $\rho = -10^5 \text{ } \epsilon_0 \text{C/m}^3$ (ب) $\rho = -12 \times 10^7 \text{ } \epsilon_0 \text{C/m}^3$.
الإجابة : 2.10 V ، 2.12V .

٧- ٥ : حل معادلة لابلاس في صورة ضرب :

في هذا القسم نواجه بطائفة مجالات الجهد التي تتغير مع أكثر من واحد من الاحداثيات الثلاثة . ومع أن أمثلتنا مأخوذة في نظام الاحداثيات الكرتيزية ، فإن الطريقة العامة يمكن تطبيقها على نظم الاحداثيات الأخرى . ولكننا ستجنب تلك التطبيقات لأن مجالات الجهد تعطى بدلالة دوال رياضية أكثر تقدما ، مثل دوال بسل والتوافقيات الكروية والاسطوانية ، واهتمامنا الآن لايقع على دوال رياضية جديدة ، ولكن على التقنية وطرق حل مسائل المجال الكهروستاتيكي .

ويمكن أن نمد أنفسنا بطائفة عامة من المسائل بمجرد تحديد أن الجهد دالة في x و y فقط ، بحيث أن

$$(٣٠) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

نفرض الآن أن الجهد يمكن أن يعبر عنه كمحاصل ضرب دالة في x فقط ، ودالة في y فقط . وقد يبدو أن هذا يمنع حلولاً كثيرة جداً ، مثل $V = x + y$ ، أو أى مجموع لدالة في x ودالة في y ، ولكننا يجب أن ندرك أن معادلة لابلاس خطية ومجموع أى حلين هو أيضاً حل . ونستطيع أن نعامل $V = x + y$ كمجموع $V_1 = x$ و $V_2 = y$ حيث أن كلا من هذه الجهود الأخيرة هي الآن حل على صورة ضرب (تافق) .

وتمثيل للدالة في x بـ X والدالة في y بـ Y ، نحصل على

$$(٣١) \quad V = XY$$

التي تعوض في (٣٠) ،

$$Y \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + X \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = 0$$

ولأن X لا تشتمل على y و Y لا تشتمل على x ، يمكن استخدام المشتقات العادية ،

$$(٣٢) \quad Y \frac{d^2 X}{dx^2} + X \frac{d^2 Y}{dy^2} = 0$$

يمكن حل المعادلة (٣٢) بفصل المتغيرات بواسطة القسمة على XY ، معطية

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = 0$$

أو

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = - \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2}$$

والآن نحتاج واحدة من أروع الحجج في الرياضيات : لأن $(1/X)d^2X/dx^2$ لا يشتمل على y و $(1/Y)d^2Y/dy^2$ لا يشتمل على x ولأن الكميتين متساويتين ، فإن $(1/X)d^2X/dx^2 = (1/Y)d^2Y/dy^2$ لا يمكن أن تكون دالة حتى في x ، وبالمثل ، $(1/Y)d^2Y/dy^2 = (1/X)d^2X/dx^2$ لا يمكن أن تكون دالة في y ! ويتعير آخر ، قد يينا أن كلا من هذه الحدود يجب أن يكون ثابتا . وللتيسير ، دعنا نسمى هذا الثابت α^2 .

$$(33) \quad \frac{1}{X} \frac{d^2X}{dx^2} = \alpha^2$$

$$(34) \quad -\frac{1}{Y} \frac{d^2Y}{dy^2} = \alpha^2$$

يسمى الثابت α^2 ثابت الفصل ، لأن استخدامه يتسبب في فصل معادلة واحدة الى معادلتين أبسط .

المعادلة (33) يمكن أن نكتب على الصورة

$$(35) \quad \frac{d^2X}{dx^2} = \alpha^2 X$$

ويجب الآن أن نحل . هناك طرق عديدة يمكن بواسطتها الحصول على حل . والطريقة الأولى هي الخبرة ، أو التمييز ، التي تصبح أكثر قوة بالممارسة . نحن بادئين الآن ونستطيع بالكاد التعرف على معادلة لابلاس نفسها . والطريقة الثانية قد تكون تلك بالتكامل المباشر ، عندما يمكن تطبيقها ، بالطبع . ويتطبيقها هنا ، يجب أن نكتب

$$d\left(\frac{dX}{dx}\right) = \alpha^2 X dx$$

$$\frac{dX}{dx} = \alpha^2 \int X dx$$

ثم نواصل الى الطريقة التالية ، لأن X هي دالة ما مجهولة في x ، وطريقة التكامل لا يمكن تطبيقها هنا . والطريقة الثالثة يمكننا أن نصفها بالبدئية ، الفطرة ، أو الفحص . وتشتمل علىلقاء نظرة جيدة على المعادلة - ربما - واضعين العملية في كلمات . وهذه الطريقة ستطبق على (35) ، اذا سألنا أنفسنا ، « أى دالة لها مشتقة ثانية لها نفس الصورة كالدالة نفسها ، فيما عدا الضرب في ثابت ؟ » . والاجابة هي الدالة الأسية ، بالطبع ونستطيع أن نواصل من هنا لننشئ الحل . بدلا من ذلك ، دعنا نعمل مع أولئك منا الذين تعاني بديهيتهن من المواجهة ونطبق طريقة قادرة جدا ولكن طويلة ، هي تمويض متسلسلة قوى - لانهائية .

نفرض أمليين أن X يمكن أن تمثل بـ

$$X = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

ونعوض في (٣٥) ، معطية

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \alpha^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

اذن وجب أن تكون هاتان المتسلسلتان اللانهائيتان متساويتين لكل x ، فانهما يجب أن تكونا متطابقتين ، والمعاملات لقوى x المتشابهة يمكن أن تساوى حداً بحد . وعلى ذلك

$$2 \times 1 \times a_2 = \alpha^2 a_0$$

$$3 \times 2 \times a_3 = \alpha^2 a_1$$

وعامة نحصل على العلاقة التكرارية

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = \alpha^2 a_n$$

ويمكن التعبير عن المعاملات الزوجية بدلالة a_0 كالتالى

$$a_2 = \frac{\alpha^2}{1 \times 2} a_0$$

$$a_4 = \frac{\alpha^2}{3 \times 4} a_2 = \frac{\alpha^4}{4!} a_0$$

$$a_6 = \frac{\alpha^6}{6!} a_0$$

وعامة ، لـ n زوجية ، بالصور

$$a_n = \frac{\alpha^n}{n!} a_0$$

وللقوى الفردية لـ n ، نحصل على

$$a_3 = \frac{\alpha^2}{2 \times 3} a_1 = \frac{\alpha^3}{3!} a_1$$

$$a_5 = \frac{\alpha^5}{5!} a_1$$

وعامة ، لـ n فردية ،

$$a_n = \frac{\alpha^n a_1}{n! \alpha}$$

بالرجوع للتعويض في متسلسلة القوى الأصلية لـ X ، نحصل على

$$X = a_0 \sum_{0, \text{ even}} \frac{\alpha^n}{n!} x^n + \frac{a_1}{\alpha} \sum_{1, \text{ odd}} \frac{\alpha^n}{n!} x^n$$

أو

$$X = a_0 \sum_{0, \text{ even}} \frac{(\alpha x)^n}{n!} + \frac{a_1}{\alpha} \sum_{1, \text{ odd}} \frac{(\alpha x)^n}{n!}$$

ومع أن مجموع هاتين المتسلسلتين اللانهائيتين هو حل المعادلة التفاضلية في x ، فإن صورة الحل يمكن أن تحسن بلاحد بالاعتماد على المتسلسلة الأولى على أنها يجب تمام زائد

(١٣ - ٧)

$$\cosh \alpha x = \sum_{0, \text{ even}} \frac{(\alpha x)^n}{n!} = 1 + \frac{(\alpha x)^2}{2!} + \frac{(\alpha x)^4}{4!} + \dots$$

والمتسلسلة الثانية على أنها يجب زائد

$$\sinh \alpha x = \sum_{1, \text{ odd}} \frac{(\alpha x)^n}{n!} = \alpha x + \frac{(\alpha x)^3}{3!} + \frac{(\alpha x)^5}{5!} + \dots$$

ولذلك يمكن أن يكتب الحل بالصورة

$$X = a_0 \cosh \alpha x + \frac{a_1}{\alpha} \sinh \alpha x$$

أو

$$X = A \cosh \alpha x + B \sinh \alpha x$$

حيث حلت A و B الأيسر قليلا محل a_0 و a_1/α وهما الثابتان اللذان يجب أن نعين قيمتهما بدلالة شروط الحدود . وثابت الفصل ليس ثابتا اختياريا وذلك فيما يخص حل (٣٥) ، لأنه يظهر في تلك المعادلة .

ويحصل على صورة بديلة للحل بالتعبير عن الدوال الزائدية بدلالة الدوال الأسية ، تجميع الحدود ، واختيار ثوابت اختيارية جديدة ، a' و B' ،

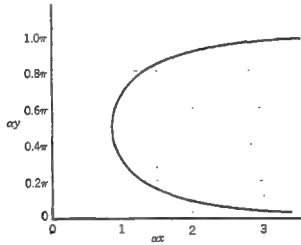
$$X = A'e^{xx} + B'e^{-xx}$$

وحل (٣٤) يتم عبر خطوات مماثلة ، مؤديا الى متسلسلتين للقوى تمثلان الجيب ، وجيب التمام ، ونحصل على

$$Y = C \cos \alpha y + D \sin \alpha y$$

ومنها يكون الجهد

$$(٣٦) \quad V = XY = (A \cosh \alpha x + B \sinh \alpha x)(C \cos \alpha y + D \sin \alpha y)$$



شكل ٧ - ٤ : رسم بياني للدالة مزيجية القيمة $\alpha y = \sin^{-1} (1/\sinh \alpha x)$ و $0 < \alpha < \pi$.

قبل وصف مسألة فيزيائية واجبار الثوابت التي تظهر في (٣٦) ان نحقق شروط الحدود المفروضة ، دعنا نعتبر الطبيعة الفيزيائية لمجال الجهد المعطى باختيار بسيط لهذه الثوابت . بأن ندع $A = 0$, $C = 0$, $B = V_1$ ونحصل على

$$(٣٧) \quad V = V_1 \sinh \alpha x \sin \alpha y$$

العامل $\sinh \alpha x$ يساوى صفرا عند $x = 0$ ويزيد تدريجيا مع x ، وعاجلا يصبح تقريبا ذا صورة أسية لأن

$$\sinh \alpha x = \frac{1}{2}(e^{\alpha x} - e^{-\alpha x})$$

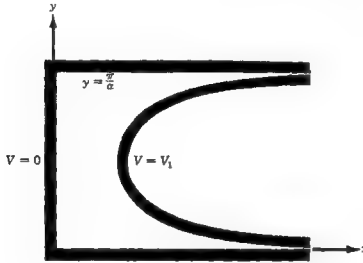
الحد $\sin \alpha y$ يجعل الجهد صفرا عند $y = 0$, $y = \pi/\alpha$, $y = 2\pi/\alpha$ وهلم جرا . ولذلك يمكننا أن نضع مستويات موصلة ذات جهد - صفري عند $x = 0$, $y = 0$, $y = \pi/\alpha$. وأخيرا ، يمكننا أن نصف السطح متساوي - الجهد V_1 بوضع $V = V_1$ في (٣٧) ، حاصلين على

$$\sinh \alpha x \sin \alpha y = 1$$

أو

$$\alpha y = \sin^{-1} \frac{1}{\sinh \alpha x}$$

وهذه ليست معادلة مألوفة ، ولكن حاسبا يدويا ، أو مجموعة من الجداول يمكن أن يعطى قيما عديدة كافية ليسمح لنا أن نرسم αy كدالة في αx . مثل هذا المنحنى مبين في شكل ٧ - ٤ . لاحظ أن المنحنى مزدوج - القيمة ومتماثل حول الخط $\alpha y = \pi/2$ عندما تحصر αy في الزاوية بين 0 و π .



شكل ٧ - ٤ : مقطع عرضي للأسطح متساوية - الجهد :

$$V = V_1 \sinh \alpha x \sin \alpha y \quad \text{لـ مجال الجهد} \quad V = V_1 \text{ و } V = 0$$

ومعلومات شكل ٧ - ٤ نقلت مباشرة الى الأسطح متساوية - الجهد الموصلة $V = 0$ و $V = V_1$ في شكل ٧ - ٥ . والأسطح مبينة بمقطع عرضي ، حيث أن الجهد ليس دالة في x .

وأنه من غير المحتمل جدا أننا سنسأل في أى وقت لنجد مجال الجهد لهذه الأقطاب الكهربى غريبة التشكيل ، ولكننا يجب أن نضع في أذهاننا إمكانية ضم عدد من المجالات لها الصورة المعطاة بـ (٣٦) أو (٣٧) ومحققة بذلك شروط الحدود لمسائل عملية أكثر . وننتهى هذا الفصل بمثل هذا المثال .

والمسألة التى ستحل هى تلك المبينة فى شكل ٧ - ٦ . وشروط الحدود المبينة هى $V = 0$ عند $x = 0$, $y = 0$, $y = b$ و $V = V_0$ عند $x = d$ لكل y بين 0 و b . ومن الواضح فى الحال أن مجال الجهد المعطى بـ (٣٧) والمخطط فى شكل ٧ - ٥ يحقق

اثنين من شروط الحدود الأربعة . وشروط ثالث $V = 0$ عند $y = b$ ، يمكن أن يتحقق باختيار α ، لأن تعويض هذه القيم في (٣٧) يؤدي إلى المعادلة

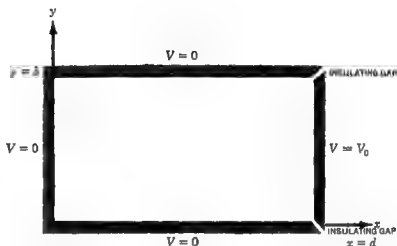
$$0 = V_1 \sinh \alpha x \sin \alpha b$$

التي يمكن أن تتحقق بوضع

$$\alpha b = m\pi \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

أو

$$\alpha = \frac{m\pi}{b}$$



شكل ٧-٦ : مسألة جهد تتطلب جمعا لانتهائيا للمجالات بالصورة $V = V_1 \sinh \alpha x \sin \alpha y$. في الفصل السادس حلل تشكيل مشابه بطريقة التكرار .

وعلى ذلك تعطي دالة الجهد

$$(٣٨) \quad V = V_1 \sinh \frac{m\pi x}{b} \sin \frac{m\pi y}{b}$$

الجهد المضبوط عند $x = 0$ ، $y = 0$ و $y = b$ ، بغض النظر عن اختيار m أو قيمة V_1 . ومن غير الممكن أن نختار M أو m بحيث أن $V = V_0$ عند $x = d$ لأي ولكل قيمة لـ y بين 0 و b . ويجب أن نُجمع عددا لانتهائيا من هذ المجالات ، كل بقيمة مختلفة لـ m وقيمة مناظرة لـ V_1 ،

$$V = \sum_{m=0}^{\infty} V_{1m} \sinh \frac{m\pi x}{b} \sin \frac{m\pi y}{b}$$

الرمز السفلى على V_{1m} يشير الى أن عامل الاتساع هذا سيكون له قيم مختلفة لكل قيمة مختلفة لـ m . ويتطابق شرط الحدود الأخير الآن ،

$$V_0 = \sum_{m=0}^{\infty} V_{1m} \sinh \frac{m\pi d}{b} \sin \frac{m\pi y}{b} \quad (0 < y < b, m = 1, 2, \dots)$$

لأن $V_{1m} \sinh (m\pi d/b)$ دالة في m فقط ، يمكننا أن نبسط التعبير باستبدال هذا العامل بـ c_m ،

$$V_0 = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \sin \frac{m\pi y}{b} \quad (0 < y < b, m = 1, 2, \dots)$$

هذه متسلسلة فوريير جيبية ، والمعاملات c_m يمكن أن تحدد بطرق متسلسلة فوريير العيارية^(١) إذا تمكنا من تفسير V_0 كدالة دورية في y . لأن مسائلنا الفيزيائية محدودة بمستويات موصلة عند $y = 0$ و $y = b$ ، واهتمامنا في الجهد لا يمتد خارج هذه المنطقة ، يمكننا أن نعرف الجهد عند $x = d$ بأي طريقة نختار لـ y خارج المدى 0 الى b . ربما يحصل على أبسط تعبير دورى باختيار المسافة $0 < y < b$ كنصف الدورة واختيار $V = V_0$ في نصف الدورة المجاور ، أو

$$V = V_0 \quad (0 < y < b)$$

$$V = -V_0 \quad (b < y < 2b)$$

وعلى ذلك تكون المعاملات c_m هي

$$c_m = \frac{1}{b} \left[\int_0^b V_0 \sin \frac{m\pi y}{b} dy + \int_b^{2b} (-V_0) \sin \frac{m\pi y}{b} dy \right]$$

مؤدية الى

$$c_m = \frac{4V_0}{m\pi} \quad (m \text{ odd})$$

$$= 0 \quad (m \text{ even})$$

مع ذلك ، $C_m = V_{1m} \sinh (m\pi d/b)$ ، ولذلك

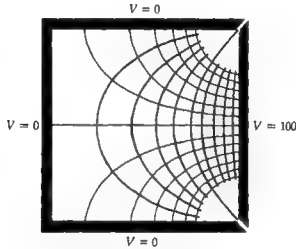
$$V_{1m} = \frac{4V_0}{m\pi \sinh (m\pi d/b)} \quad (m \text{ odd only})$$

(١) متسلسلات - فوريير مناقشة تقريبا في كل كتاب متقدمة كهربية عن نظرية الدوائر . والمؤلف متحاز لمرجع Hagy and Kesemerty المحلى في بيان عند نهاية هذا الفصل .

التي يمكن أن تعرض في (٣٨) لتمطى دالة الجهد المطلوبة ،

$$(٣٩) \quad V = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{1, \text{odd}} \frac{1}{m} \frac{\sinh(m\pi x/b)}{\sinh(m\pi d/b)} \sin \frac{m\pi y}{b}$$

وتخطيط هذا المجال يمكن الحصول عليه بتقدير قيمة (٣٩) عند عدد من النقط ورسم متساويات - الجهد بالاستكمال من الداخل بين هذه النقط ، اذا وضعنا $b = d$ و $V_0 = 100$ ، تكون المسألة مطابقة مع تلك التي استخدمت كمثال في مناقشة طريقة التكرار .



شكل ٧ - ٧ : خريطة المجال المنظر لـ

$$V = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{1, \text{odd}} \frac{1}{m} \frac{\sinh(m\pi x/b)}{\sinh(m\pi d/b)} \sin \frac{m\pi y}{b}$$

مع $b = d$ و $V_0 = 100V$.

وباختيار أحد نقط الشبكة لتلك المسألة ، ندع $x = d/4 = b/4$ ، $y = b/2 = d/2$ ، ونحصل على $V_0 = 100$ و

$$\begin{aligned} V &= \frac{400}{\pi} \sum_{1, \text{odd}} \frac{1}{m} \frac{\sinh(m\pi/4)}{\sinh(m\pi)} \sin m\pi/2 \\ &= \frac{400}{\pi} \left(\frac{\sinh \pi/4}{\sinh \pi} - \frac{1}{3} \frac{\sinh 3\pi/4}{\sinh 3\pi} + \frac{1}{5} \frac{\sinh 5\pi/4}{\sinh 5\pi} - \dots \right) \\ &= \frac{400}{\pi} \left(\frac{0.8687}{11.549} - \frac{5.228}{3 \times 6,195.8} + \dots \right) \\ &= 9.577 - 0.036 + \dots \\ &= 9.541 \text{ V} \end{aligned}$$

ومتساويات الجهد مرسومة لتزايدات مقدارها $10V$ في شكل $V-V$ ، وقد أضيفت خطوط التدفق بيانيا لتعطي تخطيطا منحني الخطوط .

وقد كانت المادة المغطاة في هذه المناقشة للحل على صورة الضرب أكثر صعوبة من كثير من العمل السابق ، وعلاوة على ذلك ، قد قدمت ثلاثة أفكار جديدة . الطريقة التقنية الجديدة الأولى كانت الفرض أن الجهد يمكن أن يعبر عنه كحاصل ضرب دالة في x ودالة في y ، والفصل الناتج لمعادلة لابلاس الى معادلتين تفاضليتين عاديتين أبسط . استخدمت الطريقة الجديدة الثانية عندما فرض حل على صورة متسلسلة قوى لانهاية كحل لاحدى المعادلات التفاضلية العادية . أخيرا ، اعتبرنا مثالا تطلب فهم عدد لانهاية من حلول أسهل على صورة الضرب ، وكلا منها له اتساع مختلف وتغير مختلف في أحد الاتجاهات الاحداثية . كل هذه الطرق التقنية فعالة جدا . وهي مفيدة في كل نظم الاحداثيات ، ويمكن أن تستخدم في مسائل يتغير فيها الجهد مع الاحداثيات الثلاثة كلها .

وقد أدخلنا الموضوع هنا فحسب ، ويمكن الحصول على معلومات أكثر من المراجع المدرجة عند نهاية الفصل ، وعديد منها يخصص مئات الصفحات لحل معادلة لابلاس .

ت $V-V$: ٦ - (أ) بين أن (٣٢) تحقق بتمثيل الجهد $V = 100 e^{-\pi y} \cos \pi x$.
(ب) حين القيمة العددية لـ α^2 في (٣٣) .

. الاجابة : صحيح ، $9.87 -$.

ت $V-V$: الحوض المستطيل المبين في شكل $V-V$ ٦ أبعاده $b=1$ و $d=2$. اذا كان : $V_0 = 500V$ ، أوجد V : عند (أ) $x = 1/2$ ، $y = 1/2$ ، (ب) مركز الحوض .

الاجابة : $27.4V$; $5.47V$

مراجع مقترحة :

- 1 - Dekker, A.J. : (انظر المراجع المقترحة للفصل الخامس)
- 2 - Hayt, W. H., Jr., and J. E. Kemmerly: "Engineering Circuit Analysis," 3d ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1978.
- 3 - Pugh, E.M., and E.W. Pugh: "Principles of Electricity and Magnetism", 2d ed., Addison - Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1970.

هذا الكتاب يقدم وجهة نظر الفيزيائي للكهرية والمغناطيسية ولكن طلبة الهندسة الكهرية يجب أن يجدوه سهلا فى القراءة . حل معادلة لابلاس بعدد من الطرق مناقش فى الفصل الرابع .

(انظر المراجع المقترحة للفصل السادس)

4 - Ramo, S., J.R. Whinnery, and T. Van Duzer.

مناقشة أكثر اكتمالا وتقدما لطرق حل معادلة لابلاس معطاة فى الفصل الثالث .

5 - Smythe, W.R.: "Static and Dynamic Electricity", 3d ed., McGraw - Hill Book Company, New York, 1968.

6 - Weber, E. معالجة متقدمة لنظرية الجهد معطاة فى الفصل الرابع :
(انظر المراجع المقترحة للفصل السادس)

هناك عدد هائل من حلول الجهد معطاة مع المراجع الأصلية .

مسائل :

١ - عين اللابلاسى لـ : (أ) $1/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ، (ب) $1/\sqrt{x^2+y^2}$ (ج) $1/\rho$ ، (د) $1/r$.

٢ - (أ) بين أن مجال الجهد $V = 2x^2 - y^2 - z^2 + 4$ يحقق معادلة لابلاس . (ب) ارسم تخطيطيا تقاطعات الأسطح متساوية - الجهد $V = 0$ و $V = 4$ مع المستويات الاحداثية

$$0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 3, 0 \leq z \leq 3 .$$

٣ - اذا أعطيت مجال الجهد $V = 5x^2yz + ky^2z$ ، (أ) عين k بحيث أن تتحقق معادلة لابلاس . (ب) لقيمة k هذه ، حدد اتجاه E عند $(2,1,-1)$ بوحدة متجه .

٤ - عين قيمة كثافة الشحنة عند النقطة $P(2,0,-3)$ فى فضاء حر لمجالات الجهد :
(أ) $V = 5x^2y^2z^2 - 3z^2 + 2y^2 + x^2$ ، (ب) $V = 5$.

٥ - لكل مجال جهد معطى فيما بعد ، أوجد قيمة اللابلاسى عند نقطة الأصل وقرر ما اذا كان المجال يحقق معادلة لابلاس أم لا : (أ) $V = (x+1)^2(y+1) - z^2$ ، (ب) $V = e^{-3x} \sin 5y \sin 4z$.

٦ - اذا أعطيت مجال الجهد $V = 20\rho^2 \cos 2\phi$: (أ) بين أن $\nabla^2 V = 0$ ، (ب) ارسم تخطيطيا الأسطح متساوية - الجهد $V = 0$ و $V = 20$ فى الثمن الأول .

٧ - لاي قيمة k تكون $V = V_0 \ln(\tan k\theta)$ حلا لمعادلة لابلاس فى الاحداثيات الكروية ؟

(ب) اذا كان $K = 1$ و $V_0 = 100V$ ، ماهى كثافة الشحنة الحجمية عند $\phi = 0^\circ$ ، $\theta = 45^\circ$ ، $r = 2$ فى فضاء حر ؟

٨ - مفتاح الباب النحاسي المقدم في قسم ٣-٢ عند جهد $100V$ وهو يداخل علبة لنوع مامن الحساء عند $57V$. دع كلا من $V_1(x,y,z)$ و $V_2(x,y,z)$ يحقق معادلة لابلاس في المنطقة بين المفتاح والمحائط الداخلى للعلبة. وأيضا كل دالة جهد تكون عند $100V$ عند سطح المفتاح و $57V$ على العلبة.

(أ) هل تحقق الدوال $V_1 + V_2 = 80$, $V_1 - 80$ و $2V_1 - 3V_2$ معادلة لابلاس في المنطقة بين المفتاح والعلبة ؟

(ب) هل الدوال $V_1 + V_2 = 80$, $V_1 - 80$ و $2V_1 - 3V_2$ لها القيم المضبوطة على المفتاح وعلى سطح العلبة الداخلى ؟

(ج) قرر ماذا كانت هذه الدوال مطابقة :

لـ V_1 أم لا : $V_1 + V_2 = 80$, $V_1 - 80$ و $2V_1 - 3V_2$.

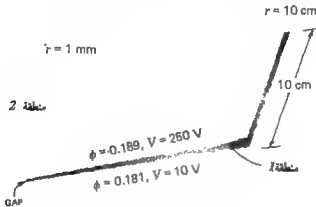
٩ - سأل استاذ طلبة فصله لمرحلة البكالوريوس أن يجدوا دالة جهد تحقق معادلة لابلاس ، وتحقق شروط الحدود ، عند $x = 0$ و $x = 1$ عند $V = 0$ و $V = 1$ عند $x = 1$.

اقترحت ثلاثة حلول . اقترح طالب منهم بتردد $V_1 = x$. على أن الاستاذ يفكر في $V_2 = x + e^{\pi x} \sin \pi x$. ولكن طالب الدراسات العليا العامل بالفصل له المام أكثر بالرياضة ويصل الى :

$$V_3 = x + \sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^n / (n + 1)] e^{n\pi x} \sin n\pi x$$
 بين أن كل الدوال الثلاث تحقق معادلة لابلاس ، وكذلك تحقق شروط الحدود . (ب) عندئذ تبعا لنظرية الوحدةانية تكون الثلاث متطابقة . ما هو الخطأ اذن ؟

١٠ - لوحان موصلان كبيران متوازيان عند $x = -1\text{cm}$ و $x = 3\text{cm}$ عند جهدي V_a و V_b بالترتيب . والمنطقة بين اللوحين هي ثاني أكسيد كربون . الجهد عند $x = -0.5\text{cm}$ هو $70V$ بينما ذاك عند $x = 1.5$ هو $450V$. أوجد V_a , V_b , E والشحنة لكل وحدة مساحة على اللوح الموجب .

١١ - يوجد مجال جهد $V = 40x - 20y + 35z + 10kV$ بين لوحين موصلين



شكل ٧ - انظر سألة ١٤

متوازنين ، كل له مساحة مقدارها 120cm^2 . اللوحان يفصلهما 0.8mm . إذا كان المتوسط بين اللوحين هواء ، أوجد الفولتية بين اللوحين والسعة .

١٢ - اسطوانتان موصلتان متحدتي المحور تقعان عند $\rho = 4\text{cm}$ و $\rho = 15$ و قيمة E هي 20akV/m عند $\rho = 6\text{cm}$ و جهد الموصل الموجب أكثر هو 200V . أوجد : (أ) مقدار فرق الجهد بين الموصلين ، و (ب) سعة النظام ، إذا كان الوسط بين الاسطوانتين له $\epsilon_R = 2.7$.

١٣ - تمثل معادلة (١٥) في قسم ٧-٣ الحل العام في الاحداثيات الاسطوانية لمعادلة لابلاس لمجال جهد يتغير فقط مع ρ . انتقى A و B بحيث أن : (أ) $V = 250\text{V}$ عند $\rho = 1\text{mm}$ و $V = 1,000\text{V}$ عند $\rho = 5\text{mm}$ ، (ب) $V = 0$ عند $\rho = 4\text{mm}$ و $E_\rho = 15,000\text{V/m}$ عند $\rho = 0.8\text{mm}$ ، (ج) $V = 10\text{V}$ و $E_\rho = 10\text{kV/m}$ عند $\rho = 4\text{mm}$.

١٤ - المستويان النصف قطريين الموصلان الميئنان في شكل ٧-٨ موضوعان في الهواء . للمنطقة I بين المستويين ، أوجد : (أ) تعبير لمجال الجهد ، (ب) E ، (ج) D ، (د) ρ_z على السطح السفلي للمستوى العلوي ، (هـ) Q على السطح السفلي للمستوى العلوي . (و) أعد (أ) الى (ج) للمنطقة 2 بأن تدع موضع المستوى العلوي يكون $2\pi - 0.189 = \phi$ ، ثم أوجد ρ_z و Q على السطح العلوي للمستوى العلوي . (ز) أوجد الشحنة الكلية على السطح العلوي والسعة بين المستويين .

١٥ - إذا أعطيت مجال الجهد في الاحداثيات الاسطوانية ، $V = 1,000\phi + 50V$ فاحسب القيم عند $P(0.4, 30^\circ, 1.1)$ في الهواء لـ (أ) V ، (ب) E ، (ج) كثافة الطاقة . (د) عين الطاقة الكلية المختزنة في المنطقة : $\rho_2 \leq \rho \leq \rho_1$ ، $\phi_2 \leq \phi \leq \phi_1$ ، $z_2 \leq z \leq z_1$.

١٦ - (أ) حل معادلة لابلاس لمجال الجهد في المنطقة المتجانسة بين كرتين موصلتين متحدتي المركز نصف قطريهما a و b ، إذا كانت $V = 0$ عند $r = b$ و $V = V_0$ عند $r = a$. (ب) أوجد السعة بينهما .

١٧ - المنطقة $2 < r < 5\text{m}$ بين كرتين موصلتين متحدتي - المركز تحتوي على عازل غير متجانس له $\epsilon_R = (r + 1)/r$. (أ) هل معادلة لابلاس محققة في المنطقة بين الكرتين ؟ (ب) إذا كانت الكرة الداخلية عند $V = 1,000\text{V}$ والخارجية عند $V = 200\text{V}$ ، أوجد (ر) V . (ج) ماهي السعة بين الكرتين ؟

١٨ - أوجد V كدالة في r في الاحداثيات الكروية إذا كان (أ) $V = 200$ عند $R = 0.2\text{m}$ و $V = 50\text{V}$ عند $r = 0.25\text{m}$ ، (ب) $V = 200\text{V}$ عند $r = 0.2\text{m}$ و $E_r = 6,000\text{V/m}$ عند $r = 0.3\text{m}$ ، (ج) $V = 200\text{V}$ عند $r = 0.2$ ، والشحنة الكلية على السطح الخارجي لكرة موصلة عند $r = 0.2$ في الهواء هي $2\mu\text{C}$.

١٩ - مخروطان موصلان ، موضوعان عند $\theta = 30^\circ$ و $\theta = 75^\circ$ ، مفصولان بشفرة عازلة عند نقطة الأصل . دح جهد المخروط الداخلى يكون $20V$ ، اذا كانت : $E = 50a_0 V/m$ عند $(\phi = 130^\circ, \theta = 60^\circ, P(0.5, \theta))$ ، أوجد : (أ) V عند : P ، (ب) فرق الجهد بين المخروطين .

٢٠ - مخروط معدنى ، معرف بـ $\theta = 0.01^\circ$ ، حاد جدا مفصول عن المستوى $z = 0$ بقطعة عزل صغيرة . اذا كان المخروط عند $60V$ والمستوى عند $0V$ حين : (أ) زاوية المخروط الواقع عند متساوى- الجهد الأوسط (ب) المعادلة والأسم الوصفى للسطح الذى عليه $|E| = 100V/m$.

٢١ - شحنة موزعة بطريقة متماثلة كرويا بالصورة $[r^2 + a^2]^{-1/2}$ ، $\rho = \rho_0 a^2 / [r^2 + a^2]$. (أ) كون وحل معادلة بواسون لـ $V(r)$ تحت شروط الحدود أن $E_r = 0$ عند $r = 0$ و $V_r \rightarrow 0$ عندما $r \rightarrow \infty$. (ب) أوجد $V(r)$ مرة أخرى ، ولكن استخدم قانون جاوس وتكامل خطى هذه المرة .

٢٢ - دح توزيع الشحنة لشكل ٧-١٣ تمثل بـ $\rho = \rho_0 (x/a)e^{-x/a}$ لـ $x > 0$ و $\rho = 0$ لـ $x < 0$. (أ) بين أن $\rho_{max} = 0.368\rho_0$ وأنها تحدث عند $x = a$. (ب) استخدم استنتاجا مماثلا لذلك المعطى فى قسم ٧-٤ لتبين أن : $C = dQ/dV_0 = \epsilon S/(8a)$.

٢٣ - افرض أن مجال جهد فى احداثيات كروية ليس دالة فى ϕ ويمكن أن يعبر عنه كحل فى صورة الضرب $V = R\Theta$ ، حيث $R = R(r)$ و $\Theta = \Theta(\theta)$ عوض التعبير المفترض فى معادلة لابلاس ثم أجرى فصل الدوال فى r و θ باستخدام ثابت فصل α^2 . (أ) بين أن المعادلة التفاضلية العادية فى r التى تنتج هى $R'' + 2R'/r - \alpha^2 R = 0$. (ب) عين المعادلة التفاضلية العادية المناظرة فى θ .

٢٤ - حل فى صورة الضرب لمعادلة لابلاس فى بعدين ممطى بالصورة $V_I = X_I Y_I$ حيث X_I و Y_I الدالتين فى x و y فقط ، بالترتيب . قرر ما اذا كانت الدوال الاتية تحقق معادلة لابلاس أم لا : (أ) $V_a = X_I - Y_I$ ، (ب) $V_b = Y_I$ ، (ج) $V_c = X_I Y_I + y$ ، (د) $V_d = 2X_I Y_I$ ، (هـ) $V_e = X_I Y_I + x^2 - y^2$.

٢٥ - اذا أعطيت المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية $X'' + 2x X' - X = 0$ ، افرض حلا فى صورة متسلسلة قوى لانهائية واحسب قيما عديدة لـ a_2 الى a_6 اذا كانت $a_0 = 1$ ، $a_1 = -2$.

٢٦ - حل للجهد عند مركز الحوض المربع لشكل ٦-١٥ اذا كانت $V_1 = V_3 = V_4$ و V_2 تزايد خطيا من 0 عند اسفل الجانب الأيمن الى $200V$ عند أعلى نقطة .

الفصل الثامن

المجال المغناطيسي الثابت

عند هذه النقطة يجب أن يكون مفهوم المجال شيئا مألوفاً . لأننا قبلنا أولاً القانون التجريبي للقوى الموجودة بين شحنتين نقطيتين وعرفنا شدة المجال الكهربى أنها القوة لكل وحدة شحنة على شحنة اختبار فى وجود شحنة ثانية ، وقد قابلنا مجالات عديدة . وهذه المجالات ليس لها أساس فيزيائى حقيقى ، لأن القياسات الفيزيائية يجب أن تكون دائماً بدلالة القوى على الشحنات فى معدات الكشف . تلك الشحنات التى هى المنبع تسبب قوى يمكن قياسها ، تؤثر على شحنات أخرى ، التى يمكن أن نفكر فيها كشحنات مكشاف والحقيقة بأننا ننسب المجال لشحنات المنبع ثم نعين تأثير هذا المجال على شحنات مكشاف تعنى مجرد تقسيم المسألة الأساسية إلى جزئين للتيسير علينا .

سنبداً دراستنا للمجال المغناطيسى بتعريف المجال المغناطيسى نفسه ونوضح كيف ينشأ من توزيع تيار . وسناقش فى الفصل التالى تأثير هذا المجال على التيارات الأخرى ، أو النصف الثانى للمسألة الفيزيائية ، وكما فعلنا مع المجال الكهربى سنقصر مناقشتنا الابتدائية على حالات الفضاء الحر ، أما تأثير الوسط المادى فسيذكر للمناقشة فى الفصل التالى .

وعلاقة المجال المغناطيسى الثابت بمصدره أكثر تعقيداً من علاقة المجال الكهربى مع مصدره . وسنجد من الضرورى أن نقبل عدة قوانين مؤقتة على أساس الثقة التامة فحسب ، محيلين إثباتهم إلى القسم النهائى (الصعب نوعاً) من هذا الفصل . وهذا القسم يمكن أن يحذف عند مقابلة مجالات مغناطيسية لأول مرة . وهو متضمن لجعل تقبل القوانين أسير قليلاً ، وبرهان القوانين موجود فعلاً وهو متاح لغير المصدقين أو للطلاب الأكثر تقدماً .

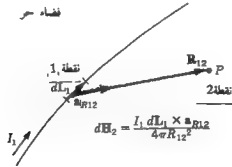
٨ - ١ : قانون بيو - سافار

مصدر المجال المغناطيسى الثابت قد يكون مغناطيسياً دائماً ، مجالاً كهربياً يتغير خطياً مع الزمن ، أو تياراً مستمراً . وسنهمل عامة المغناطيس الدائم وندخر المجال الكهربى المتغير مع الزمن لمناقشته فيما بعد . وعلاقتنا الحالية ستخصص المجال المغناطيسى الناتج عن عنصر تيار مستمر تفاضلى فى فضاء حر .

ويمكننا أن نفكر في هذا العنصر التفاضلي للتيار كقسم متناهى الصغر لموصل فتيلي حامل للتيار ، حيث الموصل الفتيلي هو الحالة النهائية لموصل اسطوانى ذى مقطع دائرى عندما يقترب نصف القطر من الصفر . نفرض تيارا I ينساب فى طول تفاضلى متجه dL من الفتيلة . عندئذ ينص قانون بيو-سافار^(١) أنه عند أى نقطة P مقدار شدة المجال المغناطيسى الناتجة عن عنصر تفاضلى يتناسب مع حاصل ضرب التيار ، مقدار الطول التفاضلى ، وجيب الزاوية الواقعة بين الفتيلة وخط يصل الفتيلة الى النقطة P حيث يُرغب المجال . مقدار شدة المجال المغناطيسى يتناسب عكسيا مع مربع المسافة من العنصر التفاضلى الى النقطة P اتجاه شدة المجال المغناطيسى عمودى على المستوى المحتوى على الفتيلة التفاضلية والخط المرسوم من الفتيلة الى النقطة P . من العمودين الممكنين ، فان ذلك الذى يختار هو الذى فى اتجاه تقدم بريمة يمينية مدارة من dL خلال الزاوية الأصغر الى الخط من الفتيلة الى P وباستخدام وحدات mks المرشدة ، يكون ثابت التناسب $1/4\pi$ قانون بيو-سافار ، الموصوف أنفا فى حوالى 150 كلمة ، يمكن أن يكتب باختصار باستخدام تدوين المتجهات بالصورة

$$(١) \quad dH = \frac{I dL \times a_R}{4\pi R^2}$$

وححدات شدة المجال المغناطيسى H هى بجلاء أمبير لكل متر (A/m) . والشكل الهندسى موضح فى شكل ٨-١ . ويمكن استخدام الرموز السفلية لتبين النقطة التى تتسبب فيها كل كمية فى (١) .



شكل ٨-١ : قانون بيو-سافار يبر من شدة المجال المغناطيسى dH_2 الناتجة من عنصر تيار تفاضلى dL_1 واتجاه I_1 اتجاه dH_2 الى داخل الصفحة .

إذا وضعنا عنصر التيار عند النقطة 1 ووضعنا النقطة P التى سيبحث المجال عندها بالنقطة 2 ، فيحصل

(١) بيرو سافار كانا زملاء لامبير ، وثلاثتهم كانوا أساتذة للفيزياء فى College de France من حين لآخر . قانون بيو-سافار اقترح 1820 .

$$(٢) \quad dH_2 = \frac{I_1 dL_1 \times a_{R12}}{4\pi R_{12}^2}$$

وقانون بيو- سافار يسمى أحيانا قانون أمبير لعنصر التيار ، ولكننا سنبقى على التسمية السابقة بسبب احتمال الخلط مع قانون أمبير الدائري ، الذى سيقابل فيما بعد . وفى بعض الأوجه ، قانون بيو- سافار مذكر بقانون كولوم عندما يكتب ذلك القانون لعنصر تفاضلى للشحنة ،

$$dE_2 = \frac{dQ_1 a_{R12}}{4\pi\epsilon_0 R_{12}^2}$$

كلاهما يُظهر اعتماداً على المسافة بقانون تربيع عكسى ، وكلاهما يُظهر علاقة خطية بين المصدر والمجال . والفرق الرئيسى يظهر فى اتجاه المجال .

ومن غير الممكن أن نحقق تجريبياً قانون بيو- سافار كما هو معبر عنه بـ (١) أو (٢) لأن العنصر التفاضلى للتيار لا يمكن أن يُعزل . وقد فصرنا اهتمامنا على التيارات المستمرة فقط ، ولذلك كثافة الشحنة ليست دالة فى الزمن . ومعادلة الاستمرارية فى قسم ٢ - ٥ ، معادلة (٥) .

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

لذلك تبين أن

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

أو بتطبيق نظرية الانفراج

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

التيار الكلى العابر لآى سطح مغلق يساوى صفراً ، هذا الشرط يمكن أن يتحقق فقط بفرض انسياب تيار حول مسار مغلق . هو هذا التيار المار فى دائرة مغلقة الذى يجب أن يكون مصدرنا التجريبي ، وليس العنصر التفاضلى .

ويتبع أن الصورة التكاملية لقانون بيو- سافار هى التى يمكن أن تحقق تجريبياً

$$(٣) \quad \mathbf{H} = \oint \frac{I d\mathbf{L} \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2}$$

معادلة (١) أو (٢) ، طبعاً ، تؤدي مباشرة الى الصورة التكاملية (٣) ، ولكن تعبيرات تفاضلية أخرى تعطى أيضاً نفس التكوين التكاملى . وأى حد تكامله حول مسار مغلق صفر يمكن أن يضاف الى (١) . أى أن ، أى مجال محافظ يمكن أن يضاف الى (١) وتدرج أى مجال مقياسى دائماً يعطى مجالاً محافظاً ، ويمكننا لذلك أن نضيف حداً ∇G الى (١) ، حيث G هو مجال مقياسى عام ، بدون أدنى تغيير فى (٣) . هذا التعديل على (١) أو (٢) ذكر لنئين أنه اذا سألنا فيما بعد بعض أسئلة حمقاء ، غير خاضعة لأى تحقيق تجريبى ، بخصوص القوة المؤثرة بواسطة عنصر تفاضلى للتيار على آخر ، فيجب أن نتوقع إجابات حمقاء .

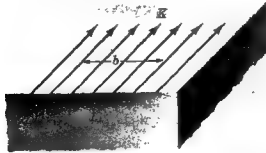
ويمكن أيضاً أن يُعبر عن قانون بيو-سافار بدلالة المتابع الموزعة ، مثل كثافة تيار J ، وكثافة تيار سطحية K . والتيار السطحي ينساب فى لوح ذى سمك متناهى الصغر ، وكثافة التيار J ، مقاسة بالأمبير لكل متر مربع ، تكون لذلك لانهاية . ولكن كثافة التيار السطحية تقاس بالأمبير لكل متر عرض ويرمز لها بـ K . اذا كانت كثافة التيار السطحية منتظمة ، يكون التيار الكلى I فى أى عرض b .

$$I = Kb$$

حيث قد فرضنا أن العرض b مقياس عمودياً على الاتجاه الذى ينساب فيه التيار . والشكل الهندسى موضح بشكل ٨-٢ . وكثافة تيار سطحية غير منتظمة ، يكون التكامل ضرورياً :

$$(4) \quad I = \int K \, dn$$

حيث dn عنصر تفاضلى للمسار الذى يمر التيار عبره .



شكل ٨-٢ التيار الكلى I خلال عرض متعامد b توجد فيه كثافة تيار سطحية منتظمة K هو Kb

على ذلك عنصر التيار التفاضلى dI ، حيث dL فى اتجاه التيار ، يمكن أن يعبر عنه بدلالة كثافة التيار السطحية K أو كثافة التيار J ،

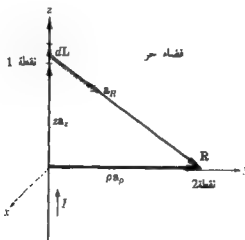
$$(\theta) \quad I dL = K dS = J dv$$

وصور بديلة لقانون بيو- سافار يحصل عليها ،

$$(\mathbf{v}) \quad H = \int_s \frac{K \times a_R dS}{4\pi R^2}$$

$$(\mathbf{v}) \quad H = \int_{vol} \frac{J \times a_R dv}{4\pi R^2} \quad ,$$

ويمكن أن نوضح تطبيق قانون بيو- سافار باعتبار فتيلة مستقيمة طولها لا نهائى .
سنطبق (٧) أولا ثم نكامل . وبالمطيع هذا هو نفسه مثل استخدام الصورة التكاملية (٧)
فى المقام الأول (١) .



شكل ٨- ٣ : فتيلة مستقيمة لانهاية الطول تحمل تيارا مستمرا I . المجال عند النقطة 2 هو $H = (I/2\pi\rho)$

بالرجوع الى شكل ٨- ٣ ، يجب أن نتعرف على تماثل هذا المجال . ولا يمكن أن يوجد تغير مع z أو مع ϕ لذلك نختار نقطة 2 ، التى عندها سطين المجال ، فى المستوى $z = 0$ ، ولدينا

$$R_{12} = \rho a_\rho - z a_z$$

(١) المسار المغلق للتيار يمكن أن يعتبر أنه يشمل فتيلة رجوع موازية للفتيلة الأولى ومبعدة لانهايتها عنها . موصلا خارجيا متحد المحور نصف قطره لانهايتى هوامكان نظرى آخر . عمليا ، المسألة هى مستحيلة ، ولكن يجب أن ندرك أن إيجابتنا ستكون دقيقة الى حد بعيد بالقرب من سلك مستقيم طويل جدا له مسار عودة للتيار بعيد .

لذلك

$$a_{R12} = \frac{\rho a_\rho - z a_z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

في الاحداثيات الاسطوانية ، نحصل على

$$dL = \rho a_\rho + \rho d\phi a_\phi + dz a_z$$

. والمسار الذى يسرى فيه التيار مُعرف بـ $d\rho = 0$ و $d\phi = 0$ على ذلك ، تصبح (٧)

$$dH_2 = \frac{I dz a_z \times (\rho a_\rho - z a_z)}{4\pi(\rho^2 + z^2)^{3/2}}$$

لان التيار موجه فى اتجاه زيادة قيم z ، تكون النهايات $-\infty$ و ∞ على التكامل ، ونحصل على

$$\begin{aligned} H_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I dz a_z \times (\rho a_\rho - z a_z)}{4\pi(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \\ &= \frac{I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho dz a_\phi}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \end{aligned}$$



شكل ٨-٤ : خطوط انسياب شدة المجال المغناطيسى حول فتيلة مستقيمة طولها لانهاى تحمل تيارا مستمرا I .

اتجاه I الى داخل الصفحة .

عند هذه النقطة يحب فحص وحدة المتجه a_ϕ تحت علامة التكامل ، لأنها ليست ثابتة دائما ، كماهى وحدات المتجهات لنظام الاحداثيات الكرتيزية . المتجه يكون ثابتا عندما يكون مقداره واتجاهه كلاهما ثابتين . ووحدة المتجه بالتاكيد لها مقدار ثابت ،

ولكن اتجاهها قد يتغير . هنا a تتغير مع الاحداثى ϕ ولكن ليس مع p أو z . لحسن الحظ ، التكامل بالنسبة لـ z ، و a ثابتة فى هذه الحالة ويمكن أن تخرج من تحت علامة التكامل ،

$$H_2 = \frac{I \rho a_\phi}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{I \rho a_\phi}{4\pi} \frac{z}{\rho^2 \sqrt{\rho^2 + z^2}} \Big|_{-\infty}^{\infty}$$

(A)
$$H_2 = \frac{I}{2\pi\rho} a_\phi$$

مقدار المجال ليس دالة فى ϕ أو z ويتغير عكسيا مع المسافة من الفتيلة . اتجاه متجه شدة المجال المغناطيسى محيطى . ولذلك تكون خطوط الانسياب دوائر حول الفتيلة ، ويمكن أن يخطط المجال فى مقطع عرضى كما فى شكل ٨ - ٤ .

وفواصل خطوط الانسياب تتناسب مع نصف القطر ، أو تتناسب عكسيا مع مقدار H . لكي نكون محددين ، فقد رُسمت خطوط الانسياب والمربعات المنحنية الخطوط فى أذهاننا . الى الآن ليس لدينا إسما لعائلة الخطوط^(١) العمودية على هذه الخطوط الانسيابية الدائرة ، ولكن المسافات الفاصلة لخطوط الانسياب قد ضبطت بحيث ينتج اضافة هذه المجموعة الثانية من الخطوط مجموعة مرتبة من المربعات منحنية الخطوط .

مقارنة شكل ٨ - ٤ مع تخطيط المجال الكهربى حول خط شحنة لانهاى تبين أن خطوط انسياب المجال المغناطيسى تناظر بالضبط متساويات الجهد للمجال الكهربى ، وعائلة الخطوط العمودية التى لم تُسم (ولم ترسم) فى المجال المغناطيسى تناظر خطوط انسياب المجال الكهربى . وهذا التناظر ليس صدفة ، ولكن هناك عدة مفاهيم أخرى يجب التمكن منها قبل أن يمكن تحرى التناظر بين المجالات الكهربائية المغناطيسية بشمول أكثر .

استخدام قانون بيرو - سافار لايجاد H هو فى أوجه عدة مشابه لاستخدام قانون كولوم لايجاد E . كل يتطلب تعيين مكامل متوسط التعقيد يحتوى على كميات متجهة ، متبوع بتكامل . عندما كنا معنيين بقانون كولوم قمنا بحل عدد من الأمثلة ، متضمنة مجالات الشحنة النقطية ، خط شحنة ، ولوح من الشحنة . ويمكن أن يستخدم قانون

(١) اذا لم تمكن من الانتظار ، انظر قسم ٨ - ٦ .

بيو- سافار لحل مسائل مناظرة في المجالات المغناطيسية ، وبعض هذه المسائل يظهر الآن -كتمارين عند نهاية الفصل أفضل من أن تكون أمثلة هنا .

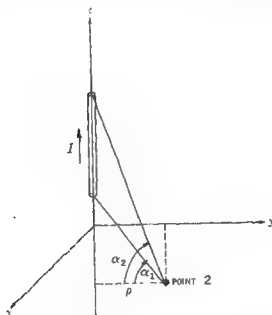
وأحد النتائج المفيدة هي مجال عنصر تيار محدود الطول ، المبين في شكل ٨ - ٥ . ينتج (انظر المسألة رقم ١١ عند نهاية الفصل) ان H يعبر عنها بأكبر قدر من السهولة بدلالة الزاويتين α_1 و α_2 ، بما يطابق ما في الشكل . تكون النتيجة

$$(٩) \quad H = \frac{I}{4\pi\rho} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) a_\phi$$

إذا كانت إحدى أو كلا النهايتين أسفل نقطة 2 ، فإن α_2 أو كلا α_1 و α_2 يكون سالبا . معادلة (٩) يمكن أن تستخدم لإيجاد شدة المجال المغناطيسى المسبب بفنائيل تيار مرتبة كتابع لأجزاء خط مستقيم .

ت ٨ - ١ : أوجد المساهمة العنصرية التزايدية ΔH لشدة المجال المغناطيسى عند نقطة الأصل ، المسببة بعنصر تيار في فضاء حر IdL مساو ل : (أ) $3\pi a_x \mu A m$ واقع عند : $(3, 2, -4, 0)$ ، (ب) $3\pi a_x \mu A m$ واقع عند $(3, 2, -4)$ ، (ج) $\pi (a_x - 2a_y + 2a_z) \mu A m$ واقع عند $(3, 0, 0)$.

الاجابة : $9.60a_x - 14.4Ia_y$ nA/m , $-24a_x - 18a_y$ n A/m , $-20a_y - 20a_z$ nA/m



شكل ٨ - ٥ : شدة المجال المغناطيسى المسببة بتيار محدود الطول على المحور Z هي : $(I/4\pi\rho) (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) a_\phi$

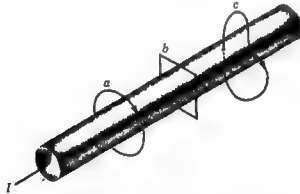
ت ٨ - ٧ : تيار مقداره $0.4A$ فى اتجاه a_x فى فتيلة موازية للمحور z ومارة بالنقطة $(2, -4, 0)$ فى فضاء حر . أوجد H عند $(0, 1, 0)$ إذا وقعت الفتيلة فى المسافة :

(أ) $-\infty < z < \infty$ ؛ (ب) $3 < z < 3$ ؛ (ج) $0 < z < \infty$: الاجابة :

$-5.49a_x - 2.20a_y \text{ mA/m} \leq -5.34a_x - 2.14a_y \text{ mA/m} \leq -10.98a_x - 4.39a_y \text{ mA/m}$

٨ - ٧ : قانون أمبير الدائرى :

بعد حل عدد من مسائل الكهروستاتيكية البسيطة بقانون كولوم ، وجدنا أن نفس المسائل يمكن أن تحل بسهولة أكثر باستخدام قانون جاوس كلما وجدت درجة عالية من التماثل . مرة أخرى توجد طريقة مناظرة فى المجالات المغناطيسية . هنا ، القانون الذى يساعدنا على أن نحل المسائل بسهولة أكثر معروف بقانون أمبير الدائرى ، أحيانا يسمى قانون الشغل لأمبير . وهذا القانون يمكن أن يستنتج من قانون بيو-سافار ، والامستتاج قد أنجز فى قسم ٨ - ٧ . وللوقت الحاضر قد نتفق على أن نقبل قانون أمبير الدائرى مؤقنا كقانون آخر يمكن أن يُبرهن تجريبيا . واستخدامه سيتطلب أيضا اعتبار حذر لتمثيل المسألة لتحديد أى متغيرات ومركبات تكون موجودة .



شكل ٨ - ٦ : موصل له تيار كل I . التكامل الخطى لـ H حول المسارات المغلقة هو b يساوى I ، والتكامل حول المسار C من I ، لأن التيار كله غير محصور بالمسار .

ينص قانون أمبير الدائرى على أن التكامل الخطى لـ H حول أى مسار مغلق يساوى بالفيض التيار المستمر المحصور بذلك المسار ،

$$(١٠) \quad \oint H \cdot dL = I$$

نُعرف التيار الموجب بأنه ينساب فى اتجاه تقدم يرمية يمينية مدارة فى الاتجاه الذى يعبر فيه المسار المغلق .

بالرجوع لشكل ٨-٩ ، الذى يبين سلكا دائريا يحمل تيارا مستمرا I ، التكامل الخطى L حول المسارات المغلقة المرموز لها بالأحرف a و b ينتج اجابة مقدارها L ، والتكامل حول المسار المغلق C الذى يمر خلال الموصل يعطى اجابة أقل من L وهو بالضبط ذلك الجزء من التيار الكلى المحصور بالمسار C . ومع أن المسارين a و b يعطيان نفس اجابة ، فإن المكامل مختلف بالطبع . ويوجها التكامل الخطى أن نضرب مركبة H فى اتجاه المسار بمنصر تزايد صغير من طول المسار عند نقطة من المسار ، نتحرك على طول المسار الى عنصر الطول التزايدى التالى ، ونكرر العملية ، مستمرين حتى يجتاز المسار كلية . لأن H سوف تختلف عامة من نقطة الى نقطة ، ولأن المسارين a و b ليسا متشابهين ، فإن المساهمات للتكامل المعمولة بـ ، مثلا ، كل ملليمتر من طول المسار مختلفة تماما . الاجابات النهائية فقط هى نفسها .

ويجب أيضا أن نعتبر بالضبط ماذا يعنى بالتعبير « التيار المحصور بالمسار » . افترض أننا لحمتا دائرة معا بعد امرار الموصل مرة خلال شريط مطاط ، الذى سوف نستخدمه ليمثل المسار المغلق . بعض المسارات القريبة والهائلة يمكن أن تنشأ بلى وعقد الشريط المطاط ، ولكن اذا لم يكسر شريط المطاط ولا الدائرة الموصلة ، فإن التيار المحصور بالمسار هو ذلك المحمول بالموصل .

والآن دعنا نستبدل بشريط المطاط حلقة دائرية من فولاذ الزنبركات الذى يشد عبرها فرخ مطاط . والحلقة الصلب تكون المسار المغلق ، والموصل الحامل للتيار يجب أن يخترق فرخ المطاط اذا كان التيار سيحصر بالمسار . مرة أخرى ، يمكننا لى الحلقة الصلب ، ويمكننا أيضا أن نشوه فرخ المطاط بذفع قبضتنا فيه أو طيه بأى طريقة نشاء . موصل مفرد حامل للتيار لا يزال يخترق الفرخ مرة ، وهذا هو المقياس الحقيقى للتيار المنحصر بالمسار . اذا أمرنا الموصل مرة خلال الفرخ من الأمام الى الخلف ومرة من الخلف الى الأمام ، فالتيار الكلى المحصور بالمسار هو المجموع الجبرى ، الذى يكون صفرا .

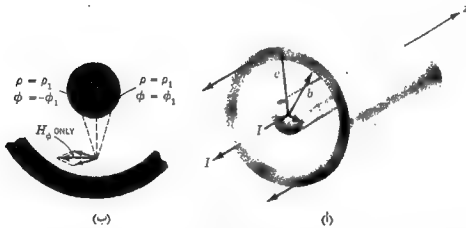
وبلغه أكثر عمومية ، اذا أعطينا مسارا مغلقا ، ندرك هذا المسار على أنه المحيط لعدد نهائى من الأسطح (ليست أسطحا مغلقة) . أى موصل حامل للتيار محصور بالمسار يجب أن يمر مرة خلال واحد من هذه الأسطح . وبالتأكيد يمكن أن تختار بعض هذه الأسطح بحيث يخترقهم الموصل مرتين فى اتجاه ومرة فى الاتجاه الآخر ، ولكن لا يزال مجموع التيار الجبرى نفسه .

ستجد أن المسار المغلق عادة له طبيعة بسيطة للغاية ويمكن أن يرسم على مستوى . وعندئذ يكون أبسط الأسطح هو ذلك الجزء من المستوى المحصور بالمسار . ونحتاج فقط أن نجد التيار الكلى المار خلال هذه المنطقة من المستوى .

تطبيق قانون جاوس يشتمل على إيجاد الشحنة الكلية المحصورة بسطح مغلق ،
تطبيق قانون أمبير الدائري يشتمل على إيجاد التيار الكلى المحصور بمسار مغلق .

دعنا مرة أخرى نجد شدة المجال المغناطيسى الناتج عن فتيلة لانهائية الطول
تحمل تيارا I . تقع الفتيلة على المحور z فى فضاء حر (كما فى شكل ٨-٣) ، ويمر
التيار فى الاتجاه المعطى بـ e_z . ويأتى فحص التماثل أولا ، مينا أن ليس هناك تغير مع
 z أو ϕ . بعد ذلك نعين أى مركبات لـ H تكون موجودة باستخدام قانون بيو- سافار .
وبدون الاستخدام الخاص بحاصل الضرب بعلامة \times ، نستطيع أن نقول أن اتجاه dH
عمودى على المستوى المحتوى على R و dL وهو لذلك فى اتجاه e_ϕ . وعلى ذلك
المركبة الوحيدة لـ H هى H_ϕ ، وهى دالة فى ρ فقط .

لذلك نختار مسارا بحيث تكون H اما عمودية أو مماسة لأى جزء منه وعلى طوله
تكون H ثابتة . المطلوب الأول (التعماد أو التماس) يسمح لنا أن نستبدل الضرب
بالنقطة فى قانون أمبير الدائري بضرب مقادير مقياسية ، ماعدا على هذا الجزء من المسار
حيث H عمودية على المسار وحاصل الضرب بالنقطة يساوى صفرا ، المطلوب الثانى
(الثبات) يسمح لنا حينئذ أن نخرج شدة المجال المغناطيسى من علامة التكامل .



شكل ٨-٧ : (أ) مقطع عرضى لكابل محورى يحمل تيارا I منتظم التوزيع فى الموصل الداخلى و I - فى الموصل
الخارجى . ويمكن تعيين المجال المغناطيسى عند أى نقطة بأقصى السهولة بتطبيق قانون أمبير الدائري
حول مسار دائرى . (ب) فتيلة تيار عند $\rho = \rho$ ، و $\phi = \pm \phi$ تولد مركبات H_ϕ تلتقى . والمجال
الكلى ، $H = H_\phi e_\phi$.

والتكامل المطلوب عادة يكون بالغ البساطة ويتكون من إيجاد طول ذلك الجزء من المسار
الذى توازيه H .

وفى مثالنا يجب أن يكون المسار دائرة نصف قطرها ρ ويصبح قانون أمبير الدائري

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \int_0^{2\pi} H_{\phi} \rho \, d\phi = H_{\phi} \rho \int_0^{2\pi} d\phi = H_{\phi} 2\pi \rho = I$$

أو

$$H_{\phi} = \frac{I}{2\pi\rho}$$

كما سبق .

وكمثال ثان على تطبيق قانون أمبير الدائري ، اعتبر خط نقل محوري طوله لانتهائي يحمل تيارا كليا I منتظم التوزيع في الموصل المركزي و I — في الموصل الخارجى . الخط ممين فى شكل ٨ - ٧ . وبين التماثل أن H ليست دالة فى ϕ أو z . لكى نعين المركبات الموجودة ، يمكننا استخدام نتائج المثال السابق باعتبار الموصل المصمت على أنه مكون من عدد كبير من الفتائل . وليس لأى فتيلة مركبة لـ H فى اتجاه z . بالإضافة ، المركبة H_{ρ} عند $\phi = 0^\circ$ ، الناتجة من فتيلة واقعة عند $\rho = \rho_I$ ، $\phi = \phi_I$ تلغى بالمركبة H_{ρ} الناتجة من فتيلة متماثلة الوقوع عند $\rho = \rho_I$ ، $\phi = -\phi_I$. هذا التماثل موضح بشكل ٨ - ٧ ومرة أخرى نجد فقط مركبة H_{ϕ} التى تتغير مع ρ .

ومسار دائرى نصف قطره ρ ، حيث ρ أكبر من نصف قطر الموصل الداخلى ولكن أقل من نصف القطر الداخلى للموصل الخارجى ، يؤدى حيثئذ فى الحال الى

$$H_{\phi} = \frac{I}{2\pi\rho} \quad (a < \rho < b)$$

إذا اخترنا ρ أقل من نصف قطر الموصل الداخلى ، يكون التيار المحصور

$$I_{\text{encl}} = I \frac{\rho^2}{a^2}$$

و

$$H_{\phi} = \frac{I\rho}{2\pi a^2} \quad (\rho < a)$$

إذا كان نصف القطر ρ أكبر من نصف القطر الخارجى للموصل الخارجى ، فلا يحصر تياراً و

$$H_{\phi} = 0 \quad (\rho > c)$$

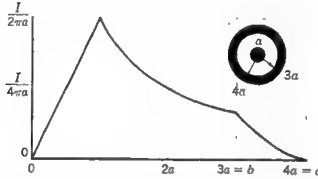
أخيراً ، إذا وقع المسار خلال الموصل الخارجى ، نحصل على

$$2\pi\rho H_\phi = I - I\left(\frac{\rho^2 - b^2}{c^2 - b^2}\right)$$

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho} \frac{c^2 - \rho^2}{c^2 - b^2} \quad (b < \rho < c)$$

تغير شدة المجال المغناطيسي مع نصف القطر مبينة في شكل ٨-٨ لكابيل محوري فيه $b = 3a$, $C = 4a$. يجب أن يلاحظ أن شدة المجال المغناطيسي H مستمرة عند كل حدود الموصل . وبتعبير آخر ، فإن زيادة طفيفة في نصف قطر المسار المغلق لايسبب حصر تيار مغاير كثيراً . لانتظهر قيمة H_ϕ قفزات مفاجئة .

المجال الخارجى يساوى صفراً . هذا ، كما نرى ، ينتج عن تيارات موجبة وسالبة متساوية محصورة بالمسار . وكُلّا ينتج مجالاً خارجياً مقداره $I/2\pi\rho$ ، ولكن يحدث إلغاء تاماً . وهذا مثال آخر للتدريع مثل هذا الكابل المحوري الحامل لتيارات عالية لا يحدث أى تأثير ملحوظ فى دائرة مجاورة .



شكل ٨-٨ : شدة المجال المغناطيسى كدالة فى نصف القطر فى خط نقل محوري طوله لانتهائى بالأبعاد المبينة .

وكمثال أخير ، دعنا نعتبر لوحاً من تيار ماراً فى الاتجاه الموجب لـ y وموضوع فى المستوى $z = 0$. ويمكن أن نفكر فى التيار العائد على أنه مقسم بالتساوى بين لوحين بعيدين على كل من جانبي اللوح الذى نعتبره . ولوح ذو كثافة تيار سطحية منتظمة $K_y \hat{y}$ مبين فى شكل ٨-٩ . ولايمكن أن تتغير H مع x أو y . اذا قسم اللوح الى عدد من الفتائل ، فمن الواضح أن أى فتيلة لايمكنها أن تنتج مركبة H_y . بالإضافة الى ذلك ، يبين قانون بيو- سافار أن المساهمة فى H_z الناتجة من زوج من الفتائل متماثلة الوضع يلغى . على ذلك ، H_z صفر أيضاً ، وتوجد مركبة H_z فقط . ولذلك نختار المسار $1 - 2 - 2' - 1'$ المتكون من أجزاء مستقيمة المخط إما موازية أو متعامدة على H_z . ويعطى قانون أمبير الدائرى

$$H_{x1}L + H_{x2}(-L) = K_y L$$

$$H_{x1} - H_{x2} = K_y$$

أو

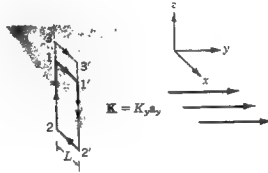
إذا اختير الآن المسار $3-2'-3$ ، فإن نفس التيار يكون محصوراً و

$$H_{x3} - H_{x2} = K_y$$

ولذلك

$$H_{x3} = H_{x1}$$

ويتبع أن H_x هي نفسها لكل قيم z الموجبة . بالمثل ، H_x هي نفسها لكل قيم z السالبة . بسبب التماثل ، فإن شدة المجال المغناطيسي على جانب اللوح التيار هو سالب تلك التي على الآخر .



شكل ٩-٨ لوح متظم من تيار سطحي $K = K_y \hat{y}$ في المستوى $z=0$. يمكن إيجاد H بتطبيق قانون أمبير الدائري حول المسارين $1-2'-2-1$ و $1'-2'-2'-1$. يمكن إيجاد H بتطبيق قانون أمبير

فوق اللوح ،

$$H_x = \frac{1}{2}K_y \quad (z > 0)$$

بينما تحته

$$H_x = -\frac{1}{2}K_y \quad (z < 0)$$

جاعلين a_N تكون وحدة متجه عمودي (للخارج) على لوح التيار ، يمكن كتابة النتيجة في صورة صحيحة لكل قيم z كمايلي

$$(11) \quad \boxed{H = \frac{1}{2}K \times a_N}$$

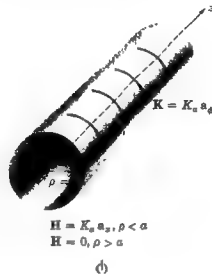
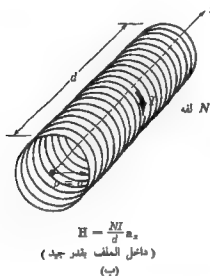
إذا وضع لوح ثان لتيار ماراً في الاتجاه المضاد $K = -K_y \hat{y}$ ، عند $z = h$ ، فإن (١١) تبين أن المجال في المنطقة بين لوحى التيار هو

$$(١٢) \quad H = K \times a_N \quad (0 < z < h)$$

ويكون صفرا في أى مكان آخر ،

$$(١٣) \quad H = 0 \quad (z < 0, \quad z > h)$$

وأكثر الأجزاء صعوبة في تطبيق قانون أمبير الدائرى هو تعيين مركبات المجال الموجودة . وأكثر الطرق الموثوق فيها هي التطبيق المنطقى لقانون بيو- سافار ومعرفة للمجالات المغناطيسية للأشكال البسيطة .



شكل ١٠ - أ : (أ) ملف لولبى مثالى ، ذو طول لانهاى مع كثرة تيار دائرى $K = K a_z$. (ب) ملف لولبى ذو N لفة وطول محدود d .

توجز مسألة (١٤) عند نهاية هذا الفصل الخطوات المتضمنة في تطبيق قانون أمبير الدائرى على ملف لانهاى الطول له نصف قطره a وكثافة تيار منتظمة $K a_z$ ، كما هو مبين في شكل ٨ - ١٠ . وللمراجعة ، النتيجة هي

$$(١٤) \quad H = K a_z \quad (\rho < a)$$

$$(١٤) \quad H = 0 \quad (\rho > a)$$

إذا كان للملف اللولبى طول محدود d ويتكون من N من اللفات المحكمة المتجاورة من فتيلة تحمل تيارا I ، عندئذ يعطى المجال عند نقط بداخل الملف بقدر جيد بدقة بـ

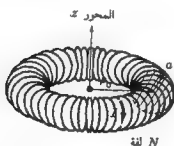
$$(١٥) \quad H = \frac{NI}{d} a_z \quad (\text{داخل الملف اللولبى بقدر جيد})$$

والتقريب مفيد إذا لم يطبق عند أقرب من ضعف نصف القطر الى الأطراف المفتوحة أو أقرب الى سطح الملف اللولبي من ضعف الفاصل بين اللفات .

وللملف الحلقي المبين فى شكل ٨- ١١ ، يمكن بيان أن شدة المجال المغناطيسى للحالة المثالية ، شكل ٨- ١١ ، هى

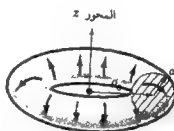
$$(١٦) \text{ داخل الملف الحلقي } H = K_0 \frac{\rho_0 - a}{\rho} a_\phi$$

$$(١٦) \text{ خارج } H = 0$$



$$H = \frac{NI}{2\pi\rho} a_\phi \text{ بقدر جيد}$$

(ب)



$$K = K_0 a_z \text{ at } \rho = \rho_0 - a, z = 0$$

$$H = K_0 \frac{\rho_0 - a}{\rho} a_\phi \text{ داخل الملف الحلقي}$$

$$H = 0 \text{ خارج}$$

(أ)

شكل ٨- ١١ : (أ) ملف حلقي مثالى يحمل تيارا سطحيا K فى الاتجاه المبين . (ب) ملف حلقي ذو N من اللفات يحمل تيارا I فثليا .

للملف الحلقي ذو N من اللفات فى شكل ٨- ١١ ب ، لدينا التقريبات الجيدة ،

$$(١٧) \text{ داخل الملف الحلقي } H = \frac{NI}{2\pi\rho} a_\phi$$

$$(١٧) \text{ خارج } H = 0$$

مادمتنا نعتبر نقطة مبعدة عن سطح الملف الحلقي بعدة مرات قدر الفاصل بين اللفات .
والملفات الحلقية ذات المقطع العرضى المربع يمكن معالجتها ايضا مباشرة فعلا ، كما تستطيع أن توى بنفسك بمحاولة المسألة رقم ١٢ .

والصغ الدقيقة للملفات اللولبية ، والملفات الحلقية ، والملفات ذات ١٤

أخرى يمكن الحصول عليها في قسم ٢ في :

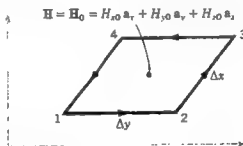
Standard Handbook for Electrical Engineers

(انظر المراجع المقترحة للفصل الخامس) .

ت ٨ - ٣ : عين H بمركبات متعامدة عند $P(0,0.008,0)$ في مجال : (أ) فتلنا تيار لانهايتان : 75mA على المحور z ، في اتجاه a_z و 75 mA عند $x=0, y=1.01$ في اتجاه a_z ، (ب) خط محوري : $a=2\text{mm}$ و $b=7\text{mm}$ و $C=9\text{mm}$ ، $I=0.7\text{A}$ ، (ج) لوحا تيار : $8a_z \text{ A/m}$ في المحور z ، اتجاه a_z في الموصل المركزي ، (د) ملف لولبي : محوره عند $y=3\text{mm}$ ، $-2\pi a_z \text{ A/m}$ عند $y=1\text{cm}$ ، (هـ) ملف حلقي : مركز عند نقطة الأصل ، محوره على المحور : $z=10\text{cm}$ ، $I=1\text{mA}$ ، $3,000$ ، $N=200$ ، $\rho_0=1\text{cm}$ ، $I=2\text{mA}$ ، $a=3\text{mm}$ ، في اتجاه a_z عند نصف القطر الخارجى .

الاجابة :

$-8.57a_z \text{ A/m}$ ، $7.14a_z \text{ A/m}$ ، $-7.40a_z \text{ A/m}$ ، $7.46a_z \text{ A/m}$ ، $-7.96a_z \text{ A/m}$.



شكل ٨ - ١٧ : مسار مغلق عصىرى فى الاحداثيات الكرتيزية مختار لتطبيق قانون امبير الدائرى لتعين معدل التغير الفراغى لـ H .

٨ - ٣ : التواء

أتممنا دراستنا لقانون جاوس بتطبيق هذا القانون على عنصر حجم تفاضلى واقتدنا الى مفهوم الانفراج . والآن نطبق قانون أمبير الدائرى على محيط عنصر سطح تفاضلى ، ونقابل ثالث وآخر المشتقات الخاصة بتحليل المتجهات ، والالتواء . وهدفنا الحالى هو أن نحصل على الصورة التقطيه لقانون أمبير الدائرى .

مرة أخرى سنختار الاحداثيات الكرتيزية ، ونختار مساراً مغلقاً عنصرياً جوانبه Δx و Δy (شكل ٨-١٢) . نفرض أن بعض التيار ، غير محدد إلى الآن ، ينتج قيمة إسناد لـ H عند مركز هذا المستطيل الصغير ،

$$H_0 = H_{x0} a_x + H_{y0} a_y + H_{z0} a_z$$

حيثذ يكون التكامل الخطى المغلق لـ H حول هذا المسار هو بالتقريب مجموع القيم الأربع لـ ΔL . H على كل جانب . نختار اتجاه الانتقال على أنه $1-2-3-4-1$ ، الذى يتوافق مع تيار فى اتجاه a_z ، ولذلك تكون المساحة الأولى هي

$$(H \cdot \Delta L)_{1-2} = H_{y,1-2} \Delta y$$

قيمة H_y على هذا القسم من المسار يمكن أن يعطى بدلالة قيمة المرجع H_{y0} عند مركز المستطيل ، معدل تغير H_y مع x ، والمسافة $\Delta x/2$ من المركز الى منتصف الجانب : $1-2$

$$H_{y,1-2} = H_{y0} + \frac{\partial H_y}{\partial x} (\frac{1}{2} \Delta x)$$

على ذلك

$$(H \cdot \Delta L)_{1-2} = \left(H_{y0} + \frac{1}{2} \frac{\partial H_y}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y$$

وعلى القسم التالى من المسار نحصل على

$$(H \cdot \Delta L)_{2-3} = H_{x,2-3} (-\Delta x) = - \left(H_{x0} + \frac{1}{2} \frac{\partial H_x}{\partial y} \Delta y \right) \Delta x$$

مستمرين للمجزيين الباقين وجمع النتائج ،

$$\oint H \cdot dL = \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y$$

من قانون أمبير الدائرى ، هذه النتيجة يجب أن تساوى التيار المحصور بالمسار ، أو التيار العابر لأى سطح محدود بالمسار . اذا فرضنا كثافة تيار عامة J ، يكون التيار المحصور عندئذ $\Delta I = J_z \Delta x \Delta y$ ، و

$$\oint H \cdot dL = \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y = J_z \Delta x \Delta y$$

أو

$$\frac{\oint H \cdot dL}{\Delta x \Delta y} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = J_z$$

كلما نجعل المسار المغلق ينكمش ، يصبح التعبير السابق أكثر قربا من الصحة ، وفي النهاية نحصل على التساوى

$$(١٨) \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta x \Delta y} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = J_z$$

بعد البدء بقانون أمبير الدائرى والذي يساوى بين التكامل الخطى المغلق لـ \mathbf{H} والتيار المحصور ، نكون قد توصلنا الآن لعلاقة تشمل التكامل الخطى المغلق لـ \mathbf{H} لكل وحدة مساحة محصورة ، والتيار لكل وحدة مساحة محصورة ، أو كثافة التيار ، ولقد أدبنا تحليلًا مماثلاً فى الانتقال من الصورة التكاملية لقانون جاوس ، المشتمل على تدفق خلال سطح مغلق ، وشحنة محصورة ، الى الصورة النقطية ، التى تربط التدفق خلال سطح مغلق لكل وحدة حجم محصورة ، والشحنة لكل وحدة حجم محصور ، أو كثافة الشحنة الحجمية . وفى كل حالة أخذ النهاية ضرورى لاعطاء تساوى .

إذا اخترنا مسارات مغلقة موجهة عموديا على كل من محورى الاحداثيات الباقين ، فإن اجراء مطابقا يؤدي الى تعبيرات لمركبات كثافة التيار فى اتجاهى y و z ،

$$(١٩) \lim_{\Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta y \Delta z} = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = J_x$$

$$(٢٠) \lim_{\Delta z, \Delta x \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta z \Delta x} = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = J_y$$

بمقارنة (١٨) ، (١٩) و (٢٠) ، نرى أن مركبة لكثافة التيار تعطى بنهاية قسمة التكامل الخطى المغلق لـ \mathbf{H} حول مسار صغير فى مستوى عمودى على تلك المركبة والمساحة المحصورة عندما ينكمش المسار الى الصفر . هذه النهاية لها مثيلها فى مجالات العلوم الأخرى وقد أعطيت منذ زمن بعيد الاسم التواء curl . والتواء أى متجه هو متجه ، وأى مركبة للتواء تعطى بنهاية قسمة التكامل الخطى المغلق للمتجه حول مسار صغير عمودى على تلك المركبة المرغوبة والمساحة المحصورة ، عندما ينكمش المسار الى الصفر . ويجب أن يلاحظ أن التعريف السابق للتواء لا يخص نظام احداثيات خاص بالتحديد . والصورة الرياضية للتعريف هى

$$(٢١) \quad (\text{curl } \mathbf{H})_n = \lim_{\Delta S_n \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{\Delta S_n}$$

حيث ΔS_n هى المساحة المستوية المحصورة بالتكامل الخطى المغلق ، و n تمثل أى مركبة فى أى نظام احداثيات . وهذا الرمز السفلى يبين أن مركبة الالتواء هى تلك المركبة العمودية على السطح المحصور بالمسار المغلق .

في الاحداثيات الكرتيزية يبين التعريف (٢١) أن المركبات في اتجاهات x , y , و z لالتواء H تعطى بـ (١٨) ، (١٩) و (٢٠) ، ولذلك

$$(٢٢) \quad \text{curl } H = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \mathbf{a}_x + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \mathbf{a}_y + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \mathbf{a}_z$$

هذه النتيجة يمكن أن تكتب في صورة محددة

$$(٢٣) \quad \text{curl } H = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}$$

ويمكن أيضا أن تكتب بدلالة العامل المتجه ،

$$(٢٤) \quad \text{curl } H = \nabla \times H$$

المعادلة (٢٢) هي النتيجة لتطبيق التعريف (٢١) على نظام الاحداثيات الكرتيزية . وحصلنا على المركبة في اتجاه z لهذا التعبير بتقدير ناتج قانون أمبير الدائري حول عنصر مسار جوانبه Δx و Δy ، وقد كان يمكننا الحصول على المركبتين الأخرتين بنفس السهولة باختيار المسارات المناسبة . معادلة (٢٣) هي طريقة بارعة لحفظ تعبير الاحداثيات الكرتيزية للالتواء ، الصورة متماثلة ويمكن تذكرها بسهولة . معادلة (٢٤) أكثر اختصاراً وتؤدي إلى (٢٢) فور تطبيق تعريف الضرب بعلامة ∇ والعامل الاتجاهي .

تعبيرات التواء H في الاحداثيات الاسطوانية والكروية مستنتجة في الملحق بتطبيق التعريف (٢١) . مع أنها يمكن أن تكتب في صورة محددة ، كما هو مشروح هناك ، فالمحددات ليس لها صف من وحدات متجهة في الصف العلوي وصف من المركبات في الصف السفلي ، ويمكن تذكرها بسهولة . ولهذا السبب ، عادة يرجع الى مفكوكات الالتواء في الاحداثيات الاسطوانية والكروية التي تظهر فيما يلي وداخل الغلاف في آخر الكتاب حيثما تقتضى الضرورة .

$$(٢٢) \quad \nabla \times H = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \mathbf{a}_x + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \mathbf{a}_y + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \mathbf{a}_z$$

$$(٧٥) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \text{إسطواني} \\ \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z} \right) \mathbf{a}_\rho + \left(\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right) \mathbf{a}_\phi + \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho H_\phi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_\rho}{\partial \phi} \right] \mathbf{a}_z$$

$$(٧٦) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial (H_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial H_\theta}{\partial \phi} \right] \mathbf{a}_r \\ + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial H_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (r H_\phi)}{\partial r} \right] \mathbf{a}_\theta \\ + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r H_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{a}_\phi \quad \text{كروي}$$

مع اننا قد وصفنا الالتواء كتكامل خطي لكل وحدة مساحة ، فان هذا لايمد كل واحد بصورة فيزيائية مرضية لطبيعة عملية الالتواء ، لأن التكامل الخطي المغلق نفسه يتطلب تفسيراً فيزيائياً . هذا التكامل قبل لأول مرة في المجال الكهروستاتيكي ، حيث رأينا أن $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$. نظراً لأن التكامل كان صفراً ، لم نمياً بالصورة الفيزيائية . قد ناقشنا أخيراً التكامل الخطي المغلق لـ \mathbf{H} ، $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I$. أي من هذين التكاملين الخطيين المغلقين معروف أيضاً باسم « دوران » ، وواضح أنه تعبير معار من مجال ديناميكا الموائع .

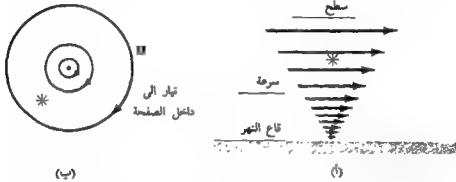
دوران \mathbf{H} ، أو $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}$ يحصل عليه بضرب مركبة \mathbf{H} الموازية للمسار المغلق المحدد عند كل نقطة على طوله في طول المسار التفاضلي وجمع النتائج عندما تقترب الأطوال التفاضلية من الصفر وعندما يصبح عددها لانهايا . ولاتطلب مساراً متناهي الصفر . ويخبرنا قانون أمبير الدائري أنه إذا كان لـ \mathbf{H} دوران حول مسار معطى ، فإن تياراً يمر خلال هذا المسار . في الكهروستاتيكية نرى أن دوران \mathbf{E} صفر حول كل مسار ، نتيجة مباشرة للحقيقة أن شغلاً صفرياً يتطلب لحمل شحنة حول مسار مغلق .

ويمكننا الآن أن نصف الالتواء كدوران لكل وحدة مساحة . المسار المغلق متناهي الصفر . والالتواء معرف عند نقطة . والالتواء \mathbf{E} يجب أن يكون صفراً ، لأن الدوران صفر . ولكن التواء \mathbf{H} ليس صفراً ، دوران \mathbf{H} لكل وحدة مساحة هي كثافة التيار من قانون أمبير الدائري [(١٨) ، (١٩) ، (٢٠)] .

يقترح Skilling^(١) استخدام عجلة تجديف صغيرة جداً « كمقياس للالتواء » وكميتا المتجهة ، عندئذ ، يجب أن يفكر فيها على أنها قادرة ، على التأثير بقوة على كل

(١) انظر بيانات المراجع عند نهاية هذا الفصل .

ريشة من عجلة التجديف ، والقوة تكون متناسبة مع مركبة المجال عموديا على سطح تلك الريشة . ولكي نختبر مجالاً للالتواء نفطس عجلة تجديفنا في المجال ، مع محور عجلة التجديف موجهة مع اتجاه مركبة الالتواء المرغوبة ، ونلاحظ تأثير المجال على العجلة . وعدم الدوران يعنى انعدام الالتواء ، وسرعات زاوية أعلى تعنى قيما أعلى للالتواء . وانعكاسا في اتجاه التدويم يعنى انعكاسا في اشارة الالتواء .



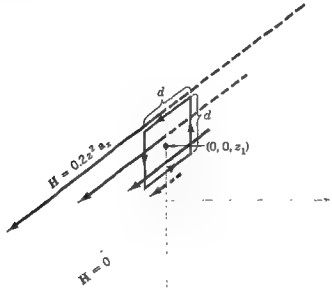
شكل ٨ - ١٣ : (أ) يبين مقياس الالتواء مركبة الالتواء لسرعة الماء الى داخل الصفحة . (ب) الالتواء لشدة المجال المغناطيسى حول فتحة لانهائية الطول مبينة .

لكي نجد اتجاه متجه الالتواء وليس مجرد تقرير وجود أى مركبة معينة ، فيجب أن نضع عجلة تجديفنا في المجال ونصيد الاتجاه الذى يتج أعلى عزم تدوير . عندئذ يكون اتجاه الالتواء على محور عجلة التجديف ، كما تعطيه قاعدة اليد اليمنى .

وكمثال ، اعتبر انسياب الماء في نهر . يبين شكل (٨-١٣) المقطع الطولى لنهر عريض مأخوذ عند منتصف النهر . سرعة الماء صفر عند القاع وتزيد خطيا كلما اقترب من السطح . وعجلة تجديف موضوعة في الوضع المبين ، مع محورها عمودى على الورقة ، ستدور في اتجاه عقرب الساعة ، مظهرة وجود مركبة للالتواء في اتجاه العمود الداخلى على سطح الصفحة . اذا لم تتغير سرعة الماء بينما تنتقل مع أوسع اتجاه المجرى وأيضا لا تظهر تغيرا عندما نذهب عبر النهر (أوحى اذا تناقصت بنفس الطريقة في اتجاه كلا الصفحتين) ، فان هذه المركبة هي المركبة الوحيدة الموجودة عند منتصف المجرى ، ويكون لالتواء سرعة الماء اتجاه الى داخل الصفحة .

في شكل (٨-١٣) خطوط انسياب شدة المجال المغناطيسى حول موصل فتيلى لانهائى الطول ، مبينة . ومقياس الالتواء الموضوع في هذا المجال ذى الخطوط المنحنية يبين أن عدداً أكبر من الريش لها قوة في اتجاه عقرب الساعة مؤثرة عليها ولكن هذه القوة عامة أصغر من القوة في عكس عقرب الساعة المؤثرة على العدد الأقل من الريش الأقرب

من السلك . ويبدو ممكنا أنه اذا كان انحنا خطوط الانسياب صحيحا ، وأيضا اذا كان تغير شدة المجال مضبوطا حقا ، فان صافي عزم التدوير على عجلة التجذيف يكون صفرا .



شكل ٨-١٤ مسار مربع ضلعه d ومركزه على المحور z عند $z > 0$ مستخدم لتقدير قيمة $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}$ وإيجاد $\text{curl } \mathbf{H}$.

بالفعل ، لا تدور عجلة التجذيف في هذه الحالة ، لأنه بما أن $\mathbf{H} = (I/2\pi\rho)\mathbf{a}_\phi$ يمكننا التعريف في (٢٥) ، حاصلين على

$$\text{curl } \mathbf{H} = -\frac{\partial H_\phi}{\partial z} \mathbf{a}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho H_\phi)}{\partial \rho} \mathbf{a}_z = 0$$

وكمثال على تقدير قيمة $\text{curl } \mathbf{H}$ من التعريف وتقدير قيمة تكامل خطي آخر ، دعنا نفترض أن $\mathbf{H} = 0.2z\mathbf{a}_z$ و $\mathbf{H} = 0$ في أي مكان آخر ، كما هو مبين في شكل ٨-١٤ . ولمسار مربع ضلعه d ، مركزه عند $(0, 0, z_1)$ في المستوى $y=0$ حيث $z_1 > \frac{1}{2}d$ نقدر قيمة التكامل الخطي $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}$ على طول الأجزاء الأربعة ، بادئين عند الأعلى :

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} &= 0.2(z_1 + \frac{1}{2}d)^2 d + 0 - 0.2(z_1 - \frac{1}{2}d)^2 d + 0 \\ &= 0.4z_1 d^2 \end{aligned}$$

في النهاية عندما تقترب المساحة من الصفر ، نجد

$$(\nabla \times \mathbf{H})_y = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}}{d^2} = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{0.4z_1 d^2}{d^2} = 0.4z_1$$

والمركبات الأخرى أصفار ، ولذلك $\nabla \times \mathbf{H} = 0.4z_1 \mathbf{a}_y$.

ولتعيين قيمة الالتواء بدون محاولة توضيح التعريف أو تعيين قيمة تكامل خطي ،
نأخذ ببساطة المشتقة الجزئية الميئة ب (٢٣) :

$$\nabla \times \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0.2z^2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial}{\partial z} (0.2z^2) \mathbf{a}_y = 0.4z \mathbf{a}_y$$

التي تتفق مع النتيجة السابقة عند $z = z_1$.

وبالرجوع الآن لتكامل فحوصنا الأصلي لتطبيق قانون أمبير الدائري على مسار
تفاضلي القدر، يمكن أن نضم (١٨) ، (١٩) ، (٢٠) ، (٢٢) ، (٢٤) ،

$$\begin{aligned} \text{(٢٧) } \text{curl } \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{H} &= \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \mathbf{a}_x + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \mathbf{a}_y \\ &+ \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \mathbf{a}_z = \mathbf{J} \end{aligned}$$

ونكتب الصورة النقطية لقانون أمبير الدائري ،

$$\text{(٢٨) } \boxed{\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}}$$

هذه هي ثاني معادلات ماكسويل الأربع ، كما تطبق على الحالات غير المتغيرة مع
الزمن . ويمكن أيضا أن نكتب الآن الثالثة من هذه المعادلات ، وهي الصورة النقطية
 $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$ ، أو

$$\text{(٢٩) } \boxed{\nabla \times \mathbf{E} = 0}$$

المعادلة الرابعة تظهر في قسم ٨ - ٥ .

ت ٨ - ٤ : (أ) احسب التكامل الخطي لـ $(x+2)^2 \mathbf{a}_z - 4 \sin 0.40\pi z \mathbf{a}_y$ حول
مسار مربع في المستوى $x = 1$ طول ضلعه 0.6 وحدة ، أحرفه موازية للمحاور
الاحداثية ، مركزه على $P(1, -3, 2)$. استخدم اتجاهها عكس عقرب الساعة ،
كما يرى من $x = \infty$. (ب) احسب قيمة التكامل الخطي السابق على المساحة
المحصورة بالمسار ، كتقريب لـ $(\nabla \times \mathbf{H})_z$. (ج) عين $(\nabla \times \mathbf{H})_z$ عند
 $P(1, -3, 2)$. (انظر أيضا المسألة رقم ٢١ عند نهاية هذا الفصل) .

الاجابة : 1.430 , 3.97 , 4.07 .

ت ٨ - ٥ : أوجد $\nabla \times H$ اذا كانت H تساوى :

$$(أ) \quad y^2 z a_x + 2(x+1) y z a_y - (x+1)^2 z a_z$$

$$(ب) \quad 2r \cos \theta a_r - 3r \sin \theta a_\theta - 2\rho \cos \phi a_\rho - 4\rho \sin \phi a_\phi + 3a_z$$

$$(ج) \quad -4\sin \theta a_\phi ; -6\sin \phi a_z ; -2(x+1)y a_x + (y^2 + z^2) a_y$$

٨ - ٤ : نظرية ستوكس :

مع أن القسم الأخير خصص أساسا لمناقشة عملية الالتواء ، فالمساهمة لموضوع المجالات المغناطيسية يجب ألا يهمل . من قانون أمبير الدائرى أستخلصنا احدى معادلات ماكسويل ، $\nabla \times H = J$. هذه المعادلة الأخيرة يجب أن تعتبر الصورة النقطية لقانون أمبير الدائرى وتطبق على أساس « لكل وحدة مساحة » . فى هذا القسم سنخصص مرة أخرى النصيب الأكبر من العادة للنظرية الرياضية المعروفة بنظرية ستوكس ، ولكن أثناء الإجراء سنبين أنه يمكننا الحصول على قانون أمبير الدائرى من $\nabla \times H = J$ وتعبير آخر ، نكون حيثئذ مهئين للحصول على الصورة التكاملية من الصورة النقطية أو للحصول على الصورة النقطية من الصورة التكاملية .

اعتبر السطح S بشكل ٨-١٥ المجزأ الى عناصر سطحية مساحتها ΔS . اذا طبقنا تعريف الالتواء على أحد هذه العناصر السطحية ، فحيثئذ

$$\frac{\oint H \cdot dL_{\Delta S}}{\Delta S} \doteq (\nabla \times H)_n$$

حيث يشير الرمز السفلى n مرة أخرى الى العمود على السطح تبعا لقاعدة اليد اليمنى . الرمز السفلى على $dL_{\Delta S}$ يشير الى أن المسار المغلق هو محيط عنصر مساحة ΔS . هذه النتيجة يمكن أيضا أن تكتب

$$\frac{\oint H \cdot dL_{\Delta S}}{\Delta S} \doteq (\nabla \times H) \cdot a_n$$

أو

$$\oint H \cdot dL_{\Delta S} \doteq (\nabla \times H) \cdot a_n \Delta S = (\nabla \times H) \cdot \Delta S$$

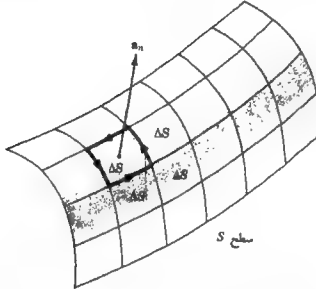
حيث a_n وحدة متجه فى اتجاه العمود على ΔS تبعا لقاعدة اليد اليمنى .

والآن دعنا نعين هذا الدوران لكل ΔS المكونة لـ S ونجميع النتائج . عندما نحسب التكامل الخطى المغلق لكل ΔS ، سيحدث بعض الالغاء لأن كل حائط داخلى

مغطى مرة في كل اتجاه . والحدود الوحيدة التي لا يمكن أن يحدث عليها الغاء تكون الحدود الخارجية ، المسار المحتوى على S . ولذلك نحصل على

$$(٣٠) \quad \oint H \cdot dL \equiv \int_S (\nabla \times H) \cdot dS$$

حيث dL مأخوذ فقط على محيط S .



شكل ٨-١٥ : مجموع الكمالات الخطية المغلقة حول محيط كل ΔS هو عيه كالتكامل الخطي المغلق حول محيط S بسبب الالغاء على كل مسار داخلي .

المعادلة (٣٠) هي متطابقة ، تنطبق على أى مجال متجه ، ومعروفة بنظرية ستوكس .

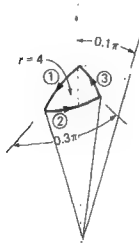
وقد يساعد مثال عددي على توضيح الهندسة المتضمنة في نظرية ستوكس . اعتبر الجزء من كرة المبين في شكل ٨-١٦ . والسطح يعين بـ $r = 4$ ، $0 \leq \theta \leq 0.1\pi$ ، $0 \leq \phi \leq 0.3\pi$ والمسار المغلق المكون لمحيطه يتكون من ثلاثة أقواس دائرية . والجزء الأول للمسار يوصف في الاحداثيات الكروية بـ $r = 4$ ، $0 \leq \theta \leq 0.1\pi$ ، $\phi = 0$ ، الثاني بـ $r = 4$ ، $\theta = 0.1\pi$ ، $0 \leq \phi \leq 0.3\pi$ ، والآخر بـ $r = 4$ ، $0 \leq \theta \leq 0.1\pi$ ، $\phi = 0.3\pi$. وأعطينا المجال : $H = 6r \sin \phi a_r + 18r \sin \theta \cos \phi a_\phi$ وسئلنا أن نوجد قيمة كل من طرفي نظرية ستوكس .

عنصر المسار التفاضلي dL هو المجموع الاتجاهي للأطوال التفاضلية الثلاثة لنظام الاحداثيات الكروية الذي قوبل لأول مرة في قسم ٩-١ ،

$$d\mathbf{L} = dr\mathbf{a}_r + r d\theta\mathbf{a}_\theta + r \sin \theta d\phi\mathbf{a}_\phi$$

الحد الأول صفر على أجزاء المسار الثلاثة لأن $r = 4$ و $dr = 0$ ، والثاني صفر على الجزء 2 لأن θ ثابتة ، والحد الثالث صفر على كلا الجزئين 1 و 3 . وعلى ذلك

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \int_1 H_\theta r d\theta + \int_2 H_\phi r \sin \theta d\phi + \int_3 H_\theta r d\theta$$



شكل ٨ - ١٦ جزء من خطاء كروي مستخدم كسطح ومسار مغلق لتبريح نظرية ستوكس .

لأن $H_\theta = 0$ ، نحصل على

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} &= \int_0^{0.3\pi} [18(4) \sin 0.1\pi \cos \phi] 4 \sin 0.1\pi d\phi \\ &= 288 \sin^2 0.1\pi \sin 0.3\pi = 22.2 \text{ A} \end{aligned}$$

ثم نشرع في عمل التكامل السطحي . أولاً ، نستخدم (٢٦) لنجد

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{1}{r \sin \theta} (36r \sin \theta \cos \theta \cos \phi) \mathbf{a}_r \\ &\quad + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} 6r \cos \phi - 36r \sin \theta \cos \phi \right) \mathbf{a}_\theta \end{aligned}$$

لأن $dS = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$ ، يكون التكامل

$$\begin{aligned}\int_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} &= \int_0^{0.3\pi} \int_0^{0.1\pi} (36 \cos \theta \cos \phi) 16 \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \int_0^{0.3\pi} 576 \left(\frac{1}{2} \sin^2 \theta \right) \Big|_0^{0.1\pi} \cos \phi d\phi \\ &= 288 \sin^2 0.1\pi \sin 0.3\pi = 22.2 \text{ A}\end{aligned}$$

عل ذلك ، تحقق النتائج نظرية ستوكس ، ونلاحظ أن تيارا قدره 22.2A يمر الى أعلى خلال هذا القسم من الفضاء الكروي .

بعد ذلك ، دعنا نرى كم هو سهل أن نحصل على قانون أمبير الدائري من $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$. ونضرب فقط أن نضرب بالنقطة كلا من الطرفين في $d\mathbf{S}$ ، وتكامل كل طرف على نفس السطح (المفتوح) S ، ونطبق نظرية ستوكس :

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}$$

تكامل كثافة التيار فوق السطح S هي التيار الكلي I المار خلال السطح ، ولذلك

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I$$

هذا الاستنتاج القصير يبين بوضوح أن التيار I ، موصوف على أنه « محصور بالمسار المغلق » ، هو أيضا التيار المار خلال أى من الاسطح اللانهائية العدد التى لها المسار المغلق كمحيط .

تربط نظرية ستوكس تكاملا سطحيا بتكامل خطى مغلق . ويجب أن نتذكر أن نظرية الانفراج تربط تكاملا حجميا بتكامل سطحى مغلق . وكلا النظريتين تجد أن أكبر استخدام لهما فى البراهين المتجهة العامة . وكمثال ، دعنا نجد تعبيراً آخر لـ $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A}$ ، حيث يمثل \mathbf{A} أى مجال متجه . النتيجة يجب أن تكون مقياسية (لماذا ؟) ، ويمكن أن ندع هذا المقياسى يكون T أو

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = T$$

بالضرب فى dV والتكامل خلال كل أى حجم V ،

$$\int_{\text{vol}} (\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A}) dV = \int_{\text{vol}} T dV$$

نطبق أولا نظرية الانفراج على الطرف الأيسر ، حاصلين على

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{vol} T dv$$

الطرف الأيسر هو التكامل السطحي لالتواء \mathbf{A} على السطح المغلق المحيط بالحجم v . تربط نظرية ستوكس التكامل السطحي لالتواء \mathbf{A} على سطح مفتوح محصور بمسار مغلق معطى . إذا فكرنا في المسار على أنه فتحة شنتطة غسيل ، والسطح المفتوح على أنه سطح الشنتطة نفسها ، نرى أنه بينما تقترب تدريجياً من سطح مغلق يجذب رباط الشنتطة ، يصبح المسار المغلق أصغر وأصغر ، ويختفى في النهاية عندما يصبح السطح مغلقاً . وعلى ذلك فإن تطبيق نظرية ستوكس على سطح مغلق يعطى نتيجة صفرية ، ونحصل على

$$\int_{vol} T dv = 0$$

ولأن هذا صحيح لأي حجم ، فإنه صحيح لحجم تفاضل dv .

$$T dv = 0$$

ولذلك

$$T = 0$$

أو

$$(٣١) \quad \boxed{\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} \equiv 0}$$

المعادلة (٣١) هي متطابقة مفيدة في حساب المتجهات^(١) . وطبعاً ، يمكن أيضاً أن تبرهن بسهولة بالفك المباشر في الاحداثيات الكرتيزية .

دعنا نطبق المتطابقة على المجال المغناطيسى غير المتغير مع الزمن الذى فيه

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

(١) هذه ومتطابقات متجهة أخرى مجدولة في الملحق (٣٠أ) .

ثم نين أن

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

الى هي نفس النتيجة الى حصلنا عليها من قبل في الفصل باستخدام مغادلة الاستمرارية .

قبل ادخال كميات عديدة جديدة للمجال المغناطيسى في القسم التالى ، يمكن أن نراجع ما حققناه حتى هذه النقطة . قبلنا في البداية قانون بيو- سافار كنتيجة تجريبية

$$\mathbf{H} = \int \frac{I d\mathbf{L} \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2}$$

وقبلنا مؤقنا قانون أمبير الدائرى ، وهن ببرهان يأتى بعد ،

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I$$

ومن قانون أمبير الدائرى أدى تعريف الالتواء الى الصورة النقطية لهذا القانون نفسه ،

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

نرى الآن أن نظرية ستوكس تمكنا من أن نحصل على الصورة التكاملية لقانون أمبير الدائرى من الصورة النقطية .

٨ - ٦ : بالعمل فى الاحداثيات الأسطوانية مع المجال $A = 2\rho^2 (z + I)\sin^2\phi a_\phi$ احسب كلا من طرقي نظرية ستوكس للجزء من السطح الأسطوانى المعروف بـ $z = 2$, $\phi = \pi/2$, $\phi = \pi/4$, $1 < z < 1.5$ ، ولحيطة .

الإجابة : -5.14 ، -5.14 (لأن $dS = + dS_a$)

٨ - ٥ : التدفق المغناطيسى وكثافة التدفق المغناطيسى

فى فضاء حر ، دعنا نعرف كثافة التدفق المغناطيسى \mathbf{B} بـ

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad (\text{فضاء حر فقط}) \quad (٣٢)$$

حيث \mathbf{B} مقاسة بالوير لكل متر مربع (Wb/m^2) أو بوحدة أحدث قررت فى النظام الدولى للوحدات ، تسلا (T) . ووحدة أقدم تستخدم كثيرا لكثافة التدفق المغناطيسى هى الجاوس (G) حيث 1 Wb/m^2 هى مثل $10,000 \text{ G}$. والثابت μ_0 ليس عديم الأبعاد وله القيمة المعروفة للفضاء الحر ، بالمهنرى لكل متر (H/m)

$$(٣٣) \quad \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$$

والاسم المعطى لـ μ_0 هو انفاذية الفضاء الحر .

يجب أن نلاحظ أنه لأن H مقاسة بالأمبير لكل متر ، فإن الوير يساوى من حيث الوحدة حاصل ضرب الهنرى والأمبير . وباعتبار الهنرى كوحدة جديدة ، يكون الوير مجرد اختصار مناسب لحاصل ضرب الهنرى والأمبير . وعندما تقدم المجالات المتغيرة مع الزمن ، سيبين أن الوير يكافئ أيضا حاصل ضرب الفولت والثانية .

متجه كثافة المجال المغناطيسى B . كما يوحى الاسم ، هو عضو فى عائلة كثافة التدفق للمجالات المتجهة . أحد التناظرات الممكنة بين المجالات الكهربية والمغناطيسية^(١) يقارن قانونى بيو-سافار وكولوم ، منشأً بذلك تناظرا بين E و H . عندئذ تؤدى العلاقات $B = \mu_0 H$ و $D = \epsilon_0 E$ الى تناظر بين B و D . اذا قيست B بالوير لكل متر مربع ، فإن التدفق المغناطيسى يجب أن يقاس بالوير . دعنا نمثل التدفق المغناطيسى بـ Φ ونعرف ϕ على أنها التدفق المار خلال أى مساحة معينة ،

$$(٣٤) \quad \Phi = \int_S B \cdot dS \quad \text{Wb}$$

وتناظرنا يجب أن يذكرنا الآن بالتدفق الكهبرى Ψ ، المقاس بالكولوم ، وقانون جاوس ، الذى ينص على أن التدفق الكلى المار خلال أى سطح مغلق يساوى الشحنة المحصورة ،

$$\Psi = \oint_S D \cdot dS = Q$$

الشحنة Q هى مصدر خطوط التدفق الكهبرى وهذه الخطوط تبدأ وتنتهى على شحنة موجبة وصالبة ، بالترتيب .

لم يكشف مصدر مثل هذا أبداً لخطوط التدفق المغناطيسى . فى مثال الفتيلة المستقيمة لانهائية الطول الحاملة لتيار مستمر I ، كون المجال H دوائر متحدة المركز حول الفتيلة . لأن $B = \mu_0 H$ ، فإن المجال B له نفس الشكل . خطوط التدفق المغناطيسى مغلفة ولا تنتهى على «شحنة مغناطيسية» . ولهذا السبب فقانون جاوس للمجال المغناطيسى هو

$$(٣٥) \quad \oint_S B \cdot dS = 0$$

(١) تناظر يديل مقدم فى قسم ١٠-٢ .

وبين تطبيق نظرية الانفراج أن

$$(36) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

اننا لم نبرهن (35) أو (36) ولكن فقط افترضنا صحة هذه التعبيرات باعتبار المجال الوحيد لفتيلا لانهاية . من الممكن أن نبين أن (35) و (36) تتبع من قانون بيو- سافار وتعريف $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ ، ولكن هذا برهان آخر سنؤجله الى قسم ٧ - ٨ .

معادلة (36) هي الأخيرة من معادلات ماكسويل الأربع كما تنطبق على المجالات الكهربية الاستاتيكية والمجالات المغناطيسية الثابتة .

ويتجميع هذه المعادلات ، يكون لدينا عندئذ للمجالات الكهربية الاستاتيكية والمجالات المغناطيسية الثابتة

$$(37) \quad \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \\ \nabla \times \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{array}$$

يمكننا أن نضيف الى هذه المعادلات التعبيرين اللذين يربطان \mathbf{D} و \mathbf{E} و \mathbf{B} و \mathbf{H} في فضاء حر ،

$$(38) \quad \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$$

$$(39) \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$$

ووجدنا من المفيد أن نعرف بهذا كهروستاتيكا ،

$$(40) \quad \mathbf{E} = -\nabla V$$

وستناقش بهذا للمجال المغناطيسي الثابت في القسم التالي . بالاضافة ، قد مددنا تغطيتنا للمجالات الكهربية لتشمل المواد الموصلة والعوازل ، وقد قدمنا الاستقطاب \mathbf{P} . وستطبق معالجة مماثلة على المجالات المغناطيسية في الفصل القادم .

بالرجوع الى (37) ، يمكن أن يلاحظ أن هذه المعادلات الأربعة تحدد الانفراج والانتواء لمجال كهربي ومغناطيسي . ومجموعة المعادلات التكاملية الأربع المناظرة التي تطبق على المجالات الكهربية الاستاتيكية والمجالات المغناطيسية الثابتة هي

$$\begin{aligned}
 \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} &= Q = \int_{\text{vol}} \rho \, dv \\
 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} &= 0 \\
 \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} &= I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \\
 \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} &= 0
 \end{aligned}
 \quad (٤١)$$

وقد كان يمكن لدراستنا للمجالات الكهربية والمغناطيسية أن تكون اسهل بكثير إذا أمكننا فرض أى من مجموعتى المعادلات ، (٣٧) أو (٤١) . ومعرفة جيدة بتحليل المتجهات ، كالتى يجب ان تكون لدينا الآن ، فإى من المجموعتين يمكن أن يحصل عليها بسهولة من الأخرى بتطبيق نظرية الانفراج أو نظرية ستوكس . والقوانين التجريبية المختلفة كان يمكن الحصول عليها بسهولة من هذه المعادلات .

كمثال على استخدام التدفق وكثافة التدفق فى المجالات المغناطيسية ، دعنا نجد التدفق بين الموصلين فى الخط المحورى بشكل ٨ - ٧ . وجد أن شدة المجال المغناطيسى هو

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho} \quad (a < \rho < b)$$

ولذلك

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\phi$$

والتدفق المغناطيسى المحتوى بين الموصلين فى طول d هو التدفق العابر لأى مستوى نصف قطرى من $\rho = a$ الى $\rho = b$ ومن ، مثلاً ، $z = 0$ الى $z = d$

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^d \int_a^b \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\phi \cdot d\rho \, dz \mathbf{a}_\phi$$

أو

$$(٤٢) \quad \Phi = \frac{\mu_0 I d}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

هذا التعبير سيستخدم فيما بعد للحصول على معائة خط نقل محورى .

ت ٨ - ٧ : خط نقل محورى للقدرة العالية يعمل بماء تبريد مار خلال موصل داخل أجوف

وخارج الموصل الخارجى . افرض أن نصفى قطرى الموصل الداخلى هما 5mm و 7mm بينما الموصل الخارجى له نصف قطرین 19mm و 20mm . وكل موصل يحمل تيار كلما منتظم التوزيع مقداره 2,000A dc . يعد إيجاد H و B داخل كل موصل وبين الموصلين ، عين التدفق المغناطيسى الكلى فى طول 1m من : (أ) الموصل الداخلى ، (ب) الفراغ بين الموصلين ، (ج) الموصل الخارجى .
الإجابة : $59.8\mu Wb$, $399\mu Wb$, $10.43\mu Wb$.

٨-٦ : الجهود المغناطيسية المقياسية والمتجهة

يسهل حل مسائل المجال الكهروستاتيكي بقدر كبير باستخدام الجهد الكهروستاتيكي المقياسى V . ومع أن هذا الجهد له معنى فيزيائى حقيقى جدا لنا ، فهو رياضيا ليس أكثر من حجر صعود يسمح لنا أن نحل مسألة بخطوات عديدة أقل . إذا أعطينا تشكيل شحنة ، يمكننا أولا أن نوجد الجهد ثم منها شدة المجال الكهري .

ويجب أن نسأل ما اذا كانت مثل هذه المساعدة متاحة فى المجالات المغناطيسية أم لا . هل نستطيع تعريف دالة جهد التى يمكن أن توجد من توزيع التيار ومنها يمكن تعيين المجالات المغناطيسية بسهولة ، هل يمكن تعريف جهد مغناطيسى مقياسى مشابه للجهد الكهروستاتيكي المقياسى ؟ سنبين فى الصفحات القليلة القادمة أن الإجابة على السؤال الأول هى « نعم » ، ولكن الثانى يجب أن يجاب عنه بـ « أحيانا » . دعنا نواجه السؤال الأخير أولا بفرض وجود جهد مغناطيسى مقياسى ، الذى نرمز له بـ V_m ، الذى سالب تدرجه يعطى شدة المجال المغناطيسى

$$\mathbf{H} = -\nabla V_m$$

اختيار سالب التدرج سيمدنا بتناظر اقرب للجهد الكهري وللمسائل التى قُمنّا من قبل بحلها .

هذا التعريف يجب ألا يتعارض مع نتائجنا السابقة للمجال المغناطيسى ، ولذلك

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} = \nabla \times (-\nabla V_m)$$

على أن التواء التدرج لأى مقياسى تطابق الصفر ، وهذه متطابقة متجه وبرهانها متروك للحظة فراغ . ولذلك نرى أن اذا كانت H تعرف كتدرج جهد مغناطيسى مقياسى ، فان كثافة التيار يجب أن تكون صفرا فى كل أنحاء المنطقة الذى يعرف فيها الجهد المغناطيسى المقياسى . يكون لدينا عندئذ

$$(٤٣) \quad \boxed{H = -\nabla V_m \quad (J = 0)}$$

لأن كثيرا من مسائل المغناطيسية تشتمل على أشكال هندسية يشغل فيها الموصل الحامل للتيار نسبة صغيرة نسبيا من المنطقة كلها موضع الاهتمام ، فانه واضح أن جهدا مغناطيسيا مقياسيا يمكن أن يكون مفيدا . الجهد المغناطيسي المقياسي يمكن تطبيقه أيضا في حالة المغناطيسيات الدائمة . ووحدة V_m هي بوضوح الأمبير .

هذا الجهد المقياسي يحقق أيضا معادلة لابلاس . في فضاء حر ،

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{H} = 0$$

وعلى ذلك

$$\mu_0 \nabla \cdot (-\nabla V_m) = 0$$

أو

$$(٤٤) \quad \boxed{\nabla^2 V_m = 0 \quad (J = 0)}$$

سنرى فيما بعد أن V_m يستمر في أن يحقق معادلة لابلاس في المواد المغناطيسية المتجانسة ، وهو لا يعرف في أى منطقة توجد فيها كثافة تيار .

مع أننا سنعتبر الجهد المغناطيسي المقياسي على نطاق أكثر اتساعا في الفصل التالي ، عندما نقدم المواد المغناطيسية ونناقش الدائرة المغناطيسية ، فان فرقا واحدا بين V_m و V يجب الآن أن نشير اليه : V_m ليست دالة وحيدة القيمة للموضع . الجهد الكهربائي V وحيدة - القيمة ، بمجرد تحديد مرجع صفري ، فان هناك قيمة واحدة فقط V مرتبطة مع كل نقطة في الفراغ . وليست هذه هي الحالة مع V_m . اعتبر المقطع العرضي للخط المحوري المبين في شكل ٨ - ١٧ . في الحيز $a < \rho < b$ ، $J = 0$ ، ويمكن أن نوجد جهدا مغناطيسيا مقياسيا . قيمة H هي

$$H = \frac{I}{2\pi\rho} a_\phi$$

حيث I التيار الكلي المار في الاتجاه a_z في الموصل الداخل . بتطبيق (٤٣) ،

$$\frac{I}{2\pi\rho} = -\nabla V_m|_\phi = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial V_m}{\partial \phi}$$

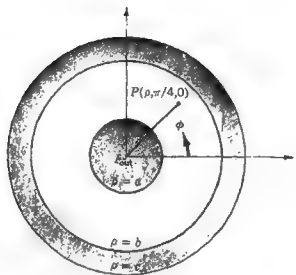
أو

$$\frac{\partial V_m}{\partial \phi} = -\frac{I}{2\pi}$$

على ذلك

$$V_m = -\frac{I}{2\pi} \phi$$

حيث قد وضع ثابت التكامل ، يساوى صفرا .



شكل ٨-١٧ الجهد المغناطيسى المقياس V_m دالة متعددة القيمة في ϕ في المنطقة $a < \rho < b$ الجهد الكهروستاتيكي دائما وحيد - القيمة .

أى قيمة للجهد ترتفق بالنقطة P ، حيث $\phi = \pi/4$ ؟ إذا جملنا V_m صفرا عند $\phi = 0$ ونتقدم في اتجاه عكس عقرب الساعة حول الدائرة ، فيصبح الجهد المغناطيسى سالبا خطيا . عندما نكون قد عملنا دورة ، يكون الجهد $-I$ ، ولكن تلك كانت النقطة التي عندها قلنا ان الجهد كان صفرا منذ لحظة . اذن عند P ، $\phi = \pi/4, 9\pi/4, 17\pi/4, \dots$ أو $\phi = 7\pi/4, 15\pi/4, 23\pi/4, \dots$ أو

$$V_{mP} = \frac{I}{2\pi} (2n - \frac{1}{4})\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

أو

$$V_{mP} = I(n - \frac{1}{8}) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

السبب لهذا التعدد في القيمة يمكن أن يُبين بمقارنة مع الحالة الكهروستاتيكية .

هناك ، نعرف أن

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$$

ولذلك فالتكامل الخطي

$$V_{ab} = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

لا يعتمد على المسار . ولكن في الحالة المغناطيسية الاستاتيكية ،

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0 \quad (J=0 \text{ حيثما})$$

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I \quad \text{ولكن}$$

حتى إذا كان I صفرا على طول مسار التكامل . كل مرة نعمل دورة كاملة أخرى حول التيار ، تزيد نتيجة التكامل بـ I . إذا لم يحتو تيار I بالمسار ، حينئذ يمكن أن يعرف دالة جهد وحيدة - القيمة . على أنها عامة ،

$$(45) \quad V_{m,ab} = - \int_a^b \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} \quad (\text{specified path})$$

حيث يجب أن يختار مسار محدد ، أو مسار ذو نمط معين . يجب أن نتذكر أن الجهد الكهروستاتيكي V مجال محافظ ، الجهد المغناطيسي المقياسي V_m ليس مجالاً محافظاً . في مسألة الخط المحوري دعنا نقيم حاجزاً⁽¹⁾ عند $\phi = \pi$ ، ونتمنق الاختار مساراً يعبر هذا المستوى . لذلك لا نستطيع الالتفاف حول I ، وجهد وحيد القيمة يكون ممكناً . ويظهر أن النتيجة هي

$$V_m = - \frac{I}{2\pi} \phi \quad (-\pi < \phi < \pi)$$

و

$$V_{mp} = - \frac{I}{8} \quad (\phi = \pi/4)$$

الجهد المغناطيسي المقياسي هو بوضوح الكمية التي تكون أسطحها متساوية - الجهد مربعات منحنية الخطوط مع خطوط انسياب \mathbf{H} في شكل ٨ - ٤ . وهذا وجه آخر من أوجه التناظر بين المجالات الكهربائية والمغناطيسية الذي سنفرض بالحديث عنه في الفصل التالي .

(١) هذا يقابل التعبير الرياضي الأكثر دقة قطع فرع "branch cut"

دعنا نترك مؤقتاً الجهد المغناطيسى المقياسى الآن ونفحص جهداً مغناطيسياً متجهاً . هذا المجال المتجه هو واحد مفيد للغاية فى دراسة الاشعاع من الهوائيات ، من الفتحات ، واشعاع التسرب من خطوط النقل ، أدلة الموجات ، وأفران الموجات الدقيقة . يمكن أن يستخدم الجهد المغناطيسى المتجه فى مناطق حيث تكون كثافة التيار صفراً أو غير صفراً ، وسنكون أيضاً قادرين على أن نمدها لحالة التغير الزمنى فيها بعد .

واختيارنا للجهد المغناطيسى المتجه يبين بملاحظة أن

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

بعد ذلك ، تبين مطابقة متجهة اثبتها فى قسم ٨-٤ أن انفراج الالتواء لى مجال متجه يساوى صفراً . ولذلك نختار

$$(٤٦) \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

حيث تعنى \mathbf{A} جهداً مغناطيسياً متجهاً ، وتحقق آلبا الشرط أن كثافة التدفق المغناطيسى سيكون لها إنفراج صفرى . المجال \mathbf{H} هو

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{A}$$

و

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}$$

التواء الالتواء لمجال متجه لايساوى صفراً وتعطى بتعبير معقد الى حد ما^(١) ، الذى لانتحتاج ان نعرفه الآن فى صورة عامة . فى حالات معينة معروف لها صورة \mathbf{A} ، يمكن أن تطبق عملية الالتواء مرتين لتعيين كثافة التيار .

المعادلة (٤٦) نخدم كتعريف مفيد للجهد المغناطيسى المتجه \mathbf{A} . لأن عملية الالتواء تحرى تفاضلاً بالنسبة لطول ، فإن وحدات \mathbf{A} هى وبر لكل متر .

الى الان رأينا فقط أن تعريف \mathbf{A} لايتعارض مع أى نتائج سابقة . لايزال يبقى أن نبين أن هذا التعريف بالذات يمكن أن يساعدنا لتعيين مجالات مغناطيسية بسهولة أكثر . وبالتأكيد لانستطيع أن نمثل \mathbf{A} بأى كمية تقاس بسهولة أو تجربة صنعت تاريخاً .

(١) $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ فى الإحداثيات الكرتية ، يمكن بيان أن :

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla^2 A_x \mathbf{e}_x + \nabla^2 A_y \mathbf{e}_y + \nabla^2 A_z \mathbf{e}_z$$

سنيين في القسم التالي أنه ، اذا أعطينا قانون بيو- سافار ، تعريف B ، وتعريف A ، فإن A يمكن أن تعين من عنصر التيار التفاضلي بواسطة

$$(٤٧) \quad A = \int \frac{\mu_0 I dL}{4\pi R}$$

معنى الحدود في (٤٧) هي نفسها مثل التي في قانون بيو- سافار ، تيار مستمر I يسرى في موصل فتييل فيه أى طول تفاضل dL على بعد R من النقطة التي ستوجد عندها A . لأننا قد عرفنا A فقط خلال تعيين التوائها ، فانه من الممكن أن نضيف تدرج أى مجال مقياسى إلى (٤٧) بدون تغيير B أو H ، لأن التواء التدرج تطابق الصفر . في المجالات المغناطيسية الثابتة ، عادة نجعل هذا الحد الممكن اضافته يساوى صفرا .

والحقيقة أن A هو جهد مغناطيسى متجه تكون أكثر وضوحا عندما تقارن (٤٧) مع التعبير المشابه للجهد الكهروستاتيكي ،

$$V = \int \frac{\rho_L dL}{4\pi\epsilon_0 R}$$

كلا التعبيرين هو التكامل على خط منبع ، في احدى الحالتين خط شحنة وفي الحالة الاخرى خط تيار ، وكلا المكاملين يتناسب عكسيا مع المسافة من المنبع الى نقطة الاهتمام ، وكلا يتضمن خاصية للوسط (هنا فضاء حر) ، الانفاذية أو السماحية .

يمكن كتابة المعادلة (٤٧) في الصورة التفاضلية ،

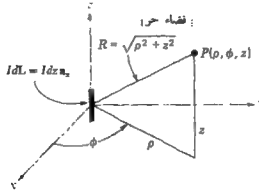
$$(٤٨) \quad dA = \frac{\mu_0 I dL}{4\pi R}$$

لو اتفقنا مرة أخرى ألا ننسب أى معنى فيزيائى لأى مجالات مغناطيسية نحصل عليها من (٤٨) إلى أن يعتبر كل المسار المغلق الذى يمر فيه التيار .

ومع هذا التحفظ ، دعنا نواصل ونعتبر مجال الجهد المغناطيسى المتجه حول فتييلة تفاضلية . نضع الفتييلة عند نقطة الأصل في فضاء حر ، كما هو مبين في شكل ٨- ١٨ ، ونسمح لها أن تمتد في الاتجاه الموجب لـ z بحيث $dL = dz a_z$. نستخدم الاحداثيات الاسطوانية لنوجد dA عند النقطة (ρ, ϕ, z) .

$$dA = \frac{\mu_0 I dz a_z}{4\pi \sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I dz \mathbf{n}_z}{4\pi\sqrt{\rho^2 + z^2}} \quad \text{at } P(\rho, \phi, z)$$



شكل ١٨ - A عنصر التيار التفاضل $Idz\mathbf{n}_z$ عند نقطة الأصل ينشئ مجال الجهد المغناطيسى المتجه ،

$$(٤٩) \quad dA_z = \frac{\mu_0 I dz}{4\pi\sqrt{\rho^2 + z^2}} \quad dA_\phi = 0 \quad dA_\rho = 0 \quad \text{أو}$$

نلاحظ أولاً اتجاه $d\mathbf{A}$ هو نفسه مثل ذلك لـ IdL . كل قسم صغير من موصل حامل للتيار ينتج اسهاماً للجهد المغناطيسى المتجه الكلى الذى له نفس اتجاه التيار المار فى الموصل . يتغير مقدار الجهد المغناطيسى المتجه عكسياً مع المسافة لعنصر التيار ، يكون أقوى ما يمكن بجانب التيار ويتناقص تدريجياً الى الصفر عند النقط البعيدة . يصف Skilling^(١) مجال الجهد المغناطيسى المتجه كـ «مثل توزيع التيار ولكن مشوش حول الأحرف ، أو مثل صورة للتيار غير محركة» .

ولكى نوجد شدة المجال المغناطيسى ، يجب أن نأخذ التواء (٤٩) فى الاحداثيات الاسطوانية ، مؤدية الى

$$d\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times d\mathbf{A} = \frac{1}{\mu_0} \left(-\frac{\partial dA_z}{\partial \rho} \right) \mathbf{a}_\phi$$

أو

$$d\mathbf{H} = \frac{I dz}{4\pi} \frac{\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{a}_\phi$$

التي يظهر بسهولة أنها نفس القيمة المعطاة بقانون بيو- سافار .

(١) انظر بيان المراجع عند نهاية هذا الفصل .

يمكن أيضا الحصول على تعبيرات للجهد المغناطيسي المتجه A لمجيع تيار موزع .
بالنسبة للوح تيار K ، يصبح عنصر التيار التفاضلي

$$I dL = K dS$$

في حالة مرور تيار في كل أنحاء حجم بكثافة J ، يكون لدينا

$$I dL = J dv$$

في كلا هذين التعبيرين قد أعطى التيار الصفة المتجهة للعنصر الفتيل . من المعتاد ، مع أنه غير ضروري ، أن نستخدم IdL بدلا من IdL . لأن مقدار التيار الفتيل ثابت ، فقد اخترنا الصورة التي تسمح لنا أن نخرج كمية من التكامل . والتعابير البديلة لـ A هي
لذلك

$$(٥٠) \quad A = \int_S \frac{\mu_0 K dS}{4\pi R}$$

$$(٥١) \quad A = \int_{vol} \frac{\mu_0 J dv}{4\pi R} \quad \text{و}$$

تعبير المعادلات (٤٧) ، (٥٠) ، و (٥١) عن الجهد المغناطيسي المتجه كتكامل على كل منابعه . من مقارنة صور هذه التكاملات بتلك التي تعطى الجهد الكهروستاتيكي ، من الواضح مرة أخرى أن المرجع الصفري لـ A عند مالانهاية ، لأنه لا يمكن لعنصر تيار محدود أن يولد أى مساهمة عندما $R \rightarrow \infty$. يجب أن نذكر أننا استخدمنا نادرا جدا التعابير المماثلة لـ V ، فكثيرا جدا اشتملت مسائلنا النظرية على توزيعات شحنة امتدت الى مالانهاية ، والنتيجة يجب أن تكون جهدا لانهايا في كل مكان . في الحقيقة ، حسبنا مجالات جهد قليلة جدا الى أن حصل على الصورة التفاضلية لمعادلة الجهد $\nabla^2 V = -\rho/c$ ، أو الأفضل ، $\nabla^2 V = 0$. وحيتث كانت لنا حرية اختيار مرجعنا الصفري الخاص .

التعابير المناظرة لـ A ستمتج في القسم التالي ، وسيكمل مثال لحساب مجال الجهد المغناطيسي المتجه .

تـ ٨ - ٨ : الملف الحلقي لشكل (٨ - ١١) معرف بـ $a = 3 \text{ cm}$ ، $\rho_0 = 10 \text{ cm}$ و $K_a = 140 \text{ A/m}$. أوجد الجهد المغناطيسي المقياسي عند :
 $\phi = 2.2\pi$ ، $z = 1.5 \text{ cm}$ ، إذا كان :

(أ) $V_m = 0$ عند $\phi = 0$ منشأ حاجز عند $\phi = \pi$ ، (ب) $V_m = 0$ عند $\phi = -\pi/2$ وموضوع حاجز عند $\phi = \pi$ ، (ج) $V_m = 0$ عند $\phi = 0$ وموضوع حاجز عند $\phi = 0.1\pi$.

الاجابة : $6.16A$ ، $21.6A$ ، $55.4A$.

ت ٨-٩ : قيمة A في موصل مصمت غير مغناطيسي نصف قطره a يحمل تيارا كليا I في اتجاه \hat{z} يمكن أن توجد بسهولة . باستخدام القيمة المعروفة لـ H أو B لـ $a < \rho$ ، فإن (٩) يمكن أن نحل في A . اختر $A = (\mu_0 I \ln 5)/2\pi$ عند $\rho = a$ (لتقابل مثالا في القسم التالي) وأوجد A عند : (أ) $P = 0$ ، (ب) $\rho = 0.4a$ ، (ج) $\rho = 0.9a$.

الاجابة : $0.422Ia_z \mu Wb/m$; $0.406Ia_z \mu Wb/m$; $0.341Ia_z \mu Wb/m$.

٨-٧ : استنباط قوانين المجال المغناطيسي الثابت

سنستغل الآن وعدنا بأن نعطي البراهين الموعودة للعلاقات العديدة بين كميات المجال المغناطيسي . كل هذه العلاقات يمكن أن يحصل عليها من تعاريف H ،

$$(٣) \quad \mathbf{H} = \oint \frac{I d\mathbf{L} \times \mathbf{R}}{4\pi R^2}$$

$$(٣٢) \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$$

لـ \mathbf{B}

$$(٤٦) \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

ولـ \mathbf{A} ،

دعنا أولا نفرض أنه يمكننا التعبير عن \mathbf{A} بـ

$$(٥١) \quad \mathbf{A} = \int_{vol} \frac{\mu_0 \mathbf{J} dv}{4\pi R}$$

ثم نبين صحة (٥١) ببيان أن (٣) تتبع منها . أولا يجب أن نضيف رموزا سفلية لتبين النقطة (x_1, y_1, z_1) التي يقع عندها عنصر التيار والنقطة (x_2, y_2, z_2) التي تعطي عندها \mathbf{A} . عندئذ يكتب عنصر الحجم التفاضل dv أنه dv_1 وفي الاحداثيات الكرتيزية يجب أن يكون $dx_1 dy_1 dz_1$. ومتغيرات التكامل هي x_1, y_1, z_1 . عندئذ ، باستخدام هذه الرموز السفلية ،

$$(٥٧) \quad A_2 = \int_{\text{vol}} \frac{\mu_0 J_1 d\ell_1}{4\pi R_{12}}$$

من (٣٢) و (٤٦) نحصل على

$$(٥٨) \quad H = \frac{B}{\mu_0} = \frac{\nabla \times A}{\mu_0}$$

لكي نبين أن (٣) تتبع من (٥٧) ، فمن الضروري أن نعوض (٥٧) في (٥٨) . هذه الخطوة تشتمل على أخذ التواء A_2 ، كمية معبر عنها بدلالة المتغيرات x_2 ، y_2 و z_2 ، ولذلك يشتمل الالتواء على مشتقات جزئية بالنسبة لـ x_2 ، y_2 و z_2 . نعمل هذا ، واضعين رمزا سفليا على عامل الدل ليذكرنا بالمتغيرات المشتملة في عملية التفاضل الجزئي ،

$$H_2 = \frac{\nabla_2 \times A_2}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} \nabla_2 \times \int_{\text{vol}} \frac{\mu_0 J_1 dv_1}{4\pi R_{12}}$$

وترتيب التفاضل الجزئي والتكامل غير هام ، و $\mu_0/4\pi$ ثابت ، سامحنا أن نكتب

$$H_2 = \frac{1}{4\pi} \int_{\text{vol}} \nabla_2 \times \frac{J_1 dv_1}{R_{12}}$$

تمثل عملية الالتواء داخل المكامل التفاضل الجزئي بالنسبة لـ x_2 ، y_2 و z_2 . عنصر الحكم التفاضلي dv_1 مقياسي ودالة في x_1 ، y_1 و z_1 فقط . بناء على ذلك ، يمكن أن تخرج كعامل من عملية الالتواء كأي ثابت اخر ، تاركة

$$(٥٩) \quad H_2 = \frac{1}{4\pi} \int_{\text{vol}} \left(\nabla_2 \times \frac{J_1}{R_{12}} \right) dv_1$$

التواء حاصل ضرب مقياس ومتجه تعطى بمطابقة يمكن أن تختبر بالفك في الاحداثيات الكرتيزية ،

$$(٥٥) \quad \nabla \times (SV) \equiv (\nabla S) \times V + S(\nabla \times V)$$

تستخدم هذه المطابقة في فك مكامل (٥٩) ،

$$(٥٦) \quad H_2 = \frac{1}{4\pi} \int_{\text{vol}} \left[\left(\nabla_2 \frac{1}{R_{12}} \right) \times J_1 + \frac{1}{R_{12}} (\nabla_2 \times J_1) \right] dv_1$$

الحد الثاني لهذا المكامل صفر ، لأن $\nabla_2 \times J_1$ تين مشتقة جزئية لدالة في x_1 ، y_1 و z_1 مأخوذة بالنسبة للمتغيرات x_2 ، y_2 و z_2 ، المجموعة الأولى من المتغيرات ليست دالة في المجموعة الثانية ، وكل المشتقات الجزئية أصفارا .

يمكن تعيين الحد الأول للمكامل بالتعبير عن R_{12} بدلالة القيم الاحداثية ،

$$R_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

وأخذ تدرج مقلوبها . تبين المسألة رقم ٤١ أن النتيجة هي

$$\nabla_2 \frac{1}{R_{12}} = - \frac{\mathbf{R}_{12}}{R_{12}^3} = - \frac{\mathbf{a}_{R12}}{R_{12}^2}$$

بتمريض هذه النتيجة في (٥٦) ، نحصل على

$$\mathbf{H}_2 = - \frac{1}{4\pi} \int_{\text{vol}} \frac{\mathbf{a}_{R12} \times \mathbf{J}_1}{R_{12}^2} dv_1$$

أو

$$\mathbf{H}_2 = \int_{\text{vol}} \frac{\mathbf{J}_1 \times \mathbf{a}_{R12}}{4\pi R_{12}^2} dv_1$$

التي تكافئ (٣) بدلالة كثافة التيار . باستبدال $\mathbf{J}_1 dv_1$ بـ $I_1 d\mathbf{L}_1$ ، يمكننا إعادة كتابة التكامل الحجمي كتكامل خطي مغلق ،

$$\mathbf{H}_2 = \oint \frac{I_1 d\mathbf{L}_1 \times \mathbf{a}_{R12}}{4\pi R_{12}^2}$$

وعلى ذلك معادلة (٥١) صحيحة وتتفق مع المعادلات الثلاث (٣) ، (٣٢) و (٤٦) .

فيما يلي سنثبت قانون أمبير الدائري في الصورة النقطية

$$(٢٨) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

بضم (٣٢) و (٤٦) ، نحصل على

$$(٥٧) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}$$

الآن نحتاج مفكوك $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}$ في الاحداثيات الكرتيزية ؛ بإجراء التفاضلات الجزئية المبينة وتجميع الحدود الناتجة ، يمكننا كتابة النتيجة بالصورة ،

$$(٥٨) \quad \boxed{\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} \equiv \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}}$$

حيث

$$(٥٩) \quad \nabla^2 A \equiv \nabla^2 A_x \mathbf{a}_x + \nabla^2 A_y \mathbf{a}_y + \nabla^2 A_z \mathbf{a}_z$$

معادلة (٥٩) هي التعريف (فى الاحداثيات الكرتيزية) للابلاسى لمتجه .
بتعويض (٥٨) فى (٥٧) ، نحصل على

$$(٦٠) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} [\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}]$$

وتتطلب الآن تعبيرات للانفراج وللابلاسى لـ \mathbf{A} .

يمكننا أن نوجد انفراج \mathbf{A} بتطبيق عملية الانفراج على (٥٢) ،

$$(٦١) \quad \nabla_2 \cdot \mathbf{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{vol} \nabla_2 \cdot \frac{\mathbf{J}_1}{R_{12}} dv_1 .$$

واستخدام المتطابقة المتجهة (٤٤) لقسم ٤-٨ ،

$$\nabla \cdot (S\mathbf{V}) \equiv \nabla \cdot (\nabla S) + S(\nabla \cdot \mathbf{V})$$

منتجة

$$(٦٢) \quad \nabla_2 \cdot \mathbf{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{vol} \left[\mathbf{J}_1 \cdot \left(\nabla_2 \frac{1}{R_{12}} \right) + \frac{1}{R_{12}} (\nabla_2 \cdot \mathbf{J}_1) \right] dv_1$$

الجزء الثانى من المكامل يساوى صفرا ، لأن \mathbf{J}_1 ليست دالة فى x_2 و y_2 و z_2 . وقد استخدمنا سابقا النتيجة أن $\nabla_2 (1/R_{12}) = -\mathbf{R}_{12}/R_{12}^3$ وسهل تماما بيان أن ،

$$\nabla_1 \frac{1}{R_{12}} = \frac{\mathbf{R}_{12}}{R_{12}^3}$$

$$\nabla_1 \frac{1}{R_{12}} = -\nabla_2 \frac{1}{R_{12}} \quad \text{أو أن}$$

لذلك يمكن أن تكتب معادلة (٦٢) بالصورة

$$\nabla_2 \cdot \mathbf{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{vol} \left[-\mathbf{J}_1 \cdot \left(\nabla_1 \frac{1}{R_{12}} \right) \right] dv_1$$

ونطبق المتطابقة المتجهة مرة أخرى ،

$$(٦٣) \quad \nabla_2 \cdot A_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{vol}} \left[\frac{1}{R_{12}} (\nabla_1 \cdot J_1) - \nabla_1 \cdot \left(\frac{J_1}{R_{12}} \right) \right] dv_1$$

لأننا مهتمون فقط بالمجالات المغناطيسية الثابتة ، تبين معادلة الاستمرارية أن الحد الأول في (٦٣) يساوى صفراً . ويعطى تطبيق نظرية الانفراج على الحد الثاني

$$\nabla_2 \cdot A_2 = - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S_1} \frac{J_1}{R_{12}} \cdot dS_1$$

حيث يحصر السطح S_1 الحجم الذي نكامل في كل أنحائه . هذا الحجم يجب أن يحتوى على كل التيار ، لأن تعبير التكامل الأصلي لـ A كان تكاملاً بحيث يحتوى على تأثير كل التيار . لأن ليس هناك تيار خارج هذا الحجم (وإلا لكانا قد اضطررنا أن نزيد الحجم ليحتويه) ، يمكننا أن نكامل على حجم أكبر قليلاً أو سطحاً يحتويه أكبر قليلاً بدون تغيير A . على هذا السطح الأكبر يجب أن تكون كثافة التيار J صفراً ، ولذلك يكون التكامل السطحي المغلق صفراً ، لأن المكامل يساوى صفراً . وعلى ذلك انفراج A يساوى صفراً .

لكي نوجد اللابلاسى للمتجه A دعنا نقارن المركبة في اتجاه x لـ ٥١ مع التعبير المشابه للجهد الكهروستاتيكي ،

$$A_x = \int_{\text{vol}} \frac{\mu_0 J_x dv}{4\pi R} \quad V = \int_{\text{vol}} \frac{\rho dv}{4\pi \epsilon_0 R}$$

نلاحظ أن أحد التعبيرين يمكن أن يحصل عليه من الآخر بتغيير مباشر للمتغيرات ، J_x بدلا من ρ ، μ_0 بدلا من $1/\epsilon_0$ و A_x بدلا من V . مع ذلك ، قد استتبنا بعض المعلومات الإضافية عن الجهد الكهروستاتيكي التي لن نضطر لاعادتها الآن عن المركبة في اتجاه x للجهد المغناطيسى المتجه . وهذه تأخذ صورة معادلة بواسون ،

$$\nabla^2 V = - \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

التي تصبح ، بعد تغيير المتغيرات ،

$$\nabla^2 A_x = - \mu_0 J_x$$

بالمثل ، لدينا

$$\nabla^2 A_y = - \mu_0 J_y$$

$$\nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z \quad \text{J}$$

$$(٦٤) \quad \boxed{\nabla^2 A = -\mu_0 \mathbf{J}} \quad \text{أو}$$

بالرجوع الى (٦٠) ، يمكننا الآن أن نعوض عن الانفراج واللابلاسى لـ A ونحصل على الاجابة المرغوبة ،

$$(٢٨) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

قد بينا من قبل استخدام نظرية ستوكس فى الحصول على الصورة التكاملية لقانون أمبير الدائرى من (٢٨) ولا نحتاج لتكرار العمل هنا .

وعلى ذلك فقد نجحنا فى بيان أن كل نتيجة قد انتزعناها أساسا من الهواء الرفيع^(١) للمجالات المغناطيسية تتبع من التعاريف الأساسية لـ \mathbf{H} و \mathbf{A} و \mathbf{B} . والاستنباطات ليست بسيطة ، ولكنها يجب أن تفهم على أساس خطوة بخطوة . ونأمل أن الطريقة لن يلزم أبدا أن تحفظ عن ظهر قلب .

فى النهاية ، دعنا نعود لـ (٦٤) ونستعمل هذه المعادلة التفاضلية الجزئية المتجهة من الرتبة الثانية الهائلة الصعوبة لنوجد الجهد المغناطيسى المتجه فى مثال واحد بسيط . نختار المجال بين موصلين كابل محورى ، مع نصفى قطريه a و b كالمعتاد ، وتيار I فى اتجاه \mathbf{a}_z . وبين الموصلين ، $\mathbf{J} = 0$ ، ولذلك

$$\nabla^2 A = 0$$

وقد أخبرنا سابقا (وتتيح لنا المسألة رقم ٤٣ الفرصة للتحقق من النتائج لأنفسنا) أن اللابلاسى المتجه يمكن أن يفك على صورة المجموع المتجه لللابلاسيات المقياسية للمركبات الثلاثة فى الاحداثيات الكرتيزية ،

$$\nabla^2 A = \nabla^2 A_z \mathbf{a}_z + \nabla^2 A_y \mathbf{a}_y + \nabla^2 A_x \mathbf{a}_x$$

ولكن مثل هذه النتيجة البسيطة نسبيا غير ممكنة فى نظم الاحداثيات الأخرى . أى أن فى الاحداثيات الاسطوانية ، مثلا ،

(١) فضاء حرة .

$$\nabla^2 A = \nabla^2 A_\rho a_\rho + \nabla^2 A_\phi a_\phi + \nabla^2 A_z a_z$$

على أنه ، ليس صعباً أن نبين للاحداثيات الاسطوانية أن المركبة في اتجاه z للابلاسي المتجه هو الابلاسي المقياسي للمركبة في اتجاه z لـ A ، أو

$$(٦٥) \quad \nabla^2 A|_z = \nabla^2 A_z$$

ولأن التيار هو كمية في اتجاه z في هذه المسألة ، فإن A لها مركبة في اتجاه z فقط .
لذلك

$$\nabla^2 A_z = 0$$

أو

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} = 0$$

التفكير بأفكار مماثلة عن (٥١) يبين لنا أن A_z دالة في ρ فقط ، وعلى ذلك

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dA_z}{d\rho} \right) = 0$$

وقد قمنا بحل هذه المعادلة من قبل ، والنتيجة هي

$$A_z = C_1 \ln \rho + C_2$$

إذا اخترنا مرجعاً صفراً عند $\rho = b$ فإن

$$A_z = C_1 \ln \frac{\rho}{b}$$

لكي نربط C_1 بالمصادر في مسألتنا ، نستطيع أخذ التواء A ،

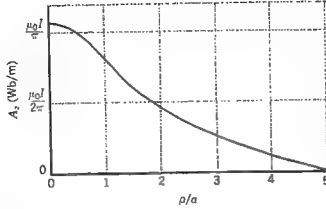
$$\nabla \times A = -\frac{\partial A_z}{\partial \rho} a_\phi = -\frac{C_1}{\rho} a_\phi = B$$

نحصل على H ،

$$H = -\frac{C_1}{\mu_0 \rho} a_\phi$$

ونقدر التكامل الخطي

$$\oint H \cdot dL = I = \int_0^{2\pi} -\frac{C_1}{\mu_0 \rho} a_\phi \cdot \rho d\phi a_\phi = -\frac{2\pi C_1}{\mu_0}$$



شكل ٨ - ١٩ . الجهد المغناطيسي المتجه بين داخل الموصل الداخلى وفى المنطقة بين الموصلين لكل محورى فيه $b = 5a$ يحمل I فى اتجاه z . اخذ اختاريا $A_z \approx 0$ عند $p = b$.

$$\text{على ذلك } C_1 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}$$

$$(٦٦) \quad A_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{b}{\rho} \quad \text{أو} \quad \left| \right.$$

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho} \quad \text{و}$$

كما سبق . رسم لـ A_z مع ρ لحالة $b = 5a$ مبين فى شكل ٨ - ١٩ ، وفيه واضح نقص $|A|$ مع المسافة من مصدر التيار المركز الذى يمثل الموصل الداخلى . نتائج المسألة ٨ - ٩ قد أضيفت أيضا الى الرسم فى شكل ٨ - ١٩ . وامتداد المنحنى فى الموصل الخارجى ترك كمسألة رقم ٤٢ .

من الممكن أيضا أن نوجد A_z بين الموصلين بتطبيق عملية يسميها بعضنا لاعرفيا « فك الالتواء uncurling » . أى أن نعرف H أو B للكابل المحورى ، ونستطيع لذلك أن نختار المركبة فى اتجاه ϕ $A = B \cdot \nabla \times A$ وتكامل لنحصل على A_z . جربها ، ستحبها !

٨ - ١٠ : واضح أن معادلة (٦٦) يمكن تطبيقها على خارج أى موصل مقطعه دائرى يحمل تيارا I فى اتجاه z فى فضاء حر . وضع المرجع الصفرى اختاريا عند $p = \rho$.

الآن اعتبر أربع موصلات ، كل نصف قطره 1cm ، موازية للمحور z اثنان مركزان عند $(-3, -3, -3)$ cm و $(3,3)$ cm وكلا يحمل 10mA في اتجاه z ، بينما تلك عند $(-3,3)$ cm و $(3, -3)$ cm يحمل كلا منها 10mA — . ضع $A = 0$ عند نقطة الأصل ، واحسب A عند : (أ) $(2,2,0)$ cm ، (ب) $(2,4,0)$ cm ، (ج) لانهاية .
الاجابة : $1.911a_2nWb/m$, $2.17a_2nWb/m$, 0 nWb/m .

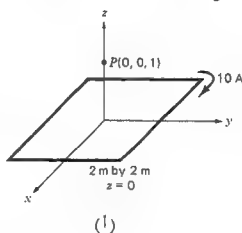
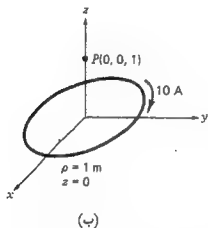
مراجع مقترحة

- 1 - Boast, W.B.: (انظر المراجع المقترحة للفصل الثاني)
الجهود المغناطيسية المقياسي معرف في P.220 واستخدامه في تخطيط المجالات المغناطيسية مناقش في P.444 .
- 2 - Jordan. E.C, and K.G. Balmain: "Electromagnetic Waves and Radiation Systems" 2nd ed, Prentice- Hall, Inc, Englewood Cliffs N.J, 1968.
الجهود المغناطيسية المتجه مناقش في pp.90-96 .
- 3 - Skilling, H.H.: (انظر المراجع المقترحة للفصل الثالث)
قدمت «عجلة التجديف» في pp.23-25

مسائل

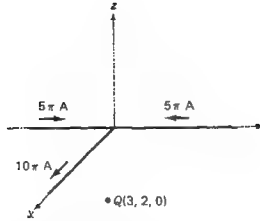
- ١ - فتيلة طولها لانهاية على المحور x تحمل تيارا 10mA في اتجاه z اوجد H و $|H|$ عند $P (3,2,1)$.
- ٢ - (أ) تيار سطحي ، $K = -a_y$ A/m ، يمر في المستوى $z = 0$ خلال المنطقة $-5 < y < 5$ m . احسب H عند $(0,0,1)$ وقارن نتيجتك مع اجابة توزيع التيار المنفصل للمسألة ١٣ ، $0.435a_y$ A/m . (ب) الآن اعتبر التيار كفتيلة على المحور x تحمل 10A في اتجاه z ، واحسب H عند $(0,0,100)$. قارن اجابتك بتلك للمسألة رقم ٣ب $0.01590a_y$ A/m .
- ٣ - عشر فتائل تيار لانهاية الطول في المستوى $z = 0$ توازي المحور x وتقع عند y تساوي $-4.5, -3.5, \dots, -0.5, 0.5, \dots, 4.5$ m . كل يحمل 1A في اتجاه z . احسب H عند : (أ) $(0,0,1)$ ، (ب) $(0,0,100)$.
- ٤ - اوجد H عند $P (0,0,1)$: (أ) دائرة فتيلة مربعة في شكل ٨ - ١٢٠ ، (ب) دائرة فتيلة دائرية في شكل ٨ - ٢٠٠ .
- ٥ - كلا من المحاور الاحداثية يحمل تيارا فتيليا 1A في اتجاه z ، a_y و a_z اوجد H عند $(2,3,4)$.

- ٦- أوجد H عند $Q(3,2,0)$ لتشكيل فتائل التيار الموضح في شكل ٨ - ٢١ .
- ٧- تيار سطحي $K = 4\rho a_y \text{ A/m}$ ، يمر في المستوى $z = 0$ خلال المنطقة الحلقية $2 < \rho < 5 \text{ m}$. (أ) ما هو التيار العابر للمستوى $\phi = 0$ ؟ (ب) أوجد H عند $P(0,0,h)$. (ج) احسب قيمة H_z لـ $h = 5$.
- ٨- أوجد H عند نقطة الأصل للوح تيار $K = K_0 \rho a_y \text{ A/m}$ على الاسطوانة $\rho = a$.
- ٩- أوجد شدة المجال المغناطيسي المتجه عند $(0,0,5)$ المسبب بكثافة تيار منتظمة ، $K = 500 a_y \text{ A/m}$ ، على ذلك الجزء من المستوى $z = 0$ الذي فيه $0 < x < 10$ و $y > 0$.



شكل ٨ - ٢٠ انظر مسألة ٤ .

- ١٠- عنصر تيار تفاضلي فيه $I = 0.5 \text{ A}$ و $\Delta L = 10^{-6} \text{ m}$ موضوع عند $P_1(-2,4,1)$ يمر التيار في اتجاه خط مستقيم من P الى :
 (أ) نقطة الأصل ، (ب) $(2,3,4)$ ،
 (ج) $Q(-3,-1,-2)$. أوجد ΔH عند :
 (أ) نقطة الأصل ، (ب) $(2,3,4)$.
- ١١- لعنصر التيار محدود الطول على المحور z ، كما هو مبين بشكل ٨ - ٥ ، استخدم قانون بيو-سافار لتشتيت معادلة (٩) بقسم ٨ - ١ .
- ١٢- ملف حلقي ذو مقطع عرضي مربع معرف بالاسطوانتين $\rho = 5.1 \text{ cm}$ و $\rho = 7.1 \text{ cm}$ والمستويين $z = 0$ و $z = 2 \text{ cm}$ يحتوي الملف على 360 لفة من سلك رقيق مع تيار مستمر 50 mA . دع اللفة الأولى تحمل تيارا في اتجاه a_z عند $\phi = 0$ على السطح الخارجى ، وفي اتجاه a_z عند $\phi = 0.5^\circ$ على السطح الداخلى ، وهكذا . (أ) أوجد H عند $P(0,0,6 \text{ cm})$. (ب) ماكمية التيار المرتبط بالمسار الدائرى في اتجاه a_ϕ عند $P(0,0,6.5 \text{ cm})$ ، $\rho = 6.5 \text{ cm}$ ، $z = 0.3 \text{ cm}$ ؟ (ج) ماكمية التيار المرتبط بالمسار المكون من أجزاء خطية مستقيمة من $(0,0,0)$ الى $(6,8,0)$ الى $(6,8,20)$ الى $(0,0,0)$ ، (د) باجزاء خطية مستقيمة من $(0,0,0)$ الى $(6,0,0)$ الى $(6,8,0)$ الى $(0,0,0)$ الى $(-6,8,0)$ الى $(-6,0,0)$ الى $(0,0,0)$ ؟



شكل ٨ - ٢١ انظر مسألة ٦.

١٣ - الحيز $0 < x < 6\text{m}$ يحمل كثافة التيار المنتظمة $J = 5a_z \text{ A/m}^2$ و $J = 0$ في أي مكان آخر. (أ) استخدم قانون أمبير الدائري ومسارات قائمة في المستوى $z = 0$ لتبين أن ، $H_{x < 0} = -H_{x > 0}$. (ب) أوجد H عند $(8, 9, 0)$. (ج) عين H عند $(2, 5, 0)$.

١٤ - قشرة أسطوانية مجوفة نصف قطرها a ممرزة على المحور z وتحمل كثافة تيار سطحية منتظمة $K_{\phi} a \phi$. (أ) بين أن H ليست دالة في ϕ أو z . (ب) بين أن H_{ϕ} و H_{ρ} أصفأراً في كل مكان.

(ج) بين أن $H_z = 0$ $\rho > a$. (د) بين أن $H_z = K_z$ $\rho < a$. (هـ) قشرة ثانية ، $\rho = b$ ، تحمل تياراً $K_{\phi} a \phi$. أوجد H في كل مكان.

١٥ - أوجد H عند نقطة الأصل الناتجة عن : (أ) فتيلة تيار دائرية ، $7A$ في اتجاه ϕ عند $\rho = 10\text{cm}$ ، $z = c$ ، (ب) خمس فتائل تيار دائرية كل منها $7A$ في اتجاه ϕ عند $\rho = 10\text{cm}$ ، $z = 0$ ، $z = \pm 10\text{cm}$ و $z = \pm 20\text{cm}$ ، (ج) فتيلة دائرية ، $I = 5 \times 7A$ في اتجاه ϕ عند $\rho = 10\text{cm}$ ، $z = 0$ ، (د) ملف لولبي لانهاى $K = (7/0.1)a_{\phi}/\text{m}$ عند $\rho = 10\text{cm}$.

١٦ - الملف الحلقي لشكل ٨ - ١١ ب له 600 لفة مع $I = 0.5A$ ، $\rho_0 = 2.5\text{cm}$ و $a = 1\text{cm}$ محوره هو المحور x ، و I أسأسا في اتجاه a_{ϕ} عند نصف القطر الخارجى. الملف اللولبي لشكل ٨ - ١٠ ب له $1,000$ لفة مع $I = 5\text{cm}$ ، $d = 50\text{cm}$ محوره هو المحور z ، و I أسأسا في اتجاه a_{ϕ} . كلا الملفين مركز على نقطة الأصل. أوجد $|H|$ عند : (أ) $(0, 0, 0)$ ، (ب) $(0, 0.025, 0)$ ، (ج) $(0, -0.025, 0)$ ، (د) $(0, 0, 0.25)$.

١٧ - تيار يمر في اتجاه a_{ϕ} ولا يتغير مع x . دع كل متر عرض في اتجاه x يحمل $100A$. أوجد H عند $z = 3.11\text{m}$ إذا كان توزيع التيار مع z كما يلى :

(أ) لوح عند $K = 100a_y$, $A/mz = 0$ ،

(ب) عشرة ألواح عند $K = 10a_y$, A/m , $Z = -4.5, -3.5, \dots, 4.5$

(ج) مائة لوح عند $K = a_y$, A/m , $z = 4.95, -4.85, -4.75, \dots, 4.95$ على

كل ، (د) $J = 10aA/m^2$, $5 < z < -5$ و $J = 0$ في أى مكان آخر .

١٨ - سلك نصف قطره 3mm له مادة لها $\sigma = 10^7$ Ω/m $0 < \rho < 2mm$ و $0 < \rho < 3mm$ مع

١٩ - تيار مقداره 2.5A يمر فى اتجاه a_z فى فتيلة على المحور السالب لـ z . عند نقطة

الأصل يمر خارجا وإلى أعلى كتيار سطحى على السطح المخروطى $\theta = 45^\circ$.

استخدم قانون أمبير الدائرى لإيجاد H فى كل مكان .

٢٠ - يبين شكل ٨ - ٢٢ قيمة لـ H_x (إلى اليسار) و H_y (إلى اليمين) بالأمبير لكل متر

عند عدد من النقاط على شبكة مربعة $1mm$ فى المستوى $z = 0$ بداخل موصل

معين . قدر التيار العابر لمساحة دائرية $10^{-6}m^2$ مركزة عند P .

٢١ - فى المسألة ت ٨ - ٤ ، ناتج قسمة التكامل الخطى المغلق لـ H والمساحة

المحصورة به هو 3.97 بينما $(\nabla \times H)_x = 4.07$. نصف أبعاد المسار المربع

حول $P(1, -3, 2)$ وبين أن ناتج القسمة الجديد هو تقريب أحسن لـ

$(\nabla \times H)_x$.

٢٢ - إذا أعطيت شدة المجال المغناطيسى :

$H = [1/\rho - (40 + \rho^{-1})e^{-40\rho}]a_\phi A/m$ ، أوجد :

(أ) H عند نقطة الأصل . (ب) J عند نقطة الأصل .

669 410 672 411 670 414

673 409 674 415

$H_x = 674$ $H_y = 411$

675 411 678 412 678 414

1 mm

← 1 mm →

شكل ٨ - ٢٢ انظر مسألة ٢٠.

٢٣ - أوجد $\nabla^2 V$ و $\nabla \times E$ لمجالات الجهد :

(أ) $V = 10(x^2 - y^2)$ ، (ب) $V = 10(x^2 - 2y^2)$ ، (ج) أوجد $\nabla \times E$ كدالة

فى الزمن للمجال المتغير مع الزمن التالى فى خط نقل محورى

$$E = 10^4 \rho^{-1} \cos(10^8 t - 0.5z) a_\rho \text{ V/m}$$

٢٤ - موصل مصمت ذو مقطع عرضى دائرى نصف قطره 5mm له موصلية تتغير مع

نصف القطر . الموصل طوله 20m وهناك فرق جهد قدره 0.1V dc بين طرفيه .

خلال الموصل ، $H = 10^3 \rho^2 a_\phi / \text{m}$ ، (أ) أوجد σ كدالة فى ρ . (ب) ماهى

المقاومة بين الطرفين ؟

٢٥ - إذا أعطيت المجال المتجه $G = (2x^2 + y)a_x + 8 \times yza_y + (x^2y/z)a_z$ ،

احصل على قيمة عددية لـ $(\nabla \times G)_z$ عند $P(0.5, 2, 0.4)$ بطريقتين مختلفتين :

(أ) احسب $\oint G \cdot dL$ حول مسار مربع صغير مساحته $2a + 2a$ حول النقطة P فى

المستوى $z = 0.4$ ، اقسم على المساحة ، وخذ النهاية حينما $a \rightarrow 0$ ، (ب)

استخدم معادلة (٢٢) لقسم ٨ - ٣ .

٢٦ - للمجال H المعطى فى مسألة ٢٢ ، أوجد التيار الكلى المار خلال الاسطوانة

$\rho = 1 \text{ cm}$ بطريقتين مختلفتين .

٢٧ - قدر طرفى نظرية ستوكس للمجال $H = (y^2z/x)a_x + (0.5y^2z^2/x^2)a_z$ وأوجد التيار

فى اتجاه a_ϕ العابر للسطح المربع فى المستوى $y = 2$ المحدود بـ $x = z = 1$

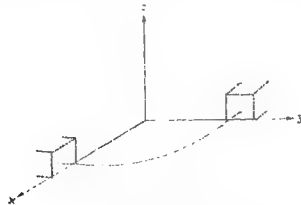
و $x = z = 2$.

٢٨ - عندما تكون x و y موجبة وأقل من 5 ، يمكن التعبير عن شدة مجال مغناطيسى

معين بالصورة $H = [x^2yz/(y+1)]a_x + 3 \times 132^2 z^2 a_y - [xyz^2/(y+1)]a_z$.

أوجد التيار الكلى فى اتجاه a_ϕ الذى يعبر الشريط $x = 2$ ، $1 \leq y \leq 4$ و $3 \leq z \leq 4$

بطريقة مستخدما : (أ) تكامل سطحي ، (ب) تكامل خطى مغلق .



شكل ٨ - ٢٣ انظر مسائلى ٣٠ و ٣١ .

٢٩ - شدة مجال مغناطيسي معين في الاحداثيات الكروية معطى بالصورة
 $H = 10^6 r \sin \theta a_\phi$ A/m (أ) أوجد التيار في اتجاه a_ϕ خلال الغطاء الكروى
 $0 < \theta < \pi/6$, $0 < \phi < 2\pi$, باستخدام أيا من طرقتي نظرية ستوكس
الذى تفضله أكثر. (ب) تحقق من النتيجة السابقة باستخدام طرف نظرية
ستوكس الذى لا تفضله.

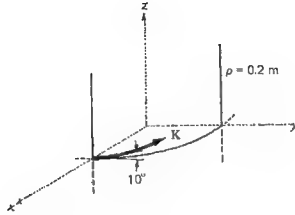
٣٠ - جزء من ملف حلقي مملوء بالهواء له مقطع عرضي $1\text{cm} \times 1\text{cm}$ ونصف قطر
داخلي 3cm مبين بشكل ٨ - ٢٣. هناك 800 لفة كلا تحمل 5A الى الخارج
نصف قطريا على السطح العلوى. (أ) ما قيمة B عند مركز المقطع العرضي ؟
(ب) ماهو التدفق الكلى المار خلال المقطع العرضي ؟
٣١ - الملف الحلقي المخطط بشكل ٨ - ٢٣ مملوء بالهواء ، وله مقطع عرض :
 $1\text{cm} \times 1\text{cm}$ نصف القطر الداخلى هو 3cm ، والتيار السطحي هناك هو
 $500 a_z$ A/m. احسب : (أ) H عند $\rho = 2\text{cm}$, $\phi = 0.1\pi$, $z = 0$, (ب) H
عند $\rho = 3.2\text{cm}$, $\phi = 0.2\pi$, $z = 0.2\text{cm}$,
(ج) $B(\rho, \phi, z)$ ، (د) التدفق الكلى داخل الملف الحلقي .

٣٢ - تيار فيلبي قدره 0.4A يمر نحو نقطة الأصل على المحور x فى المدى $-\infty < x < 0$.
(أ) أوجد $B(x, y, 0)$. (ب) ما كمية التدفق التى تعبر المستوى $z = 0$ فى المنطقة
 $1 < x < 2$, $1 < y < 2$ ؟

٣٣ - فى الجزء الأوسط من الولايات المتحدة ، قيمة ممثلة للمركبة الأفقية للمجال
المغناطيسى للأرض هى 0.2G أو $2 \times 10^{-5} \text{Wb/m}^2$ ، لكى نقدر التأثير الذى قد
يكون لنظام كهربي ذاتى الحركة على بوصلة لوحة أجهزة قياس ، احسب المسافة
من سلك مستقيم طويل يحمل 5A d.c التى عندها التأثير على البوصلة يكون
مساوياً ذاك للأرض .

٣٤ - توجد كثافة التيار $J = 5a_\phi$ A/m² حيثما $|z| < 2\text{cm}$. (أ) أوجد H فى $|z| < 2\text{m}$ و
 $|z| > 2\text{m}$. (ب) أوجد B فى كل مكان . (ج) عين V_m فى $z = -2$ إذا كانت
 $V_m = 0$ عند $P(0, 0, -2)$. (د) أوجد A لـ $|z| < 2$ إذا كانت $A = 0$ عند نقطة
الأصل .

٣٥ - فى الملف اللولبي المملوء بالهواء المبين فى شكل ٨ - ١٠ ، د $K_m = 800\text{A/m}$
و $a = 3\text{cm}$ (أ) أوجد فرق الجهد المغناطيسى المقياسى بين القطبتين :
 $P(\rho = 1\text{cm}, \phi = 0, z = 4\text{cm})$ و $Q(\rho = 2\text{cm}, \phi = 1.5\pi, z = 8\text{cm})$.
(ب) استخدم $B = \nabla \times A$ ليجاد A ثم عين فرق الجهد المغناطيسى المتجه بين
النقط ρ و Q إذا كانت $A = 0$ عند $\rho = 0$.



شكل ٨ - ٢٤ انظر مسألة ٣٨.

٣٦ - ثلاثة ألواح تيار لانهائية موضوعة في فضاء حر كما يلي : $100a_z$ A/m عند $z = 0$ ، $-50a_x$ عند $z = 4$ m ، $-50a_x$ عند $z = -4$. (أ) دع $V_m = 0$ عند $P(1,2,3)$ ، وأوجد V_m عند $Q(1.5,2.6,3.7)$. (ب) دع $A = 0$ عند P وأوجد A عند Q . (اقتراح : استخدم المركبة المناسبة لـ $\nabla \times A = B$ زيادة على معلوماتك عن اتجاه A)

٣٧ - ثلاثة أفقرح تيار اسطوانية موضوعة في فضاء حر كمايلي : $100a_z$ A/m عند $\rho = 2$ m ، $20a_z$ عند $\rho = 3$ و $-65a_z$ عند $\rho = 4$ ضع $V_m = 0$ عند $\phi = 0$ واختر حاجزا عند $\phi = \pi$ أوجد : (أ) V_m عند $P(2.5, 70^\circ, 0)$ ، (ب) V_m عند $Q(3.5, 210^\circ)$.

٣٨ - بين شكل ٨ - ٢٤ جزءاً من سطح أسطواني ، $\rho = 0.2$ m عليه تيار سطحي منتظم قدره $I, 600$ A/m يسرى بحيث يعمل اتجاهه في كل مكان زاوية قدرها 10° مع مستوى $z = \text{ثابت}$. (أ) اكتب تعبيراً لـ K في الاحداثيات الاسطوانية . (ب) أوجد H في كل مكان . (ج) أوجد V_m لـ $\rho < 0.2$ اذا كانت $V_m = 0$ عند نقطة الأصل . (د) أوجد V_m لـ $\rho > 0.2$ اذا كانت $V_m = 0$ عند $(1, 0^\circ, 0)$.

٣٩ - تيار فتيلي مقداره 6 mA يسرى في اتجاه a_z عند $x = -2$ m ، $y = 0$ و 6 mA في اتجاه a_x — موجود عند $x = 2$ ، $y = 0$. أوجد V_m على المحور y اذا كان $V_m = 0$ عند نقطة الأصل .

٤٠ - دع $A = 6 \times 10^9 (\rho - 0.001)^2 a_z$ A/m² في $J = 0$ و $0 \leq \rho \leq 1$ mm في $J = 0$ في أى مكان آخر . اذا كان $A = 0$ عند $\rho = 1$ cm واذا كان A مستمرا عند $\rho = 1$ mm ، ارسم منحنيات لـ : (أ) $|H|$ مع ρ ، (ب) $|A|$ مع ρ ; $0 \leq \rho \leq 5$ mm .

٤١ - بين أن $\nabla_2 (1/R_{12}) = -\nabla (1/R_{12}) = R_{21} / R_{12}^3$.

- ٤٢ - احسب الجهد المغناطيسي داخل الموصل الخارجى لخط محورى الذى جهده المغناطيسى المتجه ميين فى شكل ٨ - ١٩ إذا كان نصف القطر الخارجى للموصل الخارجى هو $7a$. اختر المرجع الصفرى المناسب ، وارسم النتائج تخطيطياً على الشكل .
- ٤٣ - بفك معادلة (٥٨) ، قسم ٨ - ٧ ، فى الاحداثيات الكرتيزية ، بين أن (٥٩) صحيحة .

الفصل التاسع

القوى المغناطيسية ، المواد ، والمحنة

كميات المجال المغناطيسي H, B, Φ, V_m و A التي قدمت في الفصل الأخير لم تعط بعد أهمية فيزيائية كبيرة . كل من هذه الكميات معرف فقط بدلالة توزيع منابع التيار في كل مواضع الفضاء . وإذا عرف توزيع التيار ، يجب أن نعرف H, B و A معينة في كل نقطة في الفراغ ، بالرغم من أننا قد نكون غير قادرين على إيجاد قيم التكاملات المعرفة بسبب تعقيد رياضي .

نحن الآن مستعدون لمعالجة النصف الثاني لمسألة المجال المغناطيسي ، ذاك لتعيين القوى وعزوم التدوير المؤثرة بالمجال المغناطيسي على شحنات أخرى . يسبب المجال الكهربى قوة لتؤثر على شحنة التي قد تكون إما ساكنة أو في حركة ، سنرى أن المجال المغناطيسي الثابت قادر على التأثير بقوة على شحنة متحركة فقط . تبدو هذه النتيجة معقولة ، مجال مغناطيسي يمكن أن ينتج عن شحنات متحركة ويمكن أن يؤثر بقوة على شحنات متحركة ، مجال مغناطيسي لا يمكن أن ينشأ من شحنات ساكنة ولا يمكن أن يؤثر بأى قوة على شحنة ساكنة .

يعتبر هذا الفصل في البداية القوى وعزوم التدوير على الموصلات الحاملة للتيار التي يمكن أن تكون إما ذات طبيعة فنيقية أو لها مقطع عرضى محدود مع توزيع كثافة تيار معروف . المسائل المرتبطة بحركة الجسيمات فى فراغ متجنبة عامة .

يفهم للتأثيرات الأساسية الناتجة عن المجال المغناطيسي ، يمكننا حينئذ أن نعتبر الأنواع المتنوعة للمواد المغناطيسية ، تحليل الدوائر المغناطيسية الأولية ، القوى على المواد المغناطيسية ، وأخيراً ، مفهوم الدوائر الكهربائية الهام للمحنة .

٩ - ١ القوة على شحنة متحركة :

فى مجال كهربي يبين لنا تعريف شدة المجال الكهربى أن القوة على جسيم مشحون هي :

$$(١) \quad \mathbf{F} = q\mathbf{E}$$

القوة تكون فى نفس الاتجاه كشدة المجال الكهربى (بالنسبة لشحنة موجبة) وتناسب طردياً مع E و q . إذا كانت الشحنة فى حركة ، فحينئذ تعطى القوة عند أى نقطة فى مسارها بـ (١) .

وقد وجد تجريبياً أن جسيماً مشحوناً متحركاً في مجال مغناطيسي ذو كثافة تدفق B يلاقى قوة يتناسب مقدارها مع حاصل ضرب مقادير الشحنة Q ، سرعتها v ، وكثافة التدفق B ، ومع جيب الزاوية بين المتجهين v و B . اتجاه القوة عمودي على كل من v و B ويعطى بوحدة متجه في اتجاه $B \times v$. لذلك يمكن أن يعبر عن القوة بالصورة

$$(٢) \quad F = Qv \times B$$

فرق أساسى فى تأثير المجالات الكهربائية والمغناطيسية على الجسيمات المشحونة ظاهر الان ، لأن قوة تؤثر دائماً فى اتجاه على زوايا قائمة مع الاتجاه الذى يتقدم فيه الجسيم لايمكن أبداً أن تغير مقدار سرعة الجسيم . بتعبير آخر ، متجه العجلة يكون دائماً عمودى على متجه السرعة . على ذلك تبقى طاقة الحركة للجسيم غير متغيرة ، ولذلك يكون المجال المغناطيسي الثابت غير قادر على نقل طاقة للشحنة المتحركة . المجال الكهربى ، فى الناحية الأخرى ، يؤثر بقوة على الجسيم لانتعند على الاتجاه الذى يتقدم فيه الجسيم ولذلك يسبب عامة انتقال طاقة بين المجال والجسيم .

المسألتان الأوليتان فى نهاية هذا الفصل توضحان التأثيرات المختلفة لمجالات كهربية ومغناطيسية على طاقة حركة جسيم مشحون فى فضاء حر .

القوة على جسيم متحرك نتيجة مجالات كهربية ومغناطيسية مجمعة يحصل عليها بسهولة بالتراكب ،

$$(٣) \quad F = Q(E + v \times B)$$

هذه المعادلة معروفة بمعادلة « لورنتز » للقوة وحلها مطلوب فى تعيين مدارات الالكترون فى المغنطرون ، مسارات البروتون فى السيكلوترون ، خصائص البلازما فى مولد هيدروديناميكي مغناطيسي (MHD) ، أو ، عامة ، حركة جسيم مشحون فى مجالات كهربية ومغناطيسية مجمعة .

ت ٩ - ١ : شحنة نقطية ذات $1.2C$ -- لها سرعة $5a_x + 2a_y - 3a_z$ m/s . أوجد مقدار القوة المؤثرة عليها فى المجال : (أ) $E = -18a_x + 5a_y - 10a_z$ V/m ، (ب) $B = -4a_x + 4a_y + 3a_z$ Wb/m² ، (ج) كلا E و B .

الاجابة : $21.7N$ ، $40.1N$ ، $25.4N$.

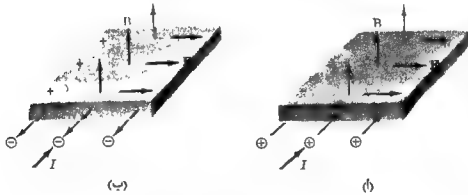
٩ - ٢ : القوة على عنصر تيار تفاضلى :

القوة على جسيم مشحون يتحرك خلال مجال مغناطيسي ثابت يمكن أن نكتب على أنها القوة التفاضلية المؤثرة على عنصر تفاضلى للشحنة ،

$$(٤) \quad d\mathbf{F} = dQ \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

فيزيائياً ، يتكون عنصر الشحنة التفاضلى من عدد كبير من شحنات منفصلة صغيرة جداً تحتل حجماً ، مع أنه صغير ، فهو أكبر بكثير من متوسط الفاصل بين الشحنات . القوة التفاضلية المعبر عنها بـ (٤) هى على ذلك مجرد المجموع للقوى على الشحنات المفردة . هذا المجموع ، أو القوة المحصلة ، ليست قوة مؤثرة على جسم مفرد . وبطريقة مناظرة ، يمكن أن نعتبر قوة الجاذبية التفاضلية التى يلاقىها حجم صغير مأخوذ فى وابل من رمال ساقطة . يحتوى الحجم الصغير على عدد كبير من حبيبات الرمل ، والقوة التفاضلية هى مجموع القوى على الحبيبات المفردة داخل الحجم الصغير .

على أنه إذا كانت شحناتنا الكترونات فى حركة فى موصل ، يمكن أن نبين أن القوة تنتقل للموصل ، وأن مجموع هذا العدد البالغ الكبر للقوى البالغة الصغر ذو أهمية عملية . خلال الموصل ، تكون الالكترونات فى حركة فى كل المواضع من منطقة أيونات موجبة لا تتحرك وهى تكون مجموعة مرتبة بللورية معطية الموصل صفاته الصلبة . مجال مغناطيسى الذى يؤثر بقوى على الالكترونات يتجه لتسبب إزاحة موضعها طفيفاً وينتج إزاحة بسيطة بين مراكز ثقل الشحنات الموجبة والسالبة . على أن القوى الكولومية بين الالكترونات والأيونات الموجبة تميل الى أن تقاوم مثل هذه الإزاحة .



شكل ٩-١ تيارات متساوية موجهة الى داخل المادة معطاة بشحنات موجهة تتحرك الى الداخل فى (أ) وشحنات سالبة تتحرك الى الخارج فى (ب) . الحالتان يمكن أن يميزا بفولتيات حول متضادة الاتجاه ، كما هو مبين .

لذلك أى محاولة لتحريك الالكترونات ، تنتج قوة تجاذب بين الالكترونات والأيونات الموجبة فى النظام الشبكي البللورى . وبذلك تنتقل القوة المغناطيسية للنظام الشبكي البللورى ، أو للموصل نفسه . والقوى الكولومية أكبر بكثير من القوى المغناطيسية فى

الموصلات الجيدة حتى أن إزاحة الإلكترونات الفعلية لا يمكن قياسها تقريبا . مع ذلك ، فاصل الشحنة الذي ينتج فعلا ، يفصح عنه وجود فرق جهد طفيف عبر عينة الموصل في اتجاه عمودي على كل من المجال المغناطيسي وسرعة الشحنات . وتعرف الفولتية بفولتية هول ، والتأثير نفسه يسمى تأثير هول *Hall effect* .

شكل ٩ - ١ يوضح اتجاه فولتية هول لكلا شحنات موجبة وسالبة في حركة . لاحظ أن تيارات متساوية معطاة بالفجوات والإلكترونات يمكن أن تميز بفولتية هول لها . هذه طريقة لتحديد ما إذا كان شبه موصل معطى سالب النوع *n - type* أو موجب النوع *p - type* .

تستخدم أجهزة تأثير هول لتقيس كثافة التدفق المغناطيسي ، وفي بعض التطبيقات حيث يمكن جعل التيار خلال الجهاز يتناسب مع المجال المغناطيسي عبره ، تستخدم كمقاييس قدرة الكترونية ، عناصر تبريد ، وهلم جرا .

بالرجوع لـ (٤) ، يمكننا لذلك القول بأنه إذا اعتبرنا عنصر شحنة متحركة في حزمة الكترونية تكون القوة مجرد مجموع القوى على الإلكترونات المفردة في ذلك العنصر المجهض الصغير ، ولكن إذا كنا نعتبر عنصر شحنة متحركة خلال موصل ، تكون القوة الكلية مؤثرة على الموصل الصلب نفسه . سنقصر الآن اهتمامنا على القوى على الموصلات الحاملة للتيار .

في الفصل الخامس عرفنا كثافة تيار الحمل بدلالة سرعة كثافة الشحنة الحجمية ،

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$$

يمكن أيضاً أن يعبر عن عنصر الشحنة التفاضلي في (٤) بدلالة كثافة الشحنة الحجمية^(١) ،

$$dQ = \rho \, dv$$

$$d\mathbf{F} = \rho \, dv \, \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad \text{على ذلك}$$

$$(٥) \quad d\mathbf{F} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} \, dv \quad \text{أو}$$

رأينا في الفصل السابق أن $\mathbf{J} dv$ يمكن أن تفسر كعنصر تيار تفاضلي ، أي أن ،

$$\mathbf{J} \, dv = \mathbf{K} \, dS = I \, d\mathbf{L}$$

(١) تذكر أن dv عنصر حجم تفاضلي وليس زيادة تفاضلية في السرعة .

وعلى ذلك يمكن أن تُطبق معادلة لورنز للقوة على كثافة تيار سطحي ،

$$(٦) \quad d\mathbf{F} = \mathbf{K} \times \mathbf{B} \, dS$$

أوعلى فتيلة تيار تفاضلية ،

$$(٧) \quad d\mathbf{F} = I \, d\mathbf{L} \times \mathbf{B}$$

بتكامل (٥) ، (٦) ، أو (٧) على حجم ، سطح يمكن أن يكون مفتوحا أو مغلقا (لماذا ؟) أو مسار مغلق ، على الترتيب ، يؤدي الى الصيغ التكاملية

$$(٨) \quad \mathbf{F} = \int_{vol} \mathbf{J} \times \mathbf{B} \, dv$$

$$(٩) \quad \mathbf{F} = \int_S \mathbf{K} \times \mathbf{B} \, dS$$

$$(١٠) \quad \mathbf{F} = \oint I \, d\mathbf{L} \times \mathbf{B} = -I \oint \mathbf{B} \times d\mathbf{L} \quad \text{و}$$

نتيجة بسيطة يحصل عليها بتطبيق (٧) أو (١٠) على موصل مستقيم في مجال مغناطيسي منتظم ،

$$(١١) \quad \mathbf{F} = I\mathbf{L} \times \mathbf{B}$$

مقدار القوة معطى بالمعادلة المألوفة

$$(١٢) \quad F = BIL \sin \theta$$

حيث θ هي الزاوية بين المتجهات الممثلة لاتجاه سريان التيار واتجاه كثافة التدفق المغناطيسي . المعادلة (١١) أو (١٢) تنطبق فقط على جزء من الدائرة المغلقة ، وباقي الدائرة يجب أن يعتبر في أى مسألة عملية .

٩-٢ : موصل فتيلي لانهائي على المحور z يحمل تيارا مقداره $2A$ في اتجاه a_z . أوجد مقدار القوة على طول I_{in} من الموصل في المجال :

$$(أ) \quad \mathbf{B} = 0.1a_x - 0.2a_z \, \text{Wb/m}^2 \quad (ب) \quad \mathbf{B} = 0.3a_x - 0.4a_y \, \text{Wb/m}^2$$

$$(ج) \quad \mathbf{B} = 0.2a_x \, \text{Wb/m}^2 \quad \text{و} \quad \mathbf{E} = 0.3a_y \, \text{m V/m}$$

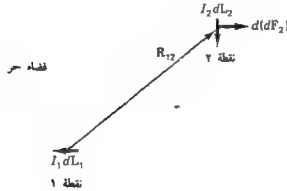
الاجابة : 10.16mN , 25.4mB , 5.08mV .

ت ٩ - ٣ : عينة من جرمانيوم سالب النوع مينة فى شكل ٩ - ١ ب . بفرض أن لها ابعاد مقطع عرضى $1.5\text{cm} \times 1.2\text{mm}$ وطول مقداره 2.8cm ، دة حركية الالكترىون تساوى $0.39\text{m}^2/\text{V.s}$ المجال المغناطيسى 0.08Wb/m^2 ، والمجال الكهرىبى فى اتجاه سريان التيار $1,200\text{V/m}$. أوجد : (أ) سرعة الانسياب ، (ب) فولتية هول ، (ج) الفولتية عبر طول العينة .

الاجابة : 33.6V , 0.562V , 468m/s .

٩ - ٣ القوة بين عناصر تيار تفاضلية

لقد قدم مفهوم المجال المغناطيسى لكى نقسم مسألة إيجاد الفعل المتبادل لتوزيع تيار على توزيع تيار ثان إلى جزئين . من الممكن أن نعبر عن القوة على عنصر تيار واحد مباشرة بدلالة عنصر تيار ثان بدون إيجاد المجال المغناطيسى . ولأننا قد ادعينا أن مفهوم المجال المغناطيسى يسهل عملنا ، يتعين علينا حينئذ أن نبين أن تجنب هذه الخطوة المتوسطة يؤدي إلى تعبيرات أكثر تعقيداً .



شكل ٩ - ٣ . معطيا $P_2 (5,2,1)$, $P_1 (1,8,5)$, $I_1 dL_1 = -3a_z \text{ A.m}$, $I_2 dL_2 = -4a_z \text{ A.m}$ ، تكون القوة على $I_2 dL_2$ هى 8.56mN فى اتجاه a_z .

المجال المغناطيسى عند النقطة 2 بسبب عنصر تيار عند النقطة 1 قد وجد أنه

$$dH_2 = \frac{I_1 dL_1 \times a_{R12}}{4\pi R_{12}^2}$$

الآن ، القوة التفاضلية على عنصر تيار تفاضلى هي

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{L} \times \mathbf{B}$$

ونطبق هذه على مسألتنا بأن ندع \mathbf{B} تكون $d\mathbf{B}_2$ (كثافة التدفق التفاضلية عند النقطة 2 المسببة بعنصر التيار I) ، بجعل $I d\mathbf{L}$ على أنه $I_2 d\mathbf{L}_2$ ، وبالرمز الى القدر التفاضلى لقوتنا التفاضلية على العنصر 2 بالصورة $d(d\mathbf{F}_2)$:

$$d(d\mathbf{F}_2) = I_2 d\mathbf{L}_2 \times d\mathbf{B}_2$$

لأن $d\mathbf{B}_2 = \mu_0 d\mathbf{H}_2$ نحصل على القوة بين عنصرى تيار تفاضليين ،

$$(13) \quad d(d\mathbf{F}_2) = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{4\pi R_{12}^2} d\mathbf{L}_2 \times (d\mathbf{L}_1 \times \mathbf{a}_{R12})$$

لتوضيح استخدام (وسوء استخدام) هذه النتائج ، اعتبر عنصرى التيار التفاضليين المميين في شكل ٩ - ٧ . لدينا $I_1 d\mathbf{L}_1 = -3\mathbf{a}_y$ A.m عند $P_1 (5,2,1)$ و $I_2 d\mathbf{L}_2 = -4\mathbf{a}_z$ A.m عند $P_2 (1,8,5)$. وعلى ذلك $R_{12} = 4\mathbf{a}_x + 6\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z$ ، ويمكن أن نعوض هذه النتائج في (١٣) ،

$$\begin{aligned} d(d\mathbf{F}_2) &= \frac{4\pi 10^{-7} (-4\mathbf{a}_z) \times [(-3\mathbf{a}_y) \times (-4\mathbf{a}_x + 6\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z)]}{4\pi (16 + 36 + 16)^{1.5}} \\ &= 8.56\mathbf{a}_y \text{ nN} \end{aligned}$$

قبل عدة فصول عندما ناقشنا القوة المؤثرة بشحنة نقطية على شحنة نقطية أخرى وجدنا أن القوة على الشحنة الأولى كانت السالب لتلك على الثانية . أى أن ، القوة الكلية على النظام كانت صفراً . هذه ليست الحالة مع عناصر التيار التفاضلية ، و $d(d\mathbf{F}_1) = -12.84\mathbf{a}_z$ nN في المثال آنفاً . وسبب ذلك التصرف المختلف يقع في الطبيعة غير الفيزيائية لعنصر التيار . بينما يمكن أن تقرب الشحنات النقطية جيداً جداً بشحنات صغيرة ، تتطلب استمرارية التيار اعتبار دائرة كاملة . هذا سنعلمه الآن .

القوة الكلية بين دائرتين فثليتين يحصل عليها بالتكامل مرتين :

$$\begin{aligned} (14) \quad \mathbf{F}_2 &= \mu_0 \frac{I_1 I_2}{4\pi} \oint \left[d\mathbf{L}_2 \times \oint \frac{d\mathbf{L}_1 \times \mathbf{a}_{R12}}{R_{12}^2} \right] \\ &= \mu_0 \frac{I_1 I_2}{4\pi} \oint \left[\oint \frac{\mathbf{a}_{R12} \times d\mathbf{L}_1}{R_{12}^2} \right] \times d\mathbf{L}_2 \end{aligned}$$

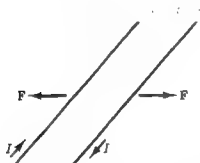
معادلة (١٤) صعبة جداً ، ولكن التعود المكتسب في الفصل السابق على المجال

المغناطيسي يجب أن يمكننا من التعرف على التكامل الداخلى على أنه التكامل اللازم لإيجاد المجال المغناطيسي عند النقطة 2 بسبب عنصر التيار عند النقطة 1 .

مع أننا سنعطى النتيجة فقط ، إنه ليس صعباً جداً أن نستفيد من (١٤) لإيجاد قوة التنافر بين موصلين فتيلين لهما طول لانهائى ، مستقيمين ، متوازيين مع فاصل d ، ويحملان تيارين I متساويين ، ولكنهما متضادان ، كما هو مبين فى شكل ٩-٣ .
التكاملات بسيطة ، وأغلب الأخطاء ترتكب فى تعيين تعبيرات مناسبة لـ dL_1 ، a_{R12} و dL_2 مع ذلك ، لأن شدة المجال المغناطيسى عند أى من السلكين بسبب الآخر معروف فى الحال أنها $I/2\pi d$ ، فإنه واضح تماماً أن الاجابة هى قوة مقدارها $\mu_0 I^2/2\pi d$ نيوتن لكل متر طول .

٩-٤ : فتيلة تيار مارة بـ $P_1 (0,0,0)$ تحمل تياراً مقداره $4A$ فى اتجاه a_z ، وفتيلة ثانية تمر بـ $P_2 (2,5,1)$ ، تحمل أيضاً $4A$ ، ولكن فى اتجاه a_y . (أ) أوجد متجه القوة المؤثرة على عنصر طول تزايدى ΔL_1 من الفتيلة الثانية ، واقعة عند P_2 ، بواسطة عنصر طول تزايدى ΔL_2 من الموصل الأول ، عند P_1 . (ب) أوجد القوة على ΔL_1 عند P_1 المسببة بـ ΔL_2 عند P_2 .

الاجابة : $19.47 \Delta L_1 \Delta L_2 a_y \text{ nN} , 48.7 \Delta L_1 \Delta L_2 a_z \text{ nN}$.



شكل ٩-٣ فتيلتان لانهائيتان متوازيتان مع فاصل d ويارات متساوية ولكن متضادة I تلاقى قوة تنافر مقدارها $\mu_0 I^2/(2\pi d) \text{ N/m}$.

٩-٤ القوة وعزم التدوير على دائرة مغلقة

قد حصلنا سابقاً على تعبيرات عامة للقوى المؤثرة على نظم تيار . حالة خاصة يحسم فيها بسهولة ، لأنه إذا أخذنا علاقتنا للقوة على دائرة مغلقة فتيلية ، كما هو معطى بمعادلة (١٠) ، قسم ٩-٣ ،

$$\mathbf{F} = -I \oint \mathbf{B} \times d\mathbf{L}$$

ونفرض كثافة تدفق مغناطيسي منتظمة ، حيثئذ يمكن أن تخرج B خارج التكامل :

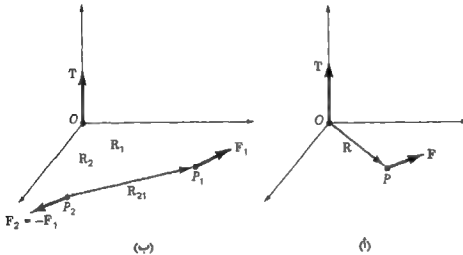
$$\mathbf{F} = -I\mathbf{B} \times \oint d\mathbf{L}$$

على أننا ، اكتشفنا خلال بحثنا للتكاملات الخطية المغلقة في مجال جهد كهروستاتيكي أن $\oint d\mathbf{L} = 0$ ، ولذلك تكون القوة على دائرة فتيلية مغلقة في مجال مغناطيسي منتظم صفرا .

إذا كان المجال غير منتظم ، فلا يكون ضروريا أن تكون القوة الكلية صفرا .

النتيجة للمجالات المنتظمة لا يلزم أن تقتصر على الدوائر الفتيلية فقط . يمكن أن تحتوى الدائرة على تيارات سطحية أو كثافة تيار حجمية كذلك . إذا قسم التيار الكلى الى فتائل ، تكون القوة على كل واحد صفرا ، كما بينا آنفا ، وتكون القوة الكلية صفرا مرة اخرى . لذلك فان أى دائرة مغلقة حثيية تحمل تيارات مستمرة تلاقى متجه قوة كلية تساوى صفرا في مجال مغناطيسي منتظم .

مع أن القوة تساوى صفرا ، عزم التدوير لا يساوى صفرا عامة .



شكل ٩-٤ : (أ) ممثلا ذراع الرفع R ممتدة من نقطة أصل O لنقطة P حيث تؤثر قوة F ، يكون عزم التدوير حول O هو $T = R \times F$. (ب) إذا كان $F_2 = -F_1$ ، فإن عزم التدوير $T = R_{21} \times F_1$ لا يعتمد على اختيار نقطة الأصل R_1 و R_2 .

في تعريف عزم التدوير ، أو العزم ، لقوة ، من الضروري أن نعتبر كلا من نقطة أصل عندها أو حولها يحسب عزم التدوير ، بالإضافة الى النقطة التى تؤثر عندها القوة . فى شكل ٩-٤ ، نطبق قوة F عند نقطة P ، وننشئ نقطة أصل عند O مع ذراع الرفع R ممتدة من O الى P عزم التدوير حول نقطة O متجه مقداره هو حاصل ضرب مقادير R

و F ، وجب الزاوية بين هذين المتجهين . اتجاه متجه عزم التدوير T عمودى على كل من القوة F وذراع الرافعة R ويكون فى اتجاه تقدم برمة يمينية عندما يدار ذراع الرافعة نحو متجه القوة خلال الزاوية الصغرى . عزم التدوير يمكن أن يُعبر عنه كحاصل الضرب بعلامة \times ،

$$T = R \times F$$

الآن دعنا نفرض أن قوتين ، F_1 عند P_1 و F_2 عند P_2 ، لهما ذراعاً رافعة R_1 و R_2 ممتدتان من نقطة أصل مشتركة O كما هو مبين بشكل ٩ - ٤ ب ، تؤثران على جسم ذى شكل ثابت ، وأن الجسم لا يقوم بأى انتقال . حينئذ يكون عزم التدوير حول نقطة الأصل

$$T = R_1 \times F_1 + R_2 \times F_2$$

$$F_1 + F_2 = 0 \quad \text{حيث}$$

ولذلك

$$T = (R_1 - R_2) \times F_1 = R_{21} \times F_1$$

المتجه $R_{21} = R_1 - R_2$ يصل نقطة تأثير F_2 بتلك لـ F_1 ولا يعتمد على اختيار نقطة اصل للمتجهين R_1 و R_2 . لذلك ، لا يعتمد عزم التدوير ايضا على اختيار نقطة الأصل ، بشرط أن تكون القوة الكلية صفراً . وهذا يمكن أن يعمم لـ عدد من القوى .

اعتبر التأثير بقوة متجهة رأسياً الى أعلى عند نهاية ذراع تدوير أفقية فى سيارة قديمة . هذه لا يمكن أن تكون القوة المؤثرة الوحيدة ، لأنه إذا كانت كذلك ، فيجب أن تعجل الذراع كلها فى اتجاه الى أعلى . قوة ثانية ، مساوية فى المقدار لتلك المؤثرة عند نهاية الذراع ، تؤثر فى اتجاه الى أسفل بواسطة سطح التحميل عند محور الدوران . بالنسبة لقوة $40N$ على ذراع تدوير طولها $0.3m$ ، يكون عزم التدوير $12N.m$. هذا الرقم يحصل عليه سواء اعتبرت نقطة الأصل على محور الدوران (مؤدية لـ $12N.m$ زائد $2N.m$) ، عند منتصف الذراع (مؤدية الى $6N.m$ زائد $6N.m$) ، أو عند نقطة ما ليست حتى على الذراع أو امتداد الذراع .

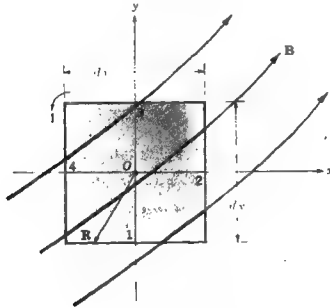
لذلك يمكننا أن نختار نقطة الأصل الأكثر ملاءمة ، وعادة تكون هذه على محور الدوران وفى المستوى المحتوى على القوى المؤثرة إذا كانت القوى المتعددة فى مستوى واحد .

وبهذه المقدمة لمفهوم عزم التدوير ، دعنا الآن نعتبر عزم التدوير على عروة تيار
تفاضلية في مجال مغناطيسي B . تقع العروة في المستوى xy (شكل ٩ - ٥) ؛ جوانب
العروة توازي المحاور x و y وذات أطوال dx و dy . قيمة المجال المغناطيسي عند مركز
العروة مأخوذ أنه B_0 . لأن العروة ذات قدر تفاضلي ، يمكن أخذ قيمة B عند كل نقط
العروة على أنها B_0 . (لماذا لم يكن هذا ممكنا في مناقشة الالتواء والانفراج ؟) .
لذلك تكون القوة الكلية على العروة صفرا ، ولنا حرية اختيار نقطة الأصل لعزم التدوير
عند مركز العروة .

متجه القوة على الجانب I هو

$$dF_1 = I dx \mathbf{a}_x \times B_0$$

$$dF_1 = I dx (B_{0y} \mathbf{a}_z - B_{0z} \mathbf{a}_y) \quad \text{أو}$$



شكل ٩ - ٥ عروة تيار تفاضلية في مجال مغناطيسي B عزم التدوير على العروة

$$dT = I (dx dy \mathbf{a}_z) \times B_0 = I dS \times B$$

لهذا الجانب من العروة تمتد ذراع الرافعة R من نقطة الأصل الى منتصف الجانب
، وتكون المساهمة لعزم التدوير الكلي هي $R_1 = 1/2 dy \mathbf{a}_y$

$$dT_1 = R_1 \times dF_1$$

$$= -1/2 dy \mathbf{a}_y \times I dx (B_{0y} \mathbf{a}_z - B_{0z} \mathbf{a}_y)$$

$$= -1/2 dx dy I B_{0y} \mathbf{a}_x$$

مساهمة عزم التدوير على الجانب 3 يتبين أنها هي نفسها ،

$$dT_3 = \mathbf{R}_3 \times d\mathbf{F}_3 = \frac{1}{2} dy \mathbf{a}_y \times (-I dx \mathbf{a}_x \times \mathbf{B}_0)$$

$$= -\frac{1}{2} dx dy I B_0 \mathbf{a}_z = dT_1$$

$$dT_1 + dT_3 = -dx dy I B_0 \mathbf{a}_z \quad \text{و}$$

بتقدير عزم التدوير على الجانبين 2 و 4 ، نجد

$$dT_2 + dT_4 = dx dy I B_0 \mathbf{a}_y$$

وحيث أن يكون عزم التدوير الكلى

$$d\mathbf{T} = I dx dy (B_0 \mathbf{a}_y - B_0 \mathbf{a}_z)$$

الكمية بين القوسين يمكن أن تمثل بحاصل ضرب بعلامة \mathbf{x} ،

$$d\mathbf{T} = I dx dy (\mathbf{a}_z \times \mathbf{B}_0)$$

$$(١٥) \quad \boxed{d\mathbf{T} = I d\mathbf{S} \times \mathbf{B}} \quad \text{أو}$$

حيث $d\mathbf{S}$ هي المساحة المتجهة لعروة التيار التفاضلية والرمز السفلى لـ \mathbf{B}_0 قد أسقط .

نُعرف الآن حاصل ضرب تيار العروة مع المساحة المتجهة للعروة بعزم ثنائي القطب المغناطيسي التفاضلي $d\mathbf{m}$ ، بوحدات A.m^2 . على ذلك

$$(١٦) \quad \boxed{d\mathbf{m} = I d\mathbf{S}}$$

$$(١٧) \quad \boxed{d\mathbf{T} = d\mathbf{m} \times \mathbf{B}} \quad \text{و}$$

إذا مددنا النتائج التي حصلنا عليها في قسم ٤ - ٧ لثنائي القطب الكهربى التفاضلى بتعيين عزم التدوير المؤثر عليه بمجال كهربى ، نرى نتيجة مشابهة ،

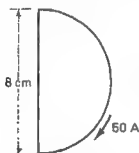
$$d\mathbf{T} = d\mathbf{p} \times \mathbf{E}$$

معادلات (١٥) و (١٧) نتائج عامة تنطبق على عروات تفاضلية ذات أى شكل ، ليست مجرد المستطيلة منها . عزم التدوير على عروة دائرية أو مثلثية يعطى أيضا بدلالة السطح المتجه أو العزم بـ (١٥) أو (١٧) .

لأننا اخترنا عروة تيار تفاضلية حتى أمكننا فرض ثبات B في كل موضع فيها ، وأنه يتيح أن عزم التدوير على عروة مستوى بأى قدر أو شكل في مجال مغناطيسى منتظم يعطى بنفسى التعبير ،

$$(١٨) \quad T = IS \times B = m \times B$$

يجب أن نلاحظ أن عزم التدوير على عروة التيار يتجه دائما أن يدير العروة لكي يتحاذى المجال المغناطيسى الناتج من العروة مع المجال المغناطيسى المؤثر المسبب لعزم التدوير . ربما تكون هذه أبسط طريقة لتحديد اتجاه عزم التدوير .



شكل ٩-٦ انظر مسألة ت ٩-٥

ت ٩-٥ : عروة التيار نصف الدائرة المبنية في شكل ٩-٦ تقع في المستوى $z = 0$. في المجال المغناطيسى المنتظم $B = 0.8a_x - 0.7a_y + a_z \text{ Wb/m}^2$ أوجد : (أ) القوة على الجانب المستقيم (ب) عزم التدوير على العروة حول ذراع رافعة لها نقطة أصل عند مركز الجانب المستقيم .

$$\text{الاجابة : } 3.2a_z \text{ N} - 4a_x , 0.10051a_y \text{ N.m} - 0.0880a_x$$

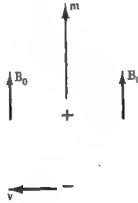
٩-٥ : طبيعة المواد المغناطيسية

نحن الآن في وضع يسمح بتجميع معرفتنا عن فعل مجال مغناطيسى على عروة تيار مع نموذج بسيط لذرة ، ونحصل على بعض الادراك للاختلاف في التصرف لأنواع المواد المختلفة مغناطيسية .

مع أن نتائج كمية دقيقة يمكن أن يتنبأ بها فقط من خلال استخدام نظرية الكم ، فالنموذج الذرى البسيط الذى يفرض أن هناك نواة مركزية موجبة محاطة بالكترونات في مدارات دائرية مختلفة يعطى نتائج كمية معقولة ويعطى نظرية كيفية مرضية . الكترون في مدار يتناظر عروة تيار صغيرة (التى فيها التيار موجه مضادا لاتجاه انتقال الالكترتون) وبهذه الصورة يلاقى عزم تدوير في مجال مغناطيسى خارجى ، عزم التدوير متجه الى

جعل المجال المغناطيسى الناتج من الالكترون المدارى يتحاذى مع المجال المغناطيسى الخارجى . إذا لم يكن هناك أى عزم مغناطيسية أخرى لتعبر ، لاستنتجنا حيث أن كل الالكترونات المدارية فى المادة ستغير اتجاهها بحيث تجمع مجالاتها المغناطيسية مع المجال المؤثر ، وعلى ذلك فإن المجال المغناطيسى المحصل عند أى نقطة فى المادة سيكون أكبر مما يكون عليه عند تلك النقطة اذا لم تكن المادة موجودة .

مع ذلك ، عزم ثاب يعزى للدوران المغزلى للالكترون . مع أنه من المفزى أن يعمل نموذج لهذه الظاهرة باعتبار الالكترون كأنه يدور مغزليا حول محوره وبذلك يولد عزم ثنائى قطب مغناطيسى ، فانه لا يحصل على نتائج كمية مرضية من مثل هذه النظرية . بدلا من ذلك ، من الضرورى استيعاب رياضيات نظرية الكم النسبية لتبين أن الكترونا يمكن أن يكون له عزم مغناطيسى مغزلى حوالى $\pm 9 \times 10^{-24}$ ، والاشارات الزائد والناقص تبين أن المحاذاة يمكن أن تكون مساعدة أو مضادة لمجال مغناطيسى خارجى .



شكل ٩ - الكترون فى مدار ميب له عزم مغناطيسى m فى نفس اتجاه مجال مؤثر B_0 .

فى ذرة موجود بها عديد من الالكترونات ، نجد أنه فقط الدورانات المغزلية لتلك الالكترونات فى الطبقات غير المملوءة تماما ستساهم فى عزم مغناطيسى للذرة .

مساهمة ثالثة لعزم ذرة ينشأ بدوران مغزلى نووى ، ولكن هذا العامل يعطى تأثيرا مهملا على الخواص المغناطيسية الكلية للمادة وسوف لانتبره أكثر من هذا .

على ذلك تحتوى كل ذرة على عدة مركبات عزوم مختلفة ، ومجموعها يحدد الخصائص المغناطيسية للمادة ويعطى تصنيفها المغناطيسى العام . سنشرح باختصار ستة أنواع مختلفة من المادة : دايما مغناطيسية ، بارامغناطيسية ، فرومغناطيسية (عالية

الانفاذية المغناطيسية) ، شديد الفرومغناطيسية ، فرى مغناطيسية ، وفائقة البارامغناطيسية .

دعنا أولا نعتبر تلك الذرات التي فيها المجالات المغناطيسية الصغيرة الناتجة من حركة الالكترونات في مداراتها ، وتلك الناتجة من الدوران المغزلى للالكترونات تتجمع لتعطى مجالا صافيا يساوى صفرا . لاحظ أننا نعتبر هنا المجالات الناتجة من حركة الالكترونات نفسه في غياب أى مجال مغناطيسى خارجى ، ويمكننا أيضا أن نصف هذه المادة كواحدة فيها العزم المغناطيسى الدائم m_0 لكل ذرة يساوى صفرا . مثل هذه المادة تدعى دايامغناطيسية . لذلك يبدو ، أن مجالا مغناطيسيا خارجيا سوف لا يحدث أى عزم تدوير على الذرة ، فلا إعادة اصطفاف لمجالات ثنائى القطب ، وبالنتيجة مجالا مغناطيسيا داخليا يكون هو نفس المجال المؤثر . وهذا صحيح بخطأ يؤدي فقط الى حوالى جزء من مائة الف .

دعنا نختار الكترونا فى مدار عزمه m فى نفس اتجاه المجال المؤثر B_0 (شكل ٩ - ٧) . المجال المغناطيسى ينتج قوة الى الخارج على الالكترون المدارى . وحيث أن نصف القطر المدارى مكمى ولايستطيع التغير ، فان القوة كولومبية للجذب الى الداخل لاتتغير أيضا .

وعدم التوازن للقوة الناتج من القوة المغناطيسية الى الخارج يجب لذلك تعويضه بنقص السرعة المدارية . ومن ثم ، يتناقص العزم المدارى ، وينتج مجالا داخليا أقل .

إذا كنا قد اخترنا ذرة لها m و B_0 متضادان ، لكانت القوة المغناطيسية الى الداخل ، ولزادت السرعة ، ولزاد العزم المدارى ، ولحدثت ملاحظة أكبر لـ B_0 . مرة أخرى سوف ينتج مجال داخلى أقل .

يبين البزموت المعدنى تأثيرا دايامغناطيسيا أعلى من أغلب المواد الدايامغناطيسية الأخرى ، من بينها الهيدروجين ، الهليوم ، الغازات « الخاملة » الأخرى ، كلوريد الصوديوم ، النحاس ، الذهب ، السيليكون ، الجرمانيوم ، الجرافيت ، والكبريت . يجب أيضا أن ندرك أن التأثير الدايامغناطيسى موجود فى كل المواد ، لأنه ينتج من تبادل فعل المجال المغناطيسى الخارجى مع كل الكترون مدارى ، مع ذلك ، فهو يمحجب بتأثيرات أخرى فى المواد التى سوف نعتبرها فيما بعد .

الآن دعنا نناقش ذرة فيها تأثير الدوران المغزلى للالكترون ، والحركة المدارية لايتلاشيان تماما . الذرة ككل لها عزم مغناطيسى صغير ، ولكن التوجيه العشوائى للذرات فى عينة أكبر يعطى عزما مغناطيسيا متوسطا يساوى صفرا . المادة لاتظهر تأثيرات مغناطيسية فى غياب مجال خارجى . عندما يؤثر مجال خارجى ، مع ذلك ، هناك عزم

تدوير صغير على كل عزم ذرى ، وهذه العزوم تنحج لأن تصبح محاذية للمجال الخارجى . هذا التحاذى يعمل على أن تزيد قيمة B خلال المادة عن القيمة الخارجة . لكن ، التأثير الدايامغناطيسى مازال يعمل على الالكترونيات المدارية وقد يضاد الزيادة الآتفة . إذا كانت النتيجة الصافية هى نقص فى B ، فللتزال المادة تسمى دايامغناطيسية . لكن ، إذا كان هناك زيادة فى B ، تدعى المادة پارامغناطيسية . اليوتاسيوم ، الأكسجين ، التنجستن ، العناصر الأرضية النادرة وكثير من أملاحها ، مثل كلوريد الايريوم ، أكسيد النيوديميرم ، وأكسيد اليوتريوم ، أحد المواد المستخدمة فى الميزرات ، هى أمثلة من المواد البارامغناطيسية .

الأنواع الأربعة المتبقية للمواد ، الفرومغناطيسية ، وضديد الفرومغناطيسية ، الفرى مغناطيسية ، وفائقة البارامغناطيسية ، كلها لها عزوم ذرية قوية . علاوة على ذلك ، الفعل المتبادل للذرات المتجاورة يسبب تحاذى للعزوم المغناطيسية للذرات إما بطريقة مساعدة أو مضادة تماما .

فى المواد الفرومغناطيسية كل ذرة لها عزم ثنائى قطب عال نسبيا ، مسبب أساسا بعزوم دوران مغزلى للالكترون غير معادلة . والقوى الذرية المتبادلة تسبب اصطفاظ هذه العزوم بطريقة متوازنة فى مناطق تحتوى على عدد كبير من الذرات . هذه المناطق تسمى مقاطعات ، ويمكن أن يكون لها أشكال ومقاسات متباينة تتراوح من ميكرومتر الى عدة سنتيمترات ، معتمدة على المقاس ، الشكل ، المادة ، والتاريخ المغناطيسى للمينة . المواد البكر الفرومغناطيسية سيكون لها مقاطعات كل منها له عزم مغناطيسى قوى ، عزوم المقاطعة ، مع ذلك ، تتغير فى الاتجاه من مقاطعة الى مقاطعة . لذلك يكون التأثير الكلى هو التلاشى ، والمادة ككل ليس لها عزم مغناطيسى . عند تطبيق مجال مغناطيسى خارجى ، مع ذلك ، تلك المقاطعات التى لها عزوم فى اتجاه المجال المؤثر يزيد حجمها على حساب جيرانها ، ويزيد المجال المغناطيسى الداخلى كثيرا عن ذلك للمجال الخارجى بمفرده . عند ازالة المجال الخارجى ، لايتحقق عادة صف عشوائى تماما للمقاطعات ، ويتبقى مجال ثنائى قطب فى التكوين الماكروسكوبى . الحقيقة أن العزم المغناطيسى للمادة مختلف بعد ازالة المجال ، أو أن الحالة المغناطيسية للمادة دالة فى تاريخها المغناطيسى ، تسمى تخلفية ، وهو موضوع سيناقش مرة أخرى عندما ندرس الدوائر المغناطيسية بعد صفحات قليلة من الآن .

المواد الفرومغناطيسية ليست موحدة الخواص فى البلورات مفردة ، ولذلك ستقصر مناقشتنا على المواد متعددة البلورات ، فيما عدا ذكر أن إحدى خصائص المواد المغناطيسية غير موحدة الخواص هو التخضر بالمغناطيسية ، أو التغير فى أبعاد البلورة عندما يسلط مجال مغناطيسى عليها .

العناصر الوحيدة التي تكون فرومغناطيسية عند درجة حرارة الغرفة هي الحديد ، النيكل ، والكوبالت ، وتنفد كل خصائصها الفرومغناطيسية فوق درجة حرارة تسمى درجة حرارة كوري ، التي هي $2,043K$ للحديد . بعض سبائك هذه المعادن مع بعضها ومع معادن أخرى تكون أيضا فرومغناطيسية ، على سبيل المثال الالنيكو (alnico) ، سبيكة ألومنيوم - نيكل - كوبالت مع قدر قليل من النحاس . عند درجات حرارة أقل تكون بعض العناصر الأرضية النادرة ، مثل جادولينيوم (gadolinium) وديسبروزيوم (dusprosium) ، فرومغناطيسية . وهام أيضا أن بعض سبائك المعادن غير الفرومغناطيسية تكون فرومغناطيسية ، مثل بزموث - منجنيز ونحاس - منجنيز - قصدير .

في المواد صديد الفرومغناطيسية ، تسبب القوى بين الذرات المتجاورة أن تصطف العزوم الذرية بشكل عكسي التوازي . ويكون العزم المغناطيسي الصافي صفرا ، وتتأثر المواد صديد الفرومغناطيسية طفيفا فقط بوجود مجال مغناطيسي خارجي . هذا التأثير اكتشف أولا في أكسيد المنجنيز ، ولكن عدة مئات من المواد صديد الفرومغناطيسية قد عينت منذ ذلك الوقت . وتتضمن أكاسيد عدة ، كبريتيدات ، وكلوريدات ، مثل أكسيد النيكل (NiO) ، كبريتيد الحديد (FeS) وكلوريد الكوبالت (CoCl₂) . توجد صديد الفرومغناطيسية فقط عند درجات الحرارة المنخفضة نسبيا ، غالبا أقل من درجة حرارة الغرفة بكثير . التأثير ليس ذو أهمية هندسية حاليا .

المواد الفرى مغناطيسية تظهر أيضا اصطفا عكسي التوازي للعزوم الذرية المتجاورة ، ولكن العزوم ليست متساوية . ولذلك تحدث استجابة عالية لمجال مغناطيسي خارجي ، مع أنه ليس عاليا مثل ذاك في المواد الفرومغناطيسية . وأكثر مجموعة من المواد الفرومغناطيسية أهمية هي الفريتات ، التي تكون فيها الموصلية منخفضة ، بعدد من رتبة العظم أقل من تلك لأشباه الموصلات . وحقيقة أن هذه المواد ذات مقاومة أعلى من المواد الفرومغناطيسية تنتج تيارات متجهة بالحث أصغر بكثير في المادة عندما تؤثر مجالات مترددة ، على سبيل المثال في قلوب المحولات التي تعمل عند الترددات الأعلى . التيارات المخفضة (تيارات دوامية) تؤدي إلى فقد أومي (ohmic) أقل في قلب المحول . أكسيد المغنيتي (Fe₃O₄) ، نيكل - زنك فريت (Ni_{1/2}Zn_{1/2}Fe₂O₄) ، ونيكل فريت (NiFe₂O₄) هي أمثلة لذلك النمط من المواد . تختفى أيضا الفرى مغناطيسية فوق درجة حرارة كوري .

المواد فائقة البارمغناطيسية تتكون من تجميع لجسيمات فرومغناطيسية في مصفوفة غير فرومغناطيسية . مع أن هناك مقاطعات موجودة داخل الجسيمات المفردة ، لاستطيع حوايط المقاطعة أن تحترق مصفوفة المادة المتخللة إلى الجسم المجاور . ومثال هام هو الشريط المغناطيسي المستخدم في المسجلات الشريطية الصوتية والتليفزيونية .

٩-٦ : التفاضل والانفاذية :

لكي نضع وصفا للمواد المغناطيسية على أساس كمي أكثر ، سنخصص الآن صفحة أو ما يقرب من ذلك لبيان كيف تتصرف ثنائيات القطب المغناطيسية كمصدر موزع للمجال المغناطيسي . ستكون نتيجةنا معادلة تشبه كثيرا قانون أمبير الدائري ، $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I$ لكن التيار سيكون حركة الشحنات المقيدة (الإلكترونات المدارية ، الدوران المغزلي للإلكترون . والدوران المغزلي للنواة) ، والمجال ، الذي له أبعاد \mathbf{H} يسمى التفاضل \mathbf{M} . التيار الناتج من الشحنات المقيدة يسمى تيار مقيد ، أو تيار أمبيرى .

دعنا نبدأ بتعريف التفاضل \mathbf{M} بدلالة عزم ثنائي القطب المغناطيسي \mathbf{m} . يدور التيار المقيد I_b حول مسار يحصر مساحة تفاضلية dS منشأ عزمًا ثنائيًا قطبيا ،

$$\mathbf{m} = I_b dS$$

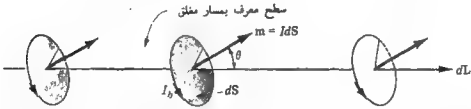
إذا كان هناك n من ثنائيات قطب مغناطيسية لكل وحدة حجم ونعتبر حجما Δv ، فإن العزم الكلى لثنائيات القطب المغناطيسي توجد بالمجموع المتجه ،

$$\mathbf{m}_{\text{total}} = \sum_{i=1}^n \mathbf{m}_i \quad (19)$$

كلا من \mathbf{m}_i يمكن أن يكون مختلفا . بعد ذلك ، نعرف التفاضل \mathbf{M} على أنه عزم ثنائي القطب المغناطيسي لكل وحدة حجم .

$$\mathbf{M} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \sum_{i=1}^n \mathbf{m}_i$$

ونرى أن وحداتها يجب أن تكون مثل تلك لـ \mathbf{H} ، أمبير لكل متر .



شكل ٩-٨ جزء $d\mathbf{L}$ مسار مغلق الذي على طوله قد تحاذت جزئيا قطب مغناطيسية بواسطة مجال مغناطيسي خارجي . قد سبب التفاضل زيادة التيار المقيد الماير للسطح المغلق بالمسار المغلق بقدر $nI_b dS \cdot d\mathbf{L}$.

الآن دعنا نعتبر تأثير بعض التفاضل لثنائيات القطب المغناطيسية كنتيجة لتأثير مجال مغناطيسي . سنفحص هذا التفاضل على طول مسار مغلق ، جزء قصير منه مبين في

شكل ٩-٨ . يبين الشكل عدة عزوم مغناطيسية m والتي تعمل زاوية θ مع عنصر المسار dL ، كل عزوم يتكون من تيار مقيد I_b يدور حول مساحة dS . نعتبر لذلك حجما صغيرا ، $dL \cos\theta$ ، أو $dS \cdot dL$ ، يوجد خلاله $ndS \cdot dL$ ثنائيات قطب مغناطيسية . أثناء التغيير من توجهه عشوائي الى هذا التوافق الجزئي ، قد زاد التيار المقيد العابر للسطح المحصور بالمسار (على يسارنا عندما نسير في اتجاه z في شكل ٩-٨) بمقدار I_b لكل من الـ $ndS \cdot dL$ ثنائيات القطب . على ذلك

$$(٢٠) \quad dI_b = nI_b dS \cdot dL = M \cdot dL$$

وخلال محيط كامل مغلق ،

$$(٢١) \quad I_b = \oint M \cdot dL$$

إن مجرد ماثقوله معادلة (٢١) أنه إذا ذهبنا حول مسار مغلق ووجدنا عزوم ثنائيات قطب تذهب مع طريقنا أكثر غالبية من العكس ، فسيكون هناك تيار مناظر يتكون من ، على سبيل المثال ، الإلكترونات مدارية عابرة للسطح الداخلي .

هذا التعبير الأخير يحمل بعض الشبه مع قانون أمبير الدائري ، ويمكننا الآن تعميم العلاقة بين B و H بحيث تنطبق على أوساط غير الفضاء الحر . مناقشتنا الحالية للتيار مؤسدة على القوى وعزوم التدوير على دوائر تيار تفاضلية في مجال B ، ولذلك نأخذ B على أنها كميتنا الأساسية ونبحث عن تعريف محسن لـ H . وعلى ذلك نكتب قانون أمبير الدائري بدلالة التيار الكلي ، مقيد زائد حر ،

$$(٢٢) \quad \oint \frac{B}{\mu_0} \cdot dL = I_T$$

$$I_T = I_b + I \quad \text{حيث}$$

I هو التيار الحر الكلي المحصور بالمسار المغلق . لاحظ أن التيار الحر يظهر بدون رمز سفلى لأنه نوع التيار ذو الأهمية العظمى وسيكون التيار الوحيد الظاهر في معادلات ماكسويل .

بضم هذه المعادلات الثلاث الأخيرة ، نحصل على تعبير للتيار الحر المحصور ،

$$(٢٣) \quad I = I_T - I_b = \oint \left(\frac{B}{\mu_0} - M \right) \cdot dL$$

يمكننا الآن تعريف H بدلالة B و M ،

$$(٢٤) \quad H = \frac{B}{\mu_0} - M$$

ونرى أن $B = \mu_0 H$ في الفضاء الحرجي يساوي التمنط صفرا . هذه العلاقة تكتب عادة في صورة تتجنب الكسور والاشارات السالبة :

$$(٢٥) \quad \boxed{B = \mu_0(H + M)}$$

يمكننا الآن استخدام مجالنا H الجديد التعريف في (٢٣) ،

$$(٢٦) \quad I = \oint H \cdot dL$$

حاصلين على قانون أمبير الدائري بدلالة التيارات الحرة . باستخدام كثافات التيار المعدية ، نحصل على

$$I_b = \oint_S J_b \cdot dS$$

$$I_T = \oint_S J_T \cdot dS$$

$$I = \oint_S J \cdot dS$$

بمساعدة نظرية ستوكس ، يمكننا بذلك تحويل (٢٦) ، (٢٦) ، و (٢٢) الى علاقات الالتواء المكافئة :

$$\nabla \times M = J_b$$

$$\nabla \times \frac{B}{\mu_0} = J_T$$

$$(٢٧) \quad \boxed{\nabla \times H = J}$$

سنؤكد فقط على (٢٦) و (٢٧) ، التعبيرين المشتغلين على الشحنة الحرة ، في العمل الذي يلي .

العلاقة بين B ، H و M المعبر عنها بـ (٢٥) يمكن أن تبسط للأوساط موحدة الخواص الخطية حيث يمكن تعريف قابلية التأثير المغناطيسية χ_m

$$(٢٨) \quad \boxed{M = \chi_m H}$$

على ذلك يكون لدينا

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mu_0(\mathbf{H} + \chi_m \mathbf{H}) \\ &= \mu_0 \mu_R \mathbf{H} \end{aligned}$$

(٢٩) $\boxed{\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}}$ أو

حيث الانفاذية μ ،

(٣٠) $\boxed{\mu = \mu_0 \mu_R}$

معرفة بدلالة انفاذية نسبية μ_R ،

(٣١) $\boxed{\mu_R = 1 + \chi_m}$

مرتبطة بقابلية التأثير .

كمثال على استخدام هذه الكميات المغناطيسية العديدة ، دعنا نختار مادة فريت لها $\mu_R = 50$ ونعمل بكثافات تدفق كافية الانخفاض بحيث يكون معقولا استخدام علاقة خطية .
لدينا

$$\chi_m = \mu_R - 1 = 49$$

وإذا أخذنا $B = 0.05 \text{ Wb/m}^2$ ، فإن

$$B = \mu_R \mu_0 H$$

$$H = \frac{0.05}{50 \times 4\pi \times 10^{-7}} = 796 \text{ A/m} \quad \text{و}$$

التمنط هو $H \chi_m$ ، أو $39,000 \text{ A/m}$. الطرق المختلفة لربط B و H هي ، أولا ،

$$B = \mu_0(H + M)$$

$$0.05 = 4\pi \times 10^{-7}(796 + 39,000) \quad \text{أو}$$

ونرى أن التيارات الامبيرية تنتج 49 مرة كثافة المجال المغناطيسى بالنسبة لما تنتجه الشحنت الحرة ، وثانياً ،

$$B = \mu_R \mu_0 H$$

$$0.05 = 50 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 796 \quad \text{أو}$$

حيث نستخدم إنفاذية نسبية قيمتها 50 ونضع هذه الكمية تأخذ في الحساب تماماً حركة الشحنت المقيدة . سنؤكد على التفسير الأخير في الفصول التالية .

القانونان الأولان اللذان فحصناهما للمجالات المغناطيسية كانا قانون بيو-سافار وقانون أمبير الدائري . كلاهما كانا مقصورين على الفضاء الحر في تطبيقهما . ويمكن الآن مد إستخدامهما لأى مادة مغناطيسية متجانسة ، خطية موحدة الخواص التى يمكن أن توصف بدلالة إنفاذية نسبية μ_R .

بالضبط مثلما وجدنا للمواد العازلة غير موحدة الخواص ، يجب أن توصف مادة مغناطيسية غير موحدة الخواص بدلالة إنفاذية مختلفة :

$$B_x = \mu_{xx} H_x + \mu_{xy} H_y + \mu_{xz} H_z$$

$$B_y = \mu_{yx} H_x + \mu_{yy} H_y + \mu_{yz} H_z$$

$$B_z = \mu_{zx} H_x + \mu_{zy} H_y + \mu_{zz} H_z$$

بالنسبة للمواد غير موحدة الخواص ، تكون μ كمية ممتدة فى العلاقة $B = \mu H$ ومع ذلك . نبقى $B = \mu_0(H + M)$ صحيحة ، مع أن B ، H و M لم تعد عامة متوازية . المادة المغناطيسية غير الموحدة الخواص الأكثر شيوعاً هى بلورة مفردة فرومغناطيسية ، مع أن الأغشية الرقيقة المغناطيسية تبدى أيضاً عدم وحدة فى الخواص . معظم تطبيقات المواد الفرومغناطيسية ، مع ذلك ، تشتمل على تنظيم متعدد البلورات والذى يصنع بأكثر سهولة بدرجة كبيرة .

تعاريفنا لقابلية التأثير والانفاذية تعتمد أيضاً على افتراض الخطية . لسوء الحظ ، هذا صحيح فقط فى المواد البارامغناطيسية والدايامغناطيسية الأقل أهمية التى نادراً ما تختلف الإنفاذية النسبية لها عن الوحدة بأكثر من جزء فى الألف . بعض القيم

النموذجية لتقابلية التأثير لمواد دايامغناطيسية هي الهيدروجين ، $10^{-5} \times 2 -$ ،
النحاس ، $10^{-5} \times 0.9 -$ ، الجرمانيوم ، $10^{-5} \times 0.8 -$ ، السيليكون ،
 $10^{-5} \times 0.3 -$ ، والجرافيت ، $10^{-5} \times 12 -$. عدة قابليات تأثر بارامغناطيسية ممثلة
هي الأكسجين ، $10^{-6} \times 2$ ، تنجستن ، $10^{-5} \times 6.8$ ، أكسيد الحديدك :
 $10^{-3} \times 1.4$ Fe₂ O₃ ، وأكسيد التيتانيوم $10^{-6} \times 0.35$ Y₂ O₃ إذا أخذنا ببساطة
نسبة B الى H μ_0 على أنها الانفاذية النسبية لمادة فرومغناطيسية ، فقيم نموذجية لـ μ_R
ستمد من 10 الى 100,000 . المواد الدايامغناطيسية ، البارامغناطيسية ، وضديد
الفرومغناطيسية يقال عامة أنها غير مغناطيسية .

ت ٩ - ٦ : أوجد مقدار شدة المجال المغناطيسي داخل مادة فيها : (أ) كثافة التدفق
المغناطيسي $4\pi Wb/m^2$ والانفاذية النسبية 1.008 ، (ب) قابلية التأثير المغناطيسية -
0.006 والتمغنط A/m 19 ، (ج) هناك $8.1 \times 10^{28} atoms/m^3$ ، كل ذرة لها عزم ثنائي
قطب $10^{-30} \times 4$ و $10^{-4} \times \chi_m$.

الاجابة : $3,240 A/m^2$, $3,170 A/m^2$, $3,160 A/m^2$

ت ٩ - ٧ : في مادة مغناطيسية معينة ، $H = 5\pi^2 a_0 A/m$ و $\mu = 4 \times 10^{-6} H/m$. عند
 $\rho = 2$ ، أوجد : (أ) J_b ، (ب) I_T ، (ج) J .

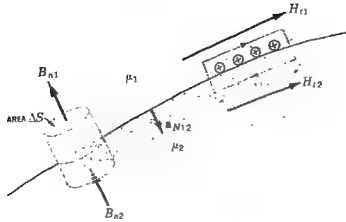
الاجابة : $174.6a_0 A/m^2$, $255a_0 A/m^2$, $80a_0 A/m^2$.

٩ - ٧ : شروط الحدود المغناطيسية

يجب ألا يكون لدينا أى صموية فى الوصول الى شروط الحدود السليمة لتطبيق
على B , H , M عند السطح البيني بين مادتين مغناطيسيتين مختلفتين ، لأننا قد قمنا
بحل مسائل مماثلة لكلا المواد الموصلة والموازل . فلانحتاج إلى طريقة تقنية جديدة .

يبين شكل ٩ - ٩ حداً بين مادتين خطيتين موحدتى الخواص متجانستين مع إنفاذية

μ_1 و μ_2 .



شكل ٩-٩ ، سطح جاوسي ومسار مغلق منشآن عن الحدين الوسطين 1 و 2 ، لهما الانفاذية μ_1 و μ_2 ، بالترتيب .
من هذا نعين شروط الحدود $B_{n1} = B_{n2}$ و $H_{t1} - H_{t2} = K$.

شروط الحدود على المركبات العمودية يعين بالسماح للسطح أن يقطع سطح جاوسي اسطوانى صغير . بتطبيق قانون جاوس للمجال المغناطيسى من قسم ٨-٥ ،

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

$$B_{n1} \Delta S - B_{n2} \Delta S = 0 \quad \text{نجد أن}$$

$$(٣٢) \quad \boxed{B_{n2} = B_{n1}} \quad \text{أو}$$

$$(٣٣) \quad H_{n2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} H_{n1} \quad \text{على ذلك}$$

المركبة العمودية لـ B مستمرة ، ولكن المركبة العمودية لـ H غير مستمرة بمقدار النسبة μ_1/μ_2 .

العلاقة بين المركبات العمودية لـ M ، بالطبع ، محددة مادامت العلاقة بين المركبات العمودية لـ H معروفة . للمواد المغناطيسية الخطية ، تكتب النتيجة ببساطة بالصورة

$$(٣٤) \quad M_{n2} = \frac{\chi_{m2} \mu_1}{\chi_{m1} \mu_2} M_{n1}$$

بعد ذلك ، نطبق قانون أمبير الدائري

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I$$

حول مسار مغلق صغير في مستوى عمودي على سطح الحدود ، كما هو مبين على اليمين
في شكل ٩-٩ . نجد أن

$$H_{11} \Delta L - H_{12} \Delta L = K \Delta L$$

حيث نفرض أن الحد يمكن أن يحمل تيارا سطحيا K الذي مركبه عموديا على مستوى
المسار المغلق هي K . على ذلك

$$(٣٥) \quad H_{11} - H_{12} = K$$

تحدد الاتجاهات بأكثر انضباط باستخدام الضرب بعلامة \times لتمييز المركبات المماسية ،

$$(H_1 - H_2) \times \mathbf{a}_{N12} = K$$

حيث \mathbf{a}_{N12} هي وحدة العمودي على الحد موجها من المنطقة 1 إلى المنطقة 2 بالنسبة لـ
B المماسية ، لدينا

$$(٣٦) \quad \frac{B_{11}}{\mu_1} - \frac{B_{12}}{\mu_2} = K$$

شرط الحدود على المركبة المماسية للمتغصن بالنسبة لمواد خطية هي لذلك

$$(٣٧) \quad M_{12} = \frac{\chi_{m2}}{\chi_{m1}} M_{11} - \chi_{m2} K$$

شرط الحدود الثلاثة الأخيرة على المركبات المماسية تكون طبعا أكثر بساطة بقدر
كبير ، إذا كانت كثافة التيار السطحية صفرا . هذه كثافة تيار حر ، ويجب أن تكون صفرا
إذا لم يكن أى من المادتين موصلا .

ت ٩-٨ : مادتان موحدتا الخواص ، متجانستان ، خطيتان لهما سطح بينى عند :
 $x = 0$ عليه تيار سطحي ، $K = 200 \mathbf{a}_y$ A/m . لـ $x < 0$ ، $\mu_{R1} = 2$ ، و $x > 0$ ، $\mu_{R2} = 5$ أوجد :
(أ) H_2 ، (ب) $|B_1|$ ، (ج) $|B_2|$.

الاجابة : $60 \mathbf{a}_x - 400 \mathbf{a}_y + 50 \mathbf{a}_z$ ، 1.244 m Wb/m^2 ، 2.56 m Wb/m^2 .

٩ - ٨ : الدائرة المغناطيسية

فى هذا القسم سنتحرف قليلا عن الموضوع الرئيسى لنناقش الطرق التتبية الاساسية المشتتلة فى حل نوع من المسائل المغناطيسية معروف بالدوائر المغناطيسية . كما سنرى بعد قليل ، الاسم ينبع من الشبه الكبير مع تحليل دوائر التيار المستمر المقاومة والمفترض أننا جميع متمكنين منها . الفرق الهام الوحيد يقع فى الطبيعة غير الخطية للأجزاء القرومغناطيسية للدائرة المغناطيسية ، الطرق التى يجب اتخاذها تشبه تلك المطلوبة فى دوائر كهربية غير خطية التى تحتوى صمامات ثنائية ، ثرمستورات ، فتائل متوهجة ، وعناصر غير خطية أخرى .

وكنقطة بداية مناسبة ، دعنا نميز معادلات المجال التى يؤسس عليها تحليل دائرة مقاومة . فى نفس الوقت سنبين أنستتبط المعادلات المناظرة للدائرة المغناطيسية . سنبدأ بالجهد (الكهروستاتيكى وعلاقته بشدة المجال الكهبرى ،

$$(٣٨) \quad E = -\nabla V$$

الجهد المغناطيسى المقياسى قد عرف سابقا ، وعلاقته المناظرة بشدة المجال المغناطيسى هى

$$(٣٨) \quad H = -\nabla V_m$$

فى التعامل مع دوائر مغناطيسية ، من المناسب أن نسمى القوة الدافعة المغناطيسية ، أو V_m ، وسنعترف بالتناظر مع القوة الدافعة الكهربية ، أو V (ق د ك) بعمل ذلك . وحدات الـ V_m هى ، بالطبع ، الأمبير ، ولكن من المعتاد أن نذكر أن ملفات من عدة لفات تستخدمل كثيرا باستخدام التعبير « أمبير - لفة » . تذكر أنه لايمكن لتيار المرور فى منطقة فيها V_m معرفة .

فرق الجهد الكهبرى بين نقطتى A و B يمكن أن يكتب بالصورة

$$(٣٩) \quad V_{AB} = \int_A^B E \cdot dL$$

والعلاقة المقابلة بين الـ V_m (ق د م) وشدة المجال المغناطيسى ،

$$(٣٩) \quad V_{mAB} = \int_A^B H \cdot dL$$

استنبطت في الفصل الثامن ، حيث تعلمنا أن المسار المختار يجب ألا يقطع سطح الحاجز المختار .

قانون أوم للدائرة الكهربية له الصورة النقطية

$$(١٤٠) \quad \mathcal{E} = \sigma E$$

ونرى أن كثافة التدفق المغناطيسي ستكون المناظرة لكثافة التيار ،

$$(١٤١) \quad \boxed{B = \mu H}$$

لايجاد التيار الكلي ، يجب أن تكامل :

$$(١٤١) \quad I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

عملية مقابلة ضرورية لتحديد التدفق المغناطيسي الكلي المار خلال المقطع العرضي لدائرة مغناطيسية :

$$(١٤٢) \quad \boxed{\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}}$$

عرفنا حيثذ المقاومة على أنها النسبة بين فرق الجهد والتيار ، أو

$$(١٤٣) \quad V = IR$$

وسنعرف الآن الممانعة على أنها النسبة بين القوة الدافعة المغناطيسية والتدفق الكلي ، على ذلك

$$(١٤٤) \quad \boxed{V_m = \Phi \mathcal{R}}$$

حيث تُقاس الممانعة بالأمبير- لفة لكل وير (A.T/Wb) .

في المقاومات المصنوعة من مواد متجانسة موحدة الخواص خطية ذات موصلية σ ولها مقطع عرضي منتظم مساحته S وطول d ، تكون المقاومة الكلية

$$(١٤٥) \quad R = \frac{d}{\sigma S}$$

إذا كنا محظوظين بما فيه الكفاية ليكون لدينا مثل هذه المادة المغناطيسية المتجانسة موحدة الخواص الخطية ذات طول d ومقطع عرضي منتظم S ، فحيثذ تكون الممانعة الكلية

$$(٤٣) \quad \mathcal{R} = \frac{d}{\mu \bar{S}}$$

الوحيدة لمثل هذه المادة التي ستطبق عامة عليها هذه العلاقة هي الهواء .

فى النهاية ، دعنا نعتبر المناظر لفولتية المنبع فى دائرة كهربية نعرف أن التكامل الخطى المغلق لـ E هو صفر ،

$$\oint E \cdot dL = 0$$

بتمبير آخر ينص قانون كيرشوف للجهد أن الارتفاع فى الجهد خلال المنبع يساوى بالضبط الانخفاض فى الجهد خلال الحمل . التعبير للمظاهرة المغناطيسية يتخذ صورة مختلفة طفيفا ،

$$\oint H \cdot dL = I_{\text{total}}$$

لأن التكامل الخطى المغلق ليس صفرا . وحيث أن التيار الكلى المرتبط بالمسار يتم الحصول عليه عادة بالسماح لتيار I بأن يمر خلال ملف ذى N لفة ، يمكننا أن نعبّر عن هذه النتيجة بالصورة

$$(٤٤) \quad \oint H \cdot dL = NI$$

فى دائرة كهربية يكون منبع الفولتية جزءا من المسار المغلق ، فى الدائرة المغناطيسية سيحيط أو يرتبط الملف الحامل للتيار بالدائرة المغناطيسية . عند تتبع دائرة مغناطيسية سوف لانستطيع أن نحدد زوجا من الأطراف عندها تؤثر قوة دافعة مغناطيسية . التناظر هنا أقرب لزوج من الدوائر المقترنة يوجد فيها فولتية مولدة بالحث (وفيها سنرى فى الفصل العاشر أن التكامل الخطى المغلق لـ E هو أيضا ليس صفرا) .

دعنا نجرب بعض هذه الأفكار على دائرة مغناطيسية بسيطة . لكى نتجنب تعقيدات المواد الفرومغناطيسية فى هذا الوقت سنفرض أن لدينا ملفا حلليا ذا قلب هوائى مع 500 لفة ، ومساحة مقطع عرضى 6cm^2 ، نصف قطر متوسط 25cm ، و تيار ملف مقداره 4A . كما نعرف سابقا ، المجال المغناطيسى محصور فى داخل الملف الحلقى ، وإذا اعتبرنا المسار المغلق لدائرتنا المغناطيسية على طول نصف القطر المتوسط ، نرتبط بـ $2,000\text{A}\cdot\text{t}$ ،

$$V_{m, \text{source}} = 2,000 \text{ A} \cdot \text{t}$$

مع أن المجال فى الملف الحلقى ليس منتظما تماما ، يمكن أن نفرض أنه كذلك لكل الأغراض العملية ونحسب الممانعة الكلية للدائرة كما يلى

$$\mathcal{H} = \frac{d}{\mu S} = \frac{2\pi 0.15}{4\pi 10^{-7} \times 6 \times 10^{-4}} \\ = 1.25 \times 10^9 \text{ A} \cdot \text{t/Wb}$$

على ذلك

$$\Phi = \frac{V_{m.s}}{\mathcal{H}} = \frac{2,000}{1.25 \times 10^9} = 1.6 \times 10^{-6} \text{ Wb}$$

هذه القيمة للتدفق الكلى فى خطأ بأقل من 1/4 فى المائة ، بالمقارنة مع القيمة المتحصل عليها عندما يستخدم التوزيع المضبوط للتدفق على المقطع العرضى .
على ذلك

$$B = \frac{\Phi}{S} = \frac{1.6 \times 10^{-6}}{6 \times 10^{-4}} = 2.67 \times 10^{-3} \text{ Wb/m}^2$$

$$H = \frac{B}{\mu} = \frac{2.67 \times 10^{-3}}{4\pi 10^{-7}} = 2,120 \text{ A} \cdot \text{t/m}$$

وأخيرا ،

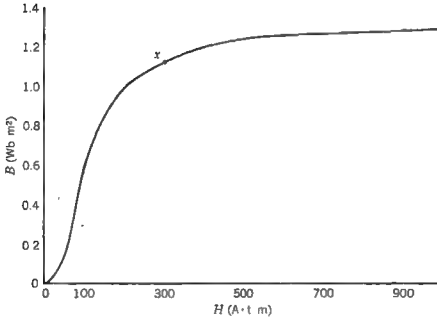
كتحقق ، يمكننا تطبيق قانون أمبير الدائرى مباشرة فى هذه المسألة المتماثلة ،

$$H_{\phi} 2\pi r = NI$$

ونحصل على

$$H_{\phi} = \frac{NI}{2\pi r} = \frac{500 \times 4}{6.28 \times 0.15} = 2,120 \text{ A/m}$$

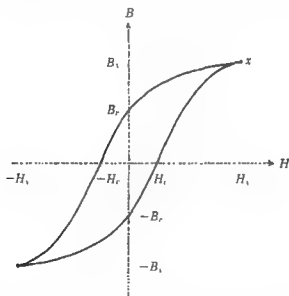
عند نصف القطر المتوسط .



شكل ٩ - ٩٠ ، منحنى تمغنط لمغناطيس من لوح صلب سيليكونى ،

دائرتنا المغناطيسية في هذا المثال لانعطينا أى فرصة لايجاد الـ (ق د م) عبر العناصر المختلفة في الدائرة ، لأن هناك نوعا واحدا من المواد فقط . الدائرة الكهربائية المناظرة هي ، بالطبع ، منبع مفرد ومقاوم مفرد . على ذلك نستطيع أن نجعلها تبدو طويلة تماما مثل التحليل آنفا إذا أوجدنا كثافة التيار ، شدة المجال الكهربى ، التيار الكلى ، المقاومة ، وفولتية المنبع .

مسائل هامة أكثر وعملية أكثر تظهر عندما توجد مواد فرومغناطيسية في الدائرة . دعنا نبدأ باعتبار العلاقة بين H و B في مثل هذه المادة . يمكننا فرض أننا ننشئ منحنى لـ B مع H لعينة من مادة فرومغناطيسية والتي أزيل تمغنطها تماما ، كلا B و H صفرا . بينما نبدأ استعمال (ق د م) ، ترتفع كثافة التدفق أيضا ، ولكن ليس خطيا ، كما تبين النتائج التجريبية لشكل ٩ - ١٠ بالقرب من نقطة الأصل . بعد وصول H قيمة حوالى 100 A.t/m ، ترتفع كثافة التدفق ببطء أكثر وتبدأ تشبع عندما تكون H عدة مئات من A.t/m . أما وقد وصل إلى تشبع جزئى ، دعنا الآن نهتم بشكل ٩ - ١١ ، حيث يمكننا أن نستمر في تجربتنا عند نقطة x بتخفيض H . بينما نفعل هذا ، تبدأ تأثيرات التخلفية في الظهور ، ولانرجع على منحنائنا الأصيل . حتى بعد أن تكون H صفرا ، $B = B_r$ ، كثافة التدفق المتبقية . عندما تُعكس H ، ثم ترجع ثانية الى الصفر ، وتبعب الدورة الكاملة عدة مرات ، يحصل على دورة التخلفية لشكل ٩ - ١١ . الـ (ق د م) المطلوبة لتخفيض كثافة التدفق الى صفر يرمز لها بـ H_c ، « القوة » القهرية .



شكل ٩ - ١١ . دورة تخلفية لصلب سيليكونى . القوة القهرية H_c ، وكثافة التدفق المتبقية B_r مبيان .
لقيم عظمى أصغر لـ H يحصل على دورات تخلفية أصغر ، والمحل الهندسى للأطراف تقريبا مثل منحنى التمنغط البكر لشكل ٩ - ١٠ .

دعنا نستخدم منحني التمتعظ للصلب السيليكوني لحل مسألة دائرة مغناطيسية مختلفة طفيفا عن مثلنا السابق . سنستخدم قلب صلب في الملف الحلقى ، فيما عدا ثغرة هوائية ذات 2mm . توجد دوائر مغناطيسية بثغرات هوائية لأن الثغرات تدخل عن قصد في بعض الأجهزة ، مثل ملفات المحاثة التي يجب أن تحمل تيارات مستمرة عالية لأنها لا يمكن تجنبها في أجهزة أخرى مثل الآلات الدوارة ، أو بسبب مشاكل لا يمكن تجنبها في التجميع . مازال هناك 500 لفة حول الملف الحلقى ، ونسأل ما هو التيار المطلوب لإنشاء كثافة تدفق مقدارها 1 Wb/m^2 في كل موضع في القلب . هذه الدائرة المغناطيسية تناظر دائرة كهربية تحتوى على منبع فولتية ومقاومين ، أحدهما غير خطي . لأننا قد أعطينا « التيار » فمن السهل إيجاد « الفولتية » عبر كل عنصر على التوالي ، ومن ثم (ق د م) الكلية . في الثغرة الهوائية ،

$$\mathcal{H}_{\text{air}} = \frac{d_{\text{air}}}{\mu_0 \mu_S} = \frac{2 \times 10^{-3}}{4\pi 10^{-7} \times 6 \times 10^{-4}} = 2.65 \times 10^6 \text{ A} \cdot \text{t/Wb}$$

بمعرفة التدفق الكلى

$$\Phi = BS = 1(6 \times 10^{-4}) = 6 \times 10^{-4} \text{ Wb}$$

التي هي نفسها في كل من الصلب والهواء ، يمكننا أن نوجد الـ (ق د م) المطلوبة للثغرة ،

$$V_{m, \text{air}} = (6 \times 10^{-4})(2.65 \times 10^6) = 1.590 \text{ A} \cdot \text{t}$$

بالرجوع إلى شكل ٩ - ١٠ ، شدة مجال مغناطيسي مقدارها 200A.t/m مطلوبة لتنتج كثافة تدفق مقدارها 1 Wb/m^2 في الصلب . على ذلك

$$H_{\text{steel}} = 200 \text{ A} \cdot \text{t}$$

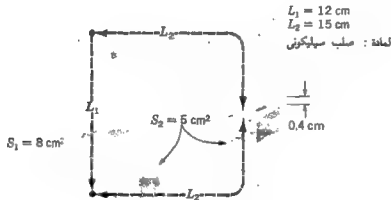
$$\begin{aligned} V_{m, \text{steel}} &= H_{\text{steel}} d_{\text{steel}} = 200 \times 0.30\pi \\ &= 188 \text{ A} \cdot \text{t} \end{aligned}$$

ال ق د م الكلية تكون لذلك 1,778A.t ، ومطلوب تيار ملف قيمته 3.56A .

يجب أن نتبين أننا قد عملنا عدة تقريبات في الحصول على هذه الاجابة . قد ذكرنا سابقا عدم وجود مقطع عرضي منتظم تماما ، أو تماثل اسطوانى ، مسار كل خط تدفق ليس بنفس الطول . اختيار طول مسار « متوسط » يمكن أن يساعد في تعويض هذا الخطأ في مسائل قد يكون فيها أكثر أهمية منها في مثلنا . تدفق التهذب في الثغرة الهوائية هو مصدر آخر للخطأ ، و متاح صيغ يمكن بواسطتها أن نحسب طولاً فعالاً ومساحة مقطع عرضي للثغرة التي ستعطي نتائج أكثر دقة . هناك أيضا تسرب تدفق بين لفائف السلك ، وفي اجهزة تحتوى على ملفات مركزة على قسم واحد من القلب ، تعبر خطوط تدفق قليلة داخل الملف الحلقى . التهذب والتسرب مشكلتان نادرا ما تبرزان في

الدائرة الكهربائية لأن نسبة موصليات الهواء والمواد الموصلة أو المقاومة عالية جدا . على العكس ، بين منحنى التمثيل للصلب السليكوني أن نسبة H إلى B في الصلب حوالي 200 حتى « الركبة » في منحنى التمثيل ، هذا يقارن مع نسبة في الهواء حوالي 800,000 . على ذلك ، مع أن التدفق يفضل الصلب عن الهواء بنسبة مسيطرة مقدارها 4,000 إلى 1 ، هذه ليست قريبة جدا لنسب الموصليات ذات ، مثلا ، 10^{15} لموصل جيد وعازل مقبول .

كمثال أخير ، دعنا نعتبر المسألة العكسية . إذا أعطيت تيار ملف مقداره 4A في الدائرة المغناطيسية السابقة ، كم ستكون كثافة التدفق ؟ أولا دعنا نحاول أن نقرب خطيا منحنى التمثيل بخط مستقيم من نقطة الأصل إلى $B = 21$ ، $H = 200$. يكون لدينا حيث $B = H/200$ في الصلب و $B = \mu_0 H$ في الهواء الممانعتان يوجد أنهما 0.314×10^6 للمسار الصلب و 2.65×10^6 للثغرة الهوائية ، أو كليا 2.96×10^6 لأن V_m هو 2,000A.t ، يكون التدفق 6.76×10^{-4} Wb و $B = 1.13$ Wb/m² . يمكن الحصول على حل أكثر دقة بفرض عدة قيم لـ B وحساب الـ (ق د م) اللازمة . رسم النتائج يمكننا أن نعين القيمة الصحيحة لـ B بالاستكمال من الداخل . بهذه الطريقة نحصل على $B = 1.10$ Wb/m² . الدقة الجيدة للنموذج الخطي تنتج من الحقيقة أن ممانعة الثغرة الهوائية في دائرة مغناطيسية تكون غالبا أكبر بكثير من ممانعة الجزء الفرومغناطيسي من الدائرة .



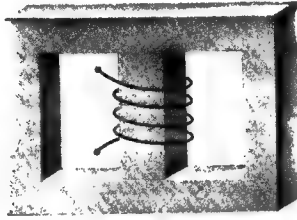
شكل ٩-١٢ انظر مادة ت ٩-٩ .

على ذلك يمكن التفاضل عن تقريب سيء نسبيا للحديد أو الصلب .
 ت ٩-٩ : إذا أعطيت الدائرة المغناطيسية لشكل ٩-١٢ ، افترض $B = 0.8$ Wb/m² عند منتصف الساق اليسرى وأوجد : (أ) هواء V_m ، (ب) صلب V_m ، (ج) التيار المطلوب في ملف له 1,500 لفة حول الساق اليسرى .

الاجابة : 2.91 ; 290A.t ; 4,070 A.t .

ت ٩ - ١٠ : بالنسبة لقيم B تحت الركبة على منحنى التمتعظ للصلب السيليكونى ، من الممكن فرض تعامل خطى بـ $\mu_R = 4,000$. القلب المبين فى شكل ٩ - ١٣ له مساحات قيمها 1cm^2 وأطوال قيمها 10cm فى كلا الساقين الخارجيتين ، ومساحة قيمتها 2.4cm^2 وطول 3cm فى الساق المركزية . ملف ذو $1,200$ لفة يحمل 9mA وضع حول الساق المركزية . وأوجد B فى : (أ) الساق المركزية ، (ب) الساق اليسرى ، (ج) الساق اليمنى إذا قطعت ثغرة هوائية طولها 0.2mm فى كل فرع رأسى .

الاجابة : 0.0341 Wb/m^2 , 0.434 Wb/m^2 , 0.362 Wb/m^2



شكل ٩ - ١٣ . انظر مسألة ت ٩ - ١٠

٩ - ٩ : طاقة الجهد والقوى على المواد المغناطيسية

فى المجال الكهروستاتيكى قدما أولا الشحنة النقطية والقانون التجريبي للقوة بين الشحنات النقطية . بعد تعريف شدة المجال الكهربى ، كثافة التدفق الكهربى ، والجهد الكهربى ، كنا قادرين على إيجاد تعبير للطاقة فى مجال كهروستاتيكى بإيجاد الشغل اللازم لإحضار الشحنات النقطية المطلوبة من مالانهاية الى مواضع سكونها النهائى . والتعبير العام للطاقة هو

$$(٤٥) \quad W_E = \frac{1}{2} \int_{\text{vol}} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \, dv$$

حيث فُرضت علاقة خطية بين \mathbf{E} و \mathbf{D} .

هذا لا يعمل بمثل هذه السهولة للمجال المغناطيسى الثابت . قد يبدو أننا يمكن أن نفرض مصدرين بسيطين ، ربما لوحا تيار ، نجد القوة على أحدهما نتيجة الآخر ، حرك

اللوح مسافة تفاضلية ضد هذه القوة ، وسأوى الشغل اللازم بالتغير فى الطاقة . اذا فعلنا ، ستكون بالتأكيد مخطئين ، لأن قانون فاراداي (الذى سيظهر فى الفصل التالى) يبين أن سيكون هناك فولتية متجة بالحث فى لوح التيار المتحرك والذى يجب أن يحافظ على التيار ضدها . مهما يكن المصدر المغذى للوح التيار يتج أنه يتلقى نصف الطاقة التى نضعها فى الدائرة بتحريكها .

بتعبير آخر ، يمكن تعيين كثافة الطاقة فى المجال المغناطيسى بسهولة أكثر بعد أن تناقش المجالات المتغيرة مع الزمن . سنستبط التعبير المناسب أثناء مناقشة نظرية بويتنيج فى الفصل الحادى عشر .

مع ذلك ، طريقة بديلة تكون ممكنة فى هذا الوقت ، لأنه يمكننا أن نعرف مجالا مغناطيسيا استاتيكا مؤسا على ثنائيات قطب مغناطيسية (أو « شحنات مغناطيسية ») مفترضة . باستخدام الجهد المغناطيسى المقياسى ، نستطيع حينئذ استنباط تعبير للطاقة بطرق مماثلة لتلك التى استخدمت فى الحصول على علاقة الطاقة الكهروستاتيكية . هذه الكميات المغناطيسية الاستاتيكية التى نضطر أن ندخلها قد تكون ثمنا باهضا لندفعه مقابل نتيجة بسيطة ، ولذلك سنقدم النتيجة فقط فى هذا الوقت ونبين أن نفس التعبير يظهر فى نظرية بويتنيج فيما بعد . الطاقة الكلية المخزنة فى مجال مغناطيسى ثابت فيه B ترتبط خطيا مع H هى

$$(٤٦) \quad W_H = \frac{1}{2} \int_{vol} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \, dv$$

بجمل $B = \mu H$ ، نحصل على الصيغ المكافئة .

$$(٤٧) \quad W_H = \frac{1}{2} \int_{vol} \mu H^2 \, dv$$

أو

$$(٤٨) \quad W_H = \frac{1}{2} \int_{vol} \frac{B^2}{\mu} \, dv$$

مرة أخرى من المناسب أن نفكر فى هذه الطاقة على أنها موزعة خلال الحجم بكثافة طاقة مقدارها $\frac{1}{2} B \cdot H \, J/m^3$ ، مع أنه ليس لدينا تبرير رياضى لمثل هذا التعبير .

بالرغم من الحقيقة أن هذه النتائج صحيحة فقط للأوساط الخطية ، يمكننا أن نستخدمها لحساب القوى على مواد مغناطيسية غير خطية إذا ركزنا اهتمامنا على الأوساط الخطية (عادة هواء) التى قد تحيط بها . مثلا ، افترض أن لدينا ملفا لولبيا طويلا مع قلب من صلب سيليكونى . يحيط به ملف يحتوى على n لفة لكل متر مع تيار I . لذلك تكون شدة المجال المغناطيسى فى القلب $nIA \, t/m$ ، ويمكن الحصول على كثافة

اسمعى المعاميسى من محضى التمتفظ للصلب السيليكونى . دعنا نسمى هذه القيمة B_H ، افترض أن القلب مكون من اسطوانتين كل منهما نصف - لانهاية^(١) وهما يكادان يتلامسان . الآن نؤثر بقوة ميكانيكية لفصل هذين القسمين من القلب بينما نحفظ بكثافة التدفق ثابتة . نؤثر بقوة F خلال مسافة dL ، على ذلك يبذل شغل FdL . هنا لاجابة لتطبيق قانون فاراداي ، لأن المجالات فى القلب لم تتغير ، ونستطيع لذلك أن نستخدم مبدأ الشغل الافتراضى لتحسين أن الشغل الذى قد عملناه فى تحريك قلب واحد يظهر كطاقة مخزنة فى الثغرة الهوائية التى أوجدناها . بواسطة (٤٨) انفا ، هذه الزيادة هى

$$dW_H = F dL = \frac{1}{2} \frac{B_H^2}{\mu_0} S dL$$

حيث S مساحة المقطع العرضى للقلب . على ذلك

$$F = \frac{B_H^2 S}{2\mu_0}$$

مثلا ، إذا كانت شدة المجال المغناطيسى كافية لتتج تشبعا فى الصلب ، تقريبا :
 $I = 4 \text{Wb/m}^2$ ، تكون القوة

$$F = 7.80 \times 10^5 \text{ S N}$$

أو 113 lb/in^2 تقريبا .

ت ٩ - ١١ : متابع كهرومغناطيسى معين يمكن تقريبه بجزء من الحديد طوله 10 cm ومقطعه 1 cm^2 مع $\mu_R = 1,500$ ، على التوالى مع ثغرة هوائية ذات طول 1 mm عندما يكون المتابع مفتوحا . افرض أن مساحة الثغرة هى أيضا 1 cm^2 يحتوى الملف على $5,000$ لفه ويحمل 15 mA . أوجد القوة المؤثرة على حافظة المغناطيس (الجزء المتحرك من الدائرة المغناطيسية) عندما يكون طول الثغرة : (أ) 1 mm ، (ب) 0.3 mm ، (ج) 0.1 mm .

الاجابة : 12.72 N ، 2.63 N ، 0.311 N .

٩ - ١٠ : المحاطة والمحاطة المتبادلة

المحاطة هى الأخيرة من البارامترات الثلاث المألوفة من نظرية الدوائر التى نعرفها بتعابير أكثر تعميما . المقاومة عرفت فى الفصل الخامس كنسبة فرق الجهد بين

(١) اسطوانة نصف لانهاية هى اسطوانة ذات طول لانهاى احدى النهايتين واقعة فى فراغ محدود .

السطحين متساويين - الجهد لمادة موصلة إلى التيار الكلي العابر لأي من السطحين المتساويين - الجهد . المقاومة دالة في هندسة التوصيل والموصلية فقط . السعة عرفت في نفس الفصل كنسبة الشحنة الكلية على أي من سطحين موصليين متساويين - الجهد إلى فرق الجهد بين السطحين . السعة دالة فقط في الشكل الهندسي للسطحين الموصليين وسماحية الوسط المازل بينهما أو المحيط بهما . شرح المقاومة والسعة كتناصير دائرة سيفحص بشمول أكثر في قسم ١٣ - ١ .

كمقدمة لتعريف المحاطة ، نحتاج أولاً أن نقدم مفهوم وصلية التدفق . دعنا نعتبر ملفاً حلقيًا ذا N لفة فيه تيار I ينتج تدفقاً كلياً Φ . سنفرض أولاً أن هذا التدفق يربط أو يلتف حول كل من اللفات N ، ونرى أيضاً أن كلا من اللفات N تتصل بالتدفق الكلي Φ . تعرف وصلية التدفق $N\Phi$ كحاصل ضرب عدد اللفات N والتدفق Φ الذي يربط كل منها^(١) . ملف له لفة مفردة ، وصلية التدفق تساوي التدفق الكلي .

نعرف الآن المحاطة (أوالمحاطة الذاتية) كنسبة وصليات التدفق الكلية إلى التيار الذي يربطها

$$(٤٩) \quad L = \frac{N\Phi}{I}$$

التيار I المار في الملف ذي الـ N من الملفات ينتج تدفقاً كلياً Φ و $N\Phi$ وصلية تدفق ، حيث نفرض حالياً أن التدفق Φ يربط كل لفة . هذا التعريف يمكن تطبيقه فقط على الأوساط المغناطيسية الخطية ، لكي يكون التدفق متناسباً مع التيار .

إذا وجدت مواد فرومغناطيسية ، فليس هناك تعريف مفرد للمحاطة بحيث يكون مفيداً في كل الحالات ، وسنقتصر اهتمامنا على المواد الخطية .

وحدة المحاطة هي الهنرى (H) ، مكافئة لوير - لفة لكل أمبير .

دعنا نطبق (٤٩) بطريقة مباشرة لنحسب المحاطة لكل متر طول لكابل محوري ذي نصف قطر داخلي a ونصف قطر خارجي b . يمكننا أخذ تعبير التدفق الكلي المستبط كما في معادلة (٤٧) في الفصل الثامن ،

$$\Phi = \frac{\mu_0 I d}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

ونحصل على المحاطة بسرعة لطول d ،

$$L = \frac{\mu_0 d}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \quad H$$

(١) الرمز λ يستخدم عادة لوصليات التدفق مع ذلك سنستفيد من هذا المفهوم أحياناً ، وكيفما كان سنستمر في كتابتها $N\Phi$.

أو، على أساس كل متر،

$$(٥٠) \quad L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \quad \text{H/m}$$

في هذه الحالة ، لفة $N = I$ ، وكل التدفق يربط كل التيار .

في المسألة الخاصة بملف حلقي ذي N لفة وتيار I ، كما هو مبين في شكل

٨ - ١١ ب ، لدينا

$$B_\phi = \frac{\mu_0 NI}{2\pi\rho}$$

إذا كانت أبعاد المقطع العرضي صغيرة بالنسبة لنصف القطر المتوسط ρ_0 للملف الحلقي ، حيثئذ يكون التدفق الكلي

$$\Phi = \frac{\mu_0 NIS}{2\pi\rho_0}$$

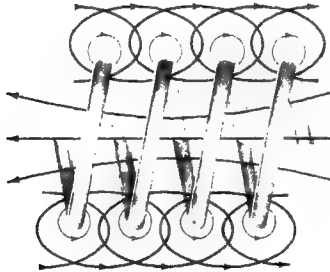
حيث S هي مساحة المقطع العرضي . بضرب التدفق الكلي في N ، نحصل على وصلية التدفق ، وبالقسمة على I ، نحصل على المحاطة

$$(٥١) \quad L = \frac{\mu_0 N^2 S}{2\pi\rho_0}$$

مرة أخرى قد فرضنا أن كل التدفق يربط كل اللفات ، وهذا فرض جيد لملف

حلقي ذي لفات عديدة ملفوفة بإحكام من بعضها . افترض ، مع ذلك ، أن ملفنا الحلقي

له فاصل محسوس بين اللفات ، جزء قصير منه قد يبدو كما في شكل ٩ - ١٤ .



شكل ٩ - ١٤ جزء من ملف بين وصليات تدفق جزئية . وصليات التدفق الكلية يحصل عليها بجمع التدفقات الرابطة كل لفة .

وصليات التدفق لم تعد حاصل ضرب التدفق عند نصف القطر المتوسط مع العدد الكلى لللفات . لكي نحصل على وصليات التدفق الكلية يجب أن ننظر الى الملف على أساس لفة بلفة .

$$(N\Phi)_{\text{total}} = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_i + \dots + \Phi_N$$

$$= \sum_{i=1}^N \Phi_i$$

حيث Φ_i هو التدفق الرابط للفة i . أفضل من عمل هذا . نستخدم عادة على الخبرة وكميات تجريبية تسمى عوامل اللف ، وعوامل الخطوة لضبط الصيغة الأساسية حتى تطبق على العالم الفيزيائي الحقيقي .
تعريفنا مكافئاً للمحاكاة يمكن أن يعمل باستخدام وجهة نظر الطاقة ،

$$(٥٢) \quad L = \frac{2W_H}{I^2}$$

حيث I هو التيار الكلى المار فى المسار المغلق و W_H هى الطاقة فى المجال المغناطيسى الناتج عن التيار . بعد استخدام (٥٢) للحصول على عدة تعبيرات أخرى للمحاكاة ، سنبين أنها مكافئة لـ (٤٩) .
أولا نغير عن طاقة الجهد W_H بدلالة المجالات المغناطيسية

$$(٥٣) \quad L = \frac{\int_{\text{vol}} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \, d\tau}{I^2}$$

ثم نستبدل \mathbf{B} بـ $\nabla \times \mathbf{A}$ ،

$$L = \frac{1}{I^2} \int_{\text{vol}} \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \, d\tau$$

المتطابقة المتجهة ،

$$(٥٤) \quad \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) \equiv \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{H})$$

يمكن أن تثبت بالفك فى إحداثيات كرتيزية . حيثخذ تكون المحاكاة

$$(٥٥) \quad L = \frac{1}{I^2} \left[\int_{\text{vol}} \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) \, d\tau + \int_{\text{vol}} \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) \, d\tau \right]$$

بعد تطبيق نظرية الانفراج على التكامل الأول وجعل $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ فى التكامل الثانى ، نحصل على

$$L = \frac{1}{I^2} \left[\int_S (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{vol}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} d\tau \right]$$

التكامل السطحي صفر ، لأن السطح يحتوى الحجم المحتوى على كل الطاقة المغناطيسية ، وهذا يتطلب أن تكون \mathbf{A} و \mathbf{H} صفرا على السطح المحد . لذلك يمكن أن نكتب المعادلة بالصورة

$$(٥٦) \quad L = \frac{1}{I^2} \int_{\text{vol}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} d\tau$$

تعتبر معادلة (٥٦) عن المعادلة بدلالة تكامل لقيم \mathbf{A} و \mathbf{J} عند كل نقطة لأن كثافة التيار توجد فقط خلال الموصل ، يكون التكامل صفرا عند كل النقط خارج الموصل ، ولانحتاج تعيين الجهد المغناطيسى المتجه هناك . الجهد المتجه هو ذاك الناشئ من التيار \mathbf{J} ، وأى منبع تيار اخر مساهم بمجال جهد متجه فى منطقة كثافة التيار الأصلية ينفى تجاهلها فى الوقت الحالى . فيما بعد سنرى أن ذلك يؤدى الى معادلة متبادلة . الجهد المغناطيسى المتجه \mathbf{A} بسبب \mathbf{J} معطى بمعادلة (٥١) ، الفصل الثامن

$$\mathbf{A} = \int_{\text{vol}} \frac{\mu \mathbf{J}}{4\pi R} dv$$

والمعادلة يمكن لذلك التعبير عنها أكثر قاعديا كتكامل حجمى مزدوج متعب نوعا ،

$$(٥٧) \quad L = \frac{1}{I^2} \int_{\text{vol}} \left(\int_{\text{vol}} \frac{\mu \mathbf{J}}{4\pi R} dv \right) \cdot \mathbf{J} dv$$

يُحصل على تعبير تكاملى أبسط طفيفا بقصر اهتمامنا على فتائل تيار ذات مقطع عرضى صغير والتي يمكن لها استبدال $\mathbf{J} dv$ بـ $I d\mathbf{L}$ والتكامل الحجمى بتكامل خطى مغلق على محور الفتيلة ،

$$(٥٨) \quad L = \frac{1}{I^2} \oint \left(\oint \frac{\mu I d\mathbf{L}}{4\pi R} \right) \cdot I d\mathbf{L} \\ = \frac{\mu}{4\pi} \oint \left(\oint \frac{d\mathbf{L}}{R} \right) \cdot d\mathbf{L}$$

اهتمامنا الحالى الوحيد فى معادلتى (٥٧) و (٥٨) ينحصر فى تضمينها أن المعادلة دالة فى توزيع التيار فى الفراغ أو هندسة شكل الموصل .

لكى نحصل على تعريفنا الأصيل للمعادلة (٤٩) دعنا نفترض توزيع تيار منتظم فى موصل فتيلى ذى مقطع عرضى صغير . بحيث تصبح $\mathbf{J} dv$ فى (٥٦) $I d\mathbf{L}$ ،

$$(٥٩) \quad L = \frac{1}{I} \int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L}$$

لمقطع عرضي صغير ، يمكن أن تؤخذ $d\mathbf{L}$ على طول منتصف الفتيلة . نطبق الآن نظرية ستوكس ونحصل على

$$L = \frac{1}{I} \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}$$

$$L = \frac{1}{I} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad \text{أو}$$

$$(٦٠) \quad L = \frac{\Phi}{I} \quad \text{أو}$$

بتتبع الخطوات التي قد حصل بها على (٦٠) ، يجب أن نرى أن التدفق Φ هو ذلك الجزء من التدفق الكلي الذي يمر خلال أي وكل سطح مفتوح الذي محيطة هو مسار التيار الفتيلي .

إذا سمحنا للفتيلة أن تعمل N من اللفات المتطابقة حول التدفق الكلي ، وهو أمر مثالي يمكن أن يتحقق بتقريب جيد في بعض أنواع المحاثات ، التكامل الخطي المغلق يجب أن يتكون من N من اللفات حول هذا المسار العام وتصبح (٦٠)

$$(٦١) \quad L = \frac{N\Phi}{I}$$

التدفق Φ هو الآن التدفق العابر لأي سطح محيطة هو المسار المشغول بأي واحدة من اللفات N . مع ذلك ، المحاطة لملف ذي N من اللفات مازال يمكن الحصول عليها من (٦٠) إذا ادركنا أن التدفق هو ذلك الذي يعبر السطح المعقد^(١) الذي يتكون محيطة من جميع اللفات N .

استخدام أي من تعبيرات المحاطة لموصل فتيلي حقيقي (له نصف قطر صفري) يؤدي إلى قيمة لانهائية للمحاطة ، بدون اعتبار لشكل الفتيلة . بالقرب من الموصل يبين قانون أمبير الدائري أن شدة المجال المغناطيسي تتغير عكسيا مع المسافة من الموصل ، وفي الحال يبين تكامل بسيط أن كمية طاقة لانهائية وكمية تدفق لانهائية محتواة داخل أي أسطوانة محدودة حول الفتيلة . هذه الصعوبة تزال بتحديد نصف قطر فتيلي صغير ولكن محدود .

(١) مشابه متحدرا حلزونيا .

الداخل لآى موصل يحوى أيضا تدفقا مغناطيسيا ، وهذا التدفق يربط جزءا متغيرا من التيار الكلى ، معتمدا على موضعه . وصلات التدفق هذه تؤدى الى مخافة داخلية والتي يجب أن تضاف الى المخافة الخارجية لنحصل على المخافة الكلية . المخافة الداخلية لسلك مستقيم طويل ذى مقطع عرضى دائرى مع توزيع تيار منتظم هى : $\frac{\mu}{8\pi} H I M$ ، وهي نتيجة مطلوبة فى مسألة عند نهاية هذا الفصل .

فى الفصل الحادى عشر سبرى أن توزيع التيار فى موصل عند الترددات العالية يتجه الى أن يكون مركزا قرب السطح . التدفق الداخلى يقل ، ويكفى عادة أن نعتبر المخافة الخارجية فقط . ومع ذلك ، عند الترددات الأدنى يمكن أن تصبح المخافة الداخلية جزءا ملموسا من المخافة الكلية .

نختتم بتعريف المخافة المتبادلة بين دائرتين I و I_2 ، بدلالة وصلات تدفق متبادلة .

$$(٦٢) \quad M_{12} = \frac{N_2 \Phi_{12}}{I_1}$$

حيث تعنى Φ_{12} التدفق الناتج من I_1 الذى يربط مسار التيار الفئلى I_2 ، و N_2 عدد اللفات فى الدائرة 2 .

تعتمد المخافة المتبادلة ، لذلك ، على تبادل الفعل المغناطيسى بين التيارين . مع أى واحد من التيارين وحده ، يمكن إيجاد الطاقة الكلية المخزنة فى المجال المغناطيسى بدلالة مخافة منفردة ، أو مخافة ذاتية ؛ مع كلا التيارين لهما قيم غير صفرية ، تكون الطاقة الكلية دالة للمحاثتين الذاتيتين والمخافة المتبادلة . بدلالة طاقة متبادلة ، يمكن بيان أن (٦٢) تكافىء

$$(٦٣) \quad M_{12} = \frac{1}{I_1 I_2} \int_{\text{vol}} (\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{H}_2) dv$$

$$(٦٤) \quad M_{12} = \frac{1}{I_1 I_2} \int_{\text{vol}} (\mu \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{H}_2) dv \quad \text{أو}$$

حيث \mathbf{B}_1 هى المجال الناتج عن I_1 (مع $I_2 = 0$) و \mathbf{H}_2 هى المجال بسبب I_2 (مع $I_1 = 0$) . تبادل الرموز السفلية لايفير الطرف الأيمن من (٦٤) ، ولذلك

$$(٦٥) \quad M_{12} = M_{21}$$

المخافة المتبادلة تقاس أيضا بالهنرى ، ونعتمد على السياق ليمح لنا أن نميزها من التضمن ، الذى يُمثل أيضا بـ M .

كمثال على حساب المحاثية الذاتية والمتبادلة ، دعنا نفرض ملفين لولبيين متحدى المحور ذوى نصفى قطرين R_1 و R_2 ، $R_2 > R_1$ ، يحملان تيارين I_1 و I_2 مع n_1 و n_2 لفات لكل متر ، بالترتيب من معادلة (١٥) ، الفصل الثامن ، ندع $n_2 = N/d$ ، ونحصل على

$$H_1 = n_1 I_1 a_z \quad (0 < \rho < R_1)$$

$$= 0 \quad (\rho > R_1)$$

$$H_2 = n_2 I_2 a_z \quad (0 < \rho < R_2)$$

$$= 0 \quad (\rho > R_2)$$

و

على ذلك ، لهذا المجال المنتظم

$$\Phi_{12} = \mu_0 n_1 I_1 \pi R_1^2$$

$$M_{12} = \mu_0 n_1 n_2 \pi R_1^2$$

و

$$\Phi_{21} = \mu_0 n_2 I_2 \pi R_1^2$$

بالمثل ،

$$M_{21} = \mu_0 n_1 n_2 \pi R_1^2 = M_{12}$$

إذا كانت $R_1 = 2\text{cm}$ ، $n_2 = 80$ لفة /cm ، $n_1 = 50$ لفة /cm ،

و $R_2 = 3\text{cm}$ فإن

$$M_{12} = M_{21} = 63.0 \text{ mH/m}$$

بينما

$$L_2 = 227 \text{ MH/m} \text{ و } L_1 = 39.4 \text{ mH/m}$$

نرى ، لذلك ، أن هناك طرقاً عديدة متاحة لحساب المحاثية الذاتية والمتبادلة . لسوء الحظ ، حتى المسائل ذات الدرجة العالية من التماثل تعطى تكاملات صعب جداً تقييمها ، ومسائل قليلة فقط متاحة لنا لتجرب مهارتنا عليها .

المحاثية ستناقش بصيغ الدائرة فى الفصل الثالث عشر .

ت ٩-١٢ : أوجد المحاثية الذاتية لـ : (أ) 2m من كابل محورى مع $a = 1.5\text{mm}$ و $b = 7.5\text{mm}$ ، ومملوء بفريت له $\mu_R = 120$ ، (ب) ملف حلقي له 600 لفة ملفوف على قالب خشبي مقطعه العرضي مربع $2 \times 2\text{cm}$ ونصف قطر داخلي 2.5cm ، (ج) ملف لولبي له 600 ، لفة مع نصف قطر 2cm ، طول 40cm ، مع $\mu_R = 100$ لـ $0 < \rho < 3\text{mm}$ و $1 \text{ لـ } \mu_R < 2\text{cm} < 0.3$.

الاجابة : $77.3\mu\text{H}$; $846\mu\text{H}$; $4,590\mu\text{H}$.

ت ٩ - ١٣ : ملف لولبي ذو 1,200 لفة ، طول 60cm ، وقطر 1cm ملفوف على قلب اسطواني له $\mu_R = 12$. هذا الملف مركز ليكون متحد المحور داخل ملف لولبي ثانى له 800 لفة وطوله 60cm وقطر 3cm . احسب المحاطة الذاتية لكل ملف لولبي والمحاطة المتبادلة بينهما . القلب الأسطواني يجب أن يكون موجودا فى كل الحسابات .
الاجابة : 1.895mH , 12.11mH , 2.84MH .

مراجع مقترحة

- 1 - Azaroff, L.V., and J.J. Broph: "Electronic Process in Materials", McGraw - Hill Book Company, New York, 1963
المواد المغناطيسية مناقشة فى الفصل الثالث عشر .
(انظر المراجع المقترحة للفصل الخامس)
- 2 - Fano, R.M., L. J. Chu, and R.B. adler
المواد المغناطيسية مغطاة فى الفصل الخامس .
(انظر المراجع المقترحة للفصل الخامس)
- 3 - Matsch, L.W.:
الفصل الثالث مخصص للدوائر المغناطيسية والمواد الفرومغناطيسية .

مسائل

- ١ - شحنة نقطية مقدارها 4C تتحرك خلال مجال كهربي منتظم $E = 3a_z$ V/m . عند $T = 0$ ، وضعت الشحنة النقطية عند نقطة الأصل ولها سرعة مقدارها $5a_z$ m/s . لتبسيط الأعداد ، افرض كتلة مقدارها 1kg . استخدم معادلة القوة وقوانين نيوتن لتحصل على المعادلات التفاضلية المناسبة ، حلها ، واحسب عند $t = 2s$:
(أ) موضع الشحنة $P(x,y,z)$ ، (ب) سرعتها v ، (ج) طاقة حركتها .
- ٢ - شحنة نقطية مقدارها 4C تتحرك خلال مجال مغناطيسى منتظم $B = 3a_z$ Wb/m² . عند $t = 0$ ، وضعت الشحنة النقطية عند نقطة الأصل ولها سرعة $5a_z$ m/s . لتبسيط الأعداد ، افرض كتلة مقدارها 1kg . استخدم معادلة القوة وقوانين نيوتن لتحصل على المعادلات التفاضلية المناسبة ، وحلها . قد يكون من المساعد أن نلاحظ أن حل المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية التى يحصل عليها أغلب الطلبة معطى فى قسم ٧ - ٥ . ثم احسب عند $t = 2s$: (أ) موضع الشحنة $P(x,y,z)$ ، (ب) سرعتها v ، (ج) طاقة حركتها .

٣- إلكترون له سرعة مقدارها 10^6 m/s في اتجاه a_z في مجال مغناطيسي $B = 0.2a_x - 0.3a_y + 0.5a_z \text{ Wb/m}^2$. (أ) ما المجال الكهربائي الموجود إذا لم

تؤثر قوة صافية على الإلكترون ؟
(ب) إذا كانت $E = E_0(a_x + a_y + a_z)$ ، حيث $E_0 > 0$ ، عين E_0 بحيث تكون صافي القوة على الإلكترون 0.2 pV .

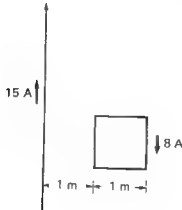
٤- شحنة نقطية موجبة كتلتها m وسرعتها $v = v_0 a_x$ تنتقل في المجالين الكهربائي والمغناطيسي المنضمين ، $E = E_0 a_y$ و $B = B_0 a_z$. إذا فرضنا أن v_0 ، E_0 و B_0 جميعها موجبة ، صف اتجاه القوة الابتدائية على الشحنة إذا كانت v_0 تساوى :
(أ) E_0/B_0 ، (ب) $0.5E_0/B_0$ ، (ج) $2E_0/B_0$.

٥- الموصلات في شكل ٩-١٥ كلها فتيلة والذي على اليسار لانهاى الطول . أوجد متجه القوة المؤثرة على كل من الجوانب الأربعة للعمود المربعة ثم أعطى القوة المتجهة الكلية على العمود .

٦- تيار مقداره 20 A يمر في اتجاه a_z على طول كل المحور x في فضاء حر . (أ) أوجد متجه القوة المؤثرة على عنصر فتيلة تزايدية $I \Delta y a_y$ عند $(0, y, 2)$. (ب) أوجد متجه القوة الكلية على فتيلة محدودة ، $3a_y \text{ A}$ ، موضوعه عند :
 $z = 2$ ، $0 \leq y \leq 5$ ، $x = 0$

٧- في المستوى $z = 0$ ، كثافة التدفق المغناطيسي لها مركبة في اتجاه :
 $B_z = 1.6 / (x^2 + 1) \mu \text{ Wb/m}^2$ ، ماهو متجه القوة المؤثرة على تيار سطحي $K = 0.1a_y \text{ A/m}$ في جزء من المستوى $z = 0$ المحدود بـ
 $-\infty < x < \infty$ ، $0 < y < 1$

٨- تيار فتيلي مقداره 8 mA يمر نحو نقطة الأصل على المحور x الموجب ثم مبتعدا عن نقطة الأصل على المحور y الموجب . (أ) أوجد متجه القوة المؤثرة على طول تفاضلى $dL a_y$ واقع عند $(0, y, 0)$. (ب) ما متجه القوة الكلية الموجودة على الطول الممتد من $y = 1 \text{ mm}$ إلى $y = 1 \text{ km}$ ؟



شكل ٩-١٥ انظر مسألة ٥ .

٩ - (أ) استخدم معادلة ١٤ - ٩ ، قسم ٩ - ٣ ، لتبين أن قوة التجاذب لكل وحدة طول بين موصلين فتيلين في فضاء حرم مع تيارين I_1 و I_2 عند $x = 0$ و $y = \frac{1}{2}d$ ، و I_2 عند $x = 0$ و $y = -\frac{1}{2}d$ هي $\mu_0 I_1 I_2 / (2\pi d)$. (ب) بين كيف يمكن استخدام طريقة أبسط للتحقق من إجابتك .

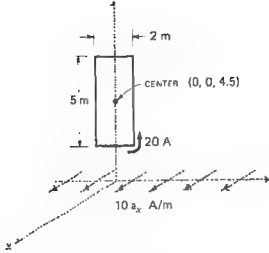
١٠ - ثلاث فتائل تيار لانهائية في المستوى $x = 0$ مرتبة كمايلي في فضاء حر : $10A$ في اتجاه a_y عند $z = 2$ ، $3A$ في اتجاه a_y عند $z = 1$ ، $7A$ في اتجاه a_y عند $z = -2$. أوجد متجه القوة لكل متر طول على كل .

١١ - فتيلة تيار لانهائية على المحور z تحمل $12A$ في اتجاه a_z ، وشريط رفيع في المستوى $x = 0$ بين $y = 5mm$ و $y = 20mm$ يحمل تيارا كليا مقداره $12A$ في اتجاه a_z . بفرض ظروف الفضاء الحر . أوجد متجه القوة لكل متر طول المؤثرة في : (أ) الشريط بواسطة الفتيلة ، (ب) الفتيلة بواسطة الشريط .

١٢ - لوح تيار لانهائي ، $K = 10a_z A/m$ ، يقع في المستوى $z = 0$. وعروة مستطيلة تحمل $20A$ تقع في المستوى $x = 0$ ، كما هو مبين بشكل ٩ - ١٦ . أوجد عزم التدوير على : (أ) العروة حول نقطة أصل عند $(0,0,0)$ ، (ب) العروة حول نقطة أصل عند $(0,0,4.5)$ ، (ج) الجانب الأيمن حول نقطة أصل تقع عند $(0,0,-5)$.

١٣ - عروة تيار فتيلية مربعة لها نقط الأركان : $(0,1,0)$ ، $(0,1,1)$ ، $(0,2,1)$ ، $(0,2,0)$ ، التيار هو $8A$ في اتجاه دوران عقرب الساعة ، كما يرى من المحور x المرجب . دغ $B = 3a_z Wb/m^2$ وأوجد عزم التدوير حول محور : (أ) على المحور z ، (ب) على الخط $x = 0$ ، $y = 1.5$. (ج) الآن ازل المجال B المنتظم ودع تيارا فتيليا مقداره $15A$ يمر في اتجاه a_z طوال المحور z . أوجد عزم التدوير حول نقطة الأصل .

١٤ - ملف لولبي طويل ، $\rho = cm$ ، له المحور z كمحوره ويحمل تيارا مقداره $5A$ في الاتجاه a_z العام . هناك 30 لفة cm باستخدام أى نقطة على المحور z كثقطة أصل ، أوجد عزم التدوير على : (أ) عروة دائرية ، $\rho = 2cm$ ، $z = 0cm$ تحمل $2A$ في اتجاه a_z ، (ب) عروة مستطيلة تحمل $3A$ على أجزاء خطية مستقيمة من $(1,0,0)$ الى $(-1,0,0)$ الى $(-1,0,-4)$ الى $(1,0,-4)$.



شكل ٩- ١٦ انظر مسألة ١٢ .

١٥ - ملف لولبي ذو طول 25cm وقطر 3cm ، ويحمل 4A dc في لفاته الـ 400 . محوره عمودى على مجال مغناطيسى منتظم مقداره 0.8 Wb/m^2 فى هواء . مستخدما نقطة أصل عند مركز الملف اللولبى ، احسب عزم التدوير المؤثر عليه .

١٦ - هذه المواد العشر تمثل أنواعا خمسة مختلفة لمواد مغناطيسية : النيكرو ، أرجون ، بيزموث ، كلوريد الكوبلت ، ماجنيتيت ، نيكل ، فريت نيكل ، أكسيد نيكل ، اكسجين وأكسيد يتريوم . حدد مثالين ينتميان لكل من الأنواع الآتية خلال مدى مناسب من درجة الحرارة : (أ) دايما مغناطيسية ، (ب) بارامغناطيسية (جـ) فرومغناطيسية (د) صديد الفرومغناطيسية (هـ) فرى مغناطيسية .

١٧ - فى نموذج ذرى بسيط ، يدور الكترون مفرد حول نواة موجبة . لنصف قطر a وسرعة زاوية ω : (أ) حدد العزم المغناطيسى للنموذج ، (ب) احسب عزم التدوير الذى ينتج من كثافة تدفق مغناطيسى B توازى مستوى الدوران .

١٨ - إذا أعطيت لوحا التيار اللانهائيان المبينان بشكل ٩- ١٧ ، حدد H و B ، و M فى المناطق 1، 2، 3 إذا : (أ) $\mu_R = 0.998$ فى كل موضع ، (ب) $\mu_R = 1,000$ فى المنطقة 2 ، بينهما المنطقتان 1 و 3 فضاء حر .

١٩ - مادة معينة موحدة الخواص لها $\chi_m = 2$ و $B = 20y a_z \text{ Wb/m}^2$. أوجد : (أ) μ_R ، (ب) μ ، (جـ) J_b ، (د) J ، (هـ) M ، (و) H .

٢٠ - دع $B = 0.1 a_x \text{ Wb/m}^2$ فى كل موضع ، ودع $\mu_R = 1$ لـ $|x| > 2$. ارسم H_x ، B_x و M_x مع x إذا كان : (أ) $\mu_R = 5$ لـ $|x| < 2$ ، (ب) $\mu_R = 5/(1 + x^2)$ لـ $|x| < 2$.

٢١ - أوجد B ، H ، و M فى كل موضع إذا كانت $J = 12 a_z \text{ kA/m}^2$ و $\mu_R = 2.5$ خلال المنطقة $-0.1 < y < 0.2 \text{ m}$ ، بينما $J = 0$ و $\mu_R = 1.25$ فى أى موضع آخر .



شكل ٩- ١٧ انظر مسألة ١٨ .



٢٢ - النتائج الاتية تنطبق على خط نقل محوري :

$$8 < \rho < 10 \text{ mm} \text{ و } 0 < \rho < 3 \text{ mm}$$

$$\sigma = \infty, \mu = \mu_0; 3 < \rho < 5 \text{ mm}; \sigma = 0, \mu_R = 10, 5 < \rho < 8 \text{ mm}.$$

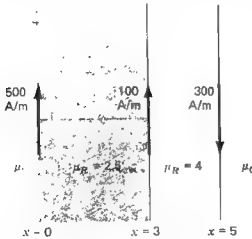
في $I = 0.1\pi \text{ A}$ افرض تيارا كليا $\mu_R = 3, \rho > 10 \text{ mm}, \sigma = 0, \mu = \mu_0$ اتجاه a_z في الموصل الداخلى واتجاه $-a_z$ في الموصل الخارجى . ارسم تخطيطيا H_ϕ, B_ϕ, M_ϕ مع ρ فى المدى :

(أ) $3 < \rho < 8 \text{ mm}$ ، (ب) $0 < \rho < 3 \text{ mm}$ (ج) $8 < \rho < 10 \text{ mm}$.

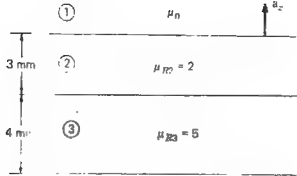
٢٣ - فتبلا تيار لانهائيان يقعان فى المستوى $x = 0$. واحد عند $z = 2$ يحمل 50 A فى اتجاه a_y بينما الاخر عند $z = 0$ يحمل 50 A فى اتجاه $-a_y$. إذا كانت $\mu_R = 1.01$ فى كل موضع ، أوجد مقدار H, B و M عند :

$$P(2, -5, 0.5)$$

٢٤ - بالنسبة لالواح التيار وشرائع المادة المبينة بشكل ٩- ١٨ ، أوجد B فى كل موضع .



شكل ٩- ١٨ انظر مسألة ٢٤ .



شكل ٩- ١٩ انظر مسألة ٢٦ .

٢٥ - إذا أعطيت: $\mu_{R1} = 2$ ، $\mu_{R2} = 2$ و $H_1 = 300a_x - 150a_y + 450a_z$ A/m ، دع سطح الحد يحتوى على نقطة الأصل ، ودع وحدة المتجه $a_{N12} = (-2a_x + 5a_y + 14a_z)/15$ تكون عمودية على السطح هناك ، وتشير من المنطقة 1 الى المنطقة 2 . عين الزاوية (بين 0° و 90°) ، بين a_{N12} و H_1 ، H_2 (ب) .

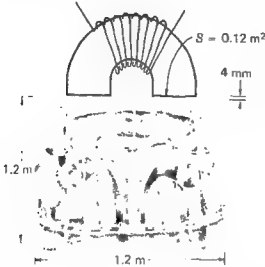
٢٦ - صفيحتان لانهايتان من مادة مغناطيسية موحدة الخواص ، خطية ، ومتجانسة موضوعتان في فضاء حركما هوميين بشكل ٩- ١٩ . دع a_z توجه الى أعلى . إذا كانت $H_1 = a_x - 2a_y + 3a_z$ kA/m في منطقة 1 ، أوجد الزاوية بين H و a_z في منطقة : (أ) 1 ، (ب) 2 ، (ج) 3 ، (د) 4 .

٢٧ - ملف لولوى طويل له نصف قطر 3cm ولفة 5,000/m ، وكل لفة تحمل 0.25A . المنطقة $a < \rho < 3$ داخل الملف اللولوى لها $\mu_R = 5$ ، بينما $\mu_R = 1$ لـ $\rho < a$ و $\rho > 3$ cm . حدد a بحيث : (أ) يوجد تدفقا كليا مقداره $10\mu\text{Wb}$ ، (ب) يقسم التدفق بالتساوى بين المنطقتين $a < \rho < 3$ cm و $0 < \rho < a$.

٢٨ - فى مسألة ٩- ١٠ ، يؤدى التقريب الخطى المقترح فى نص المسألة الى كثافة تدفق مقدارها 0.362Wb/m^2 فى الساق الوسطى . باستخدام قيمة B هذه ومنحنى التمتعظ للصلب السيليكونى ، ماهو التيار المطلوب فى الملف ذى الـ 1,200 لفة ؟

٢٩ - دائرة مغناطيسية تتكون من ثغرة هوائية طولها 0.5mm مع مساحة فعالة 2.1cm^2 على التوالى مع جزء من الصلب السيليكونى طولها 12.5cm ومساحته 2cm^2 . د . م . مقدارها 400A.t موضوعة . احسب كثافة التدفق فى الصلب إذا : (أ) فرض أن جزء الصلب له ممانعة صفرية ، (ب) فرض أن الصلب خطى مغناطيسيا مع $\mu = 0.005\text{H/m}$ ، (ج) كان منحنى التمتعظ للصلب هو ذلك المعطى بشكل ٩- ١٠ .

٣٠ - ملف محوري له مقطع عرضي مساحته 8cm^2 ونصف قطر فعال 4cm . يحتوي على الملف على 2,000 لفة . يتكون القلب من قطعتين نصفى دائريتين ، واحدة من الصلب السيليكوني والأخرى من مادة خطية لها $\mu_R = 200$. إذا كان هناك ثغرة هوائية فعالة مقدارها 0.2mm عند كل وصلة ، (أ) ماهو تيار الملف المطلوب لينتج كثافة تدفق مقدارها 1Wb/m^2 فى القلب ؟ (ب) ماهى كثافة التدفق الناتجة إذا كان التيار 0.5A ؟



شكل ٩- ٢٠ انظر مسألة ٣١ .

٣١ - قلب المحول الصلب السيليكوني المبين بشكل ٩- ١٣ له ملف ذو 900 لفة يحمل 0.2A على الساق الأوسط ، وتلك الساق ذات مساحة فعالة مقدارها 2.5cm^2 ، وطول فعال مقداره 5cm . هذه القيم لكل ساق خارجية هى 2cm^2 و 15cm ، بالترتيب . ما طول ثغرة هوائية موجودة فى الساق الوسطى إذا كانت كثافة التدفق هناك 1.2Wb/m^2 ؟

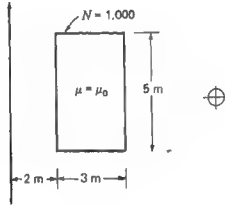
٣٢ - منحني $B-H$ لنوع معين من الصلب ممثل بالتمثيل :
 $B = 1.2H^2 / (H^2 + 10,000)$. وهذه المادة مستخدمة فى دائرة مغناطيسية بسيطة فيها الجزء الصلب له مساحة 0.8cm^2 وطول 5cm ، وثغرة هوائية على التوالى طولها 10^{-4}m . أوجد التدفق المغناطيسى الذى ينتج عندما يكون التنشيط 100A.t .

٣٣ - ملف حلقي له قلب سيليكوني ذو مقطع عرضي مربع $1.5 \times 1.5\text{cm}$ ونصف قطر داخلي مقداره 5cm . ملف التيار يعطى 120A.t . كم يجب أن يكون طول الثغرة الهوائية لتسبب قوة مقدارها 5 lbf على كل من وجهى الثغرة ؟

٣٤ - ما مقدار الطاقة المخزنة لكل متر طول فى المجال المغناطيسى داخل موصل دائرى مصمت غير مغناطيسى نصف قطره ρ_0 ، يحمل تياراً كلياً I منتظم التوزيع ؟

٣٥ - لوحا تيار متوازيان يفصلهما 10cm في فضاء حر ويحملان تيارين مقاديرهما $\pm 100a_x \text{ A/m}$ ملف لولبي طويل نصف قطره 4 cm عوره مواز للمحور x ويقع كلية بين لوحى التيار . يحمل الملف اللولبي 10^4 لفة s/m وتيارا مقداره 5mA . أوجد الطاقة الكلية المخزنة في 1m طول من الملف اللولبي : (أ) اذا كان لوحا التيار المتوازيان يعملان فقط ، (ب) اذا كان الملف اللولبي يعمل فقط ، (ج) اذا كان كلاهما يعمل .

٣٦ - مغناطيس كهربي يرفع سيارة قديمة على هيئة مكعب مضغوط ضلعه 1.2m ، كما هو مبين بشكل ٩ - ٢٠ . افترض أن كل وجه قطب له مساحة تلامس مقدارها 0.12m^2 وثغرة هوائية فعالة مقدارها 4mm . إذا كانت السيارة ثقلها $12,000\text{N}$ ، ما الـ (ق . د . م) التى يجب على الملف إمدادها اذا كانت ممانعة المغناطيس الكهربي نفسه . (أ) والسيارة يمكن إهمالها ، (ب) يمكن إهمالها ، ولكن السيارة لها طول مسار فعال مقدار 0.8m ، ومساحة فعالة مقدارها 0.12m^2 ، وانفاذية نسبية فعالة مقدارها 300 .



شكل ٩ - ٢١

٣٧ - الملف اللولبي المبين بشكل ٨ - ١٠ فيه $N = 3,000$ ، $I = 40\text{ mA}$ ، $d = 30\text{cm}$ ونصف قطر مقداره 1.2cm . افترض أن $\mu = \mu_0$. (أ) أوجد B و H داخل الملف اللولبي ثم استخدم معادلة (٤٦) لقسم ٩ - ٩ لتحين الطاقة الكلية المخزنة . (ب) احسب المحاطة من $W_H = 1/2 LI^2$.

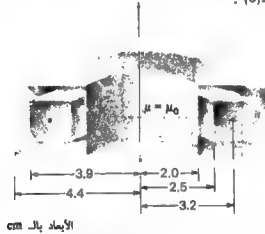
٣٨ - مستويان موصلان في هواء عند $z = d$ و $z = 0$ يحملان تيارى سطحين مقاديرهما $\pm K_0 a_x \text{ A/m}$. (أ) أوجد الطاقة المخزنة في المجال المغناطيسي لكل وحدة طول $(0 < x < l)$ في عرض w ($0 < y < w$) وفاصل d ($0 < z < d$) . (ب) احسب المحاطة لكل وحدة طول من خط النقل هذا من $W_H = 1/2 LI^2$ ، حيث I هو التيار

الكلى فى عرض w فى أى من الموصلين . (ج) احسب التدفق الكلى المار خلال المستطيل $0 < x < l$; $0 < z < d$ فى المستوى $y = 0$. ومن هذه النتيجة أوجد مرة أخرى المحاطة لكل وحدة طول .

٣٩ - (أ) أوجد المحاطة المتبادلة بين الفتيلة المستقيمة اللانهائية والعروة المستطيلة ذات الـ $1,000$ لفة لشكل ٩ - ٢١ . (ب) ماهى M إذا حركت العروة إلى Imm من الفتيلة ؟ (ج) ماهى M إذا كانت كل الأبعاد على الرسم التخطيطى بالتسمترات بدلا من الأمتار ؟

٤٠ - ملفان حلقيان لهما مقاطع عرضية مربعة ، كما هو مبين بشكل ٩ - ٢٢ . (أ) إذا احتوى الملف الداخلى على 500 لفة والخارجى له $4,000$ لفة ، استخدم تقريبات جيدة لتوجد المحاطة لكل ملف والمحاطة المتبادلة بينهما . افرض $\mu = \mu_0$ فى كل مكان . (ب) احسب قيما مضبوطة لـ داخلية L ، خارجية L و M .

٤١ - أوجد المحاطة المتبادلة بين دائرتين مكونتين من موصلات فتيلية فى المستوى $z = 0$ إذا تكونت الدائرة I من فتيلين لانهائى الطول عند $x = 0$ و $x = 5$ (تحملان تيارين متساويين ومتضادين) والدائرة 2 فى عروة مستطيلة تصل النقط :
(أ) $(3,0,0)$ ، $(3,2,0)$ ، $(4,2,0)$ ، $(4,0,0)$ ، (ب) $(7,2,0)$ ، $(7,0,0)$ ،
(ج) $(6,0,0)$ ، $(6,2,0)$.



شكل ٩ - ٢٢ : انظر مسألة ٤٠ .

٤٢ - (أ) استخدم علاقات طاقة لتبين أن المحاطة الداخلية لسلك اسطوانى غير مغناطيسى فى نصف قطر a يحمل تيارا I منتظم التوزيع هى $\mu_0(8\pi)H$ /m . (ب) أوجد المحاطة الداخلية إذا أزيل الجزء من الموصل الذى له $a < c < p$.

٤٣ - فتيلة لانهائية فى فضاء حرتقع على المحور z ، وعروة فتيلة مربعة جانبها $2m$ تقع فى المستوى $y = 0$. أحد جوانب العروة المربعة يوازى المحور z وعلى بعد Im منه . (أ) احسب المحاطة المتبادلة . (ب) ادبرت العروة 45° حول مركزها فى المستوى $y = 0$. أوجد M .

الفصل العاشر

المجالات المتغيرة مع الزمن ومعادلات
ماكسويل

العلاقات الأساسية للمجال الكهروستاتيكي والمغناطيسي الثابت قد حصل عليها في الفصول التسعة السابقة ، ونحن الآن مستعدون لمناقشة مجالات متغيرة مع الزمن . ستكون المناقشة قصيرة ، لأن تحليل المتجهات وتفاضل وتكامل المتجهات يجب أن تكون الآن أدوات مألوفة أكثر ؛ بعض العلاقات لم تتغير ، ومعظم العلاقات تغيرت تغيرا طفيفا فقط .

سيقدم مفهومان جديدان : المجال الكهربى الناتج عن مجال مغناطيسى متغير والمجال المغناطيسى الناتج عن مجال كهربى متغير . أول هذين المفهومين نتج عن بحث تجريبى لميشيل فاراداي ، والثانى من المجهودات النظرية لجيمس كليرك ماكسويل .

ماكسويل ألهم بالفعل بعمل فاراداي التجريبى والصورة الذهنية المعطاة خلال « خطوط القوى » التى أدخلها فاراداي فى تطوير نظريته للكهربية والمغناطيسية . كان أصغر من فاراداي بأربعين عاما . ولكنهما عرفا بعضهما خلال السنوات الخمس التى قضاهما ماكسويل فى لندن كأستاذ شاب ، بعد سنوات قليلة من تقاعد فاراداي . طورت نظرية ماكسويل بعد هذا المنصب الجامعى وبينما كان يعمل بمفرده فى منزله فى سكوثلندا . شغفته لخمس سنوات بين عمرى ٣٥ و ٤٠ .

المعادلات الأساسية الأربعة للنظرية الكهرومغناطيسية المعطاة فى هذا الفصل تحمل اسمه .

١٠ - ١ : قانون فاراداي

بعد أن أوضح أورستد فى ١٨٢٠ أن تيارا كهربيا أثر على إبرة بوصلة ، أعلن فاراداي اعتقاده أنه اذا استطاع تيار انتاج مجال مغناطيسى ، فان مجالا مغناطيسيا يجب أن يكون قادرا على انتاج تيار . مفهوم « المجال » لم يكن متاحا فى ذلك الوقت ، وكان هدف فاراداي أن يبين أن تيارا يمكن أن يتتج « بالمغناطيسية » .

وعمل في هذه المسألة متقطعا على مدى عشر سنوات ، حتى نجح أخيرا في ١٨٣١^(١) . لف لفيفتين منفصلتين على ملف حلقي حديدي ووضع جالفانومترا في دائرة وبطارية في الأخرى . عند إغلاق دائرة البطارية ، لاحظ انحرافا لحظيا للجالفانومتر ، وحدث انحراف مماثل في الاتجاه المضاد عندما فصلت البطارية . هذه ، بالطبع ، كانت التجربة الأولى التي قد عملها مشتملة على مجال مغناطيسي متغير ، وأتبعها بايضاح أن أيأ من مجال مغناطيسي متحرك أو ملف متحرك يستطيع أيضا أن يُسبب انحراف الجالفانومتر .

بدلالة المجالات ، نقول الآن أن مجالا مغناطيسيا متغيرا مع الزمن ينتج قوة دافعة كهربية (ق د ب emf) والتي قد تنشئ تيارا في دائرة مغلقة مناسبة القوة الدافعة الكهربية هي مجرد فولتية تنتج من موصلات تتحرك في مجال مغناطيسي أو من مجالات مغناطيسية متغيرة ، وسنعرّفها فيما بعد . قانون فاراداي عادة يصاغ بالصورة .

$$(١) \quad \text{emf} = - \frac{d\Phi}{dt} \quad V$$

. معادلة (١) تتضمن مسارا مغلقا ، مع أنه ليس بالضرورة مسار موصل مغلق ، المسار المغلق ، مثلا ، قد يحتوي على مكثف ، أو قد يكون خطا تخيليا تماما في الفراغ ، والتدفق المغناطيسي هو ذلك التدفق الذي يمر خلال أي وكل سطح محيطه هو المسار المغلق ، و $d\Phi/dt$ هو معدل التغير الزمني لهذا التدفق .

قد تنتج قيمة غير صفرية لـ $d\Phi/dt$ من أي من الحالات الآتية :

١ - تدفق متغير مع الزمن مرتبط بمسار مغلق ساكن .

٢ - حركة نسبية بين تدفق ثابت ومسار مغلق .

٣ - تجمع من الاثنين .

الاشارة السالبة هي دلالة على أن الق د ك في اتجاه بحيث تسبب تيارا تدفقه ، اذا أضيفت الى التدفق الأصلي ، سيقبل مقدار الق د ك . هذه الصيغة أن الفولتية المنتجة بالحث تعمل لتعطي تدفقا مضادا معروفة كقانون لenz^(٢) .

إذا كان المسار المغلق هو ذاك المأخوذ بموصل فتيلي ذو N من اللفات ، فغالبا يكون اعتبار أن اللفات متطبقة دقيقا بقدر كاف وندع

(١) حصل جوزيف هنري على نتائج مشابهة في أكاديمية الباني في نيويورك في نفس الوقت تقريبا .

(٢) هنري فيدريك لامل لنز ولد في ألمانيا ، ولكن حصل في روسيا . نشر قانونه في ١٨٣٤ .

$$(٢) \quad \text{emf} = -N \frac{d\Phi}{dt}$$

حيث Φ تفسر الآن على أنها التدفق المار خلال أى واحدة من N من المسارات المنطبقة .

نحتاج الى تعريف ق د ك كما هي مستخدمة فى (١) أو (٢) . واضح أن الق د ك مقياسية ، ويوضح (ربما ليس يمثل هذا الوضوح) تحقق بالأبعاد أنها تقاس بالفولت . نعرف الق د ك . بالصورة

$$(٣) \quad \text{emf} = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

ولاحظ أنها الفولتية حول مسار مغلق محدد . اذا ماغير أى جزء من المسار ، تتغير الق د ك عامة . البعد عن النتائج الاستاتيكية مبين يوضح بـ (٣) ، لأن شدة مجال كهبرى ناتجه من توزيع شحنة استاتيكي يجب أن يؤدى الى فرق جهد صفري حول مسار مغلق . فى الكهروستاتيكية ، يؤدى التكامل الخطى الى فرق جهد ، مع مجالات متغيرة مع الزمن ، تكون النتيجة ق د ك أوفولتية .

باستبدال Φ فى (١) بتكامل B السطحى ، نحصل على

$$(٤) \quad \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = - \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

حيث تمثل اصابع يدنا اليمنى اتجاه المسار المغلق ، ، ويمثل إبهامنا اتجاه $d\mathbf{S}$. كثافة تدفق B فى اتجاه $d\mathbf{S}$ ومتزايدة مع الزمن تنتج على ذلك قيمة متوسطة لـ E مضادة للاتجاه الموجب حول المسار المغلق . العلاقة اليمينية - اليد بين التكامل السطحى والتكامل الخطى المغلق فى (٤) يجب دائما أن تبقى فى الذاكرة أثناء تكاملات التدفق وتحديثات الق د ك .

دعنا نقسم بحثنا الى جزئين بايجاد أولا المساهمة للق د ك الكلية الناتجة عن مجال متغير داخل مسار ساكن (ق د ك للمحول) ، ثم سنعتبر مسار متحرك خلال مجال ثابت (ق د ك حركية ، أوللمولد)

نعتبر أولا مسارا ساكنا . يكون التدفق المغناطيسى هو الكمية الوحيدة المتغيرة مع الزمن فى الطرف الأيمن لـ (٤) ، ويمكن أخذ مشتقة جزئية تحت علامة التكامل ،

$$(٥) \quad \text{emf} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

قبل أن نطبق هذه النتيجة البسيطة على مثال ، دعنا نحصل على الصورة النقطية لهذه المعادلة التكاملية . بتطبيق نظرية ستوكس على التكامل الخطي المغلق ، يكون لدينا

$$\oint_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

حيث يمكن أخذ التكاملين السطحيين على سطحين متطابقين . الأسطح عامة تماما ويمكن أن تختار كتفاضليات ،

$$(\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

$$(٦) \quad \boxed{\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}} \quad \text{و}$$

هذه واحدة من معادلات ماكسويل الأربع. كما تكتب في الصورة التفاضلية ، أو النقطية ، الصورة التي تستخدم فيها عادة أكثر . معادلة (٥) هي الصورة التكاملية لهذه المعادلة وهي تكافئ قانون فاراداي كما يطبق على مسار ثابت . إذا كانت \mathbf{B} ليست دالة في الزمن ، واضح أن (٥) و (٦) تؤولان إلى المعادلات الكهروستاتيكية ،

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0 \quad \text{كهروستاتيكية}$$

و

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad \text{كهروستاتيكية}$$

كمثال على شرح (٥) و (٦) ، دعنا نفرض مجالا مغناطيسيا بسيطا يتزايد اسيا مع الزمن داخل المنطقة الاسطوانية $\rho < b$ ،

$$(٧) \quad \mathbf{B} = B_0 e^{kt} \mathbf{a}_z$$

حيث $B_0 =$ ثابت . باختيار المسار الدائري $\rho = a$ ، $a < b$ ، في المستوى $z = 0$ ، الذي يجب أن تكون عليه E_ϕ ثابتة من التماثل ، فحينئذ يكون لدينا من (٥)

$$\text{emf} = 2\pi a E_\phi = -k B_0 e^{kt} \pi a^2$$

الرق : كحول هذا المسار المغلق هي $-k B_0 e^{kt} \pi a^2$. وهي تتناسب مع a^2 ، لأن كثافة التدفق المغناطيسي منتظم والتدفق المار خلال السطح عند أي لحظة يتناسب مع المساحة .

إذا استبدلنا الآن a بـ p ، $p < b$ ، تكون شدة المجال الكهربى عند أى نقطة

$$(A) \quad E = -\frac{1}{2}kB_0 e^{kt} \rho a_\phi$$

دعنا نحاول الآن أن نحصل على نفس الاجابة من (٦) ، التى تصبح

$$(\nabla \times \mathbf{E})_z = -kB_0 e^{kt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho E_\phi)}{\partial \rho}$$

بالضرب فى ρ والتكامل من 0 الى ρ (معاملين t كتابت ، لأن المشتقة هى مشتقة جزئية) ،

$$-\frac{1}{2}kB_0 e^{kt} \rho^2 = \rho E_\phi$$

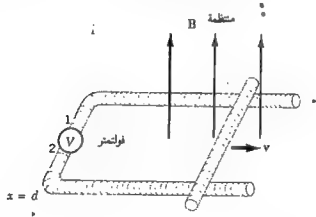
أو

$$E = -\frac{1}{2}kB_0 e^{kt} \rho a_\phi$$

مرة أخرى .

إذا اعتبرنا B_0 موجبة ، سيكون لموصل فتيلى ذو مقاومة R تيار مار فى اتجاه a_ϕ السالب ، وهذا التيار سينشئ تدفقا داخل العروة الدائرية فى الاتجاه السالب لـ a_z . لأن E_ϕ تزيد أسيا مع الزمن ، كذلك يفعل التيار والتدفق ، وعلى ذلك تميل الى خفض المعدل الزمن لزيادة التدفق المؤثر وق د ك المحصلة تبعا لقانون لنتز .

قبل ترك هذا المثال ، من المستحسن أن نشير الى أن المجال B المعطى لايحقق كل معادلات ماكسويل . مثل هذه المجالات تفرض غالبا على مسائل دوائر التيار المتردد ولا تسبب أى ضغوة عندما تُفسر على الوجه الصحيح .



شكل ١٠-١ . مثال يوضح تطبيق قانون فاراداي على حالة كثافة تدفق مغناطيسى ثابتة ومسار متحرك . يتحرك قضيب القصير الى اليمين بسرعة V ، وتكمل الدائرة خلال القضيبين وفولتسر صغير للغاية ذو مقاومة عالية . قراءة الفولتسر هى $V_{12} = -Bvd$

مع ذلك أحيانا تسبب دهشة . هذا المجال الخاص مناقش أكثر في المسألة رقم ٢٠ عند نهاية هذا الفصل .

لأن دعنا نعتبر حالة تدفق ثابت مع الزمن وسار مغلق متحرك . قبل أن نستنبط أى نتائج خاصة من قانون فاراداي (١) ، دعنا نستخدم القانون الأساسى لتحليل المسألة الخاصة المبينة فى شكل ١٠ - ١ . الدائرة المغلقة تتكون من موصلين متوازيين متصلين عند طرف بواسطة فولتметр على المقاومة وذى أبعاد مهملة وعند الطرف الآخر بواسطة قضيب منزلق يتحرك بسرعة v . كثافة التدفق المغناطيس ثابتة (فى الفراغ والزمن) وهى عمودية على المستوى المحتوى على المسار المغلق .

دع موضع قضيب التقصير يعطى بـ y ، فحينئذ يكون التدفق المار خلال السطح داخل المسار المغلق عند أى زمن t هو

$$\Phi = Byd$$

من (١) ، نحصل على

$$(٩) \quad \text{emf} = -\frac{d\Phi}{dt} = -B \frac{dy}{dt} d = -Bvd$$

لأن الدق ذلك معرفة بـ $E \cdot dL$ ولدينا مسار موصل ، يمكننا بالفعل تعيين E عند كل نقطة على المسار المغلق . وجدنا فى الكهروستاتيكية ، أن المركبة المماسية لـ E تكون صفرا عند سطح موصل ، وسنبين فى قسم ١٠ - ٤ أن المركبة المماسية تكون صفرا عند سطح موصل تام ($\sigma = \infty$) لكل الحالات المتغيرة مع الزمن . هذا يكافئ القول أن موصلا تاما هو « دائرة قصر » . المسار المغلق الكامل فى شكل ١٠ - ١ يمكن أن يعتبر كموصل مثالى ، باستثناء الفولتметр . حينئذ يجب ألا يحتوى الحاسب الفعلى لـ $E \cdot dL$ على مساهمة على طول كل القضيب المتحرك ، كلا القضيبين ، واطراف الفولتметр . لآنا تكامل فى اتجاه عكس دوران عقرب الساعة (جاعلين داخل الجانب الموجب للسطح على يسارنا كالمعتاد) . فإن المساهمة $E \cdot dL$ عبر الفولتметр يجب أن تكون $-Bvd$ ، مينة أن شدة المجال الكهربى فى جهاز القياس موجهة من الطرف 2 الى الطرف 1 . بالنسبة لقراءة فى اتجاه الزيادة على المقياس ، يجب لذلك أن يكون الطرف الموجب للفولتметр هو الطرف 2 .

اتجاه مرور التيار الصغير المحصل يمكن أن يؤكد بملاحظة أن التدفق المحصور يقل بتبار فى اتجاه دوران عقرب الساعة تبعا لقانون لىز ، يرى مرة أخرى أن الطرف 2 للفولتметр يكون الطرف الموجب .

دعنا الآن نعتبر هذا المثال باستخدام مفهوم ق د ك الحركية . القوة على شحنة Q تتحرك بسرعة v في مجال مغناطيسي B هي

$$F = Qv \times B$$

أو

$$(١٠) \quad \frac{F}{Q} = v \times B$$

القضيب الموصل المنزلق يتكون من شحنات موجبة وسالبة ، وكل يلاقى هذه القوة . القوة لكل وحدة شحنة ، كما هي معطاة بـ (١٠) ، تسمى شدة المجال الكهربائي الحركية E_m ،

$$(١١) \quad E_m = v \times B$$

إذا كان الموصل المتحرك على القضيبين مرفوعا ، لدفعت شدة المجال الكهربائي هذه الإلكترونات لأحد طرفي القضيب (الطرف البعيد) إلى أن يوازن المجال الاستاتيكي الناشئ عن هذه الشحنات تماما المجال المولد بالحث نتيجة حركة القضيب . حينئذ ستكون شدة المجال الكهربائي المماسية الناتجة صفرا على طول القضيب .

الذي د ك الحركية الناتجة عن الموصل المتحرك هي حينئذ

$$(١٢) \quad \text{emf} = \oint E_m \cdot dL = \oint (v \times B) \cdot dL$$

حيث يمكن أن يكون للتكامل الأخير قيمة غير صفرية فقط على هذا الجزء من المسار الذي يتحرك ، أو الذي عليه v لها قيمة ما غير صفرية . بإيجاد الطرف الأيمن لـ (١٢) ، نحصل على

$$\oint (v \times B) \cdot dL = \int_a^0 vB dx = -Bvd$$

كما سبق . هذه هي الد ك د ك الكلية ، لأن B ليست دالة في الزمن .

في حالة موصل متحرك في مجال مغناطيسي منتظم ثابت ، يمكننا لذلك أن ننسب شدة مجال كهربائي حركية $E_m = v \times B$ لكل جزء من الموصل المتحرك ونوجد قيمة الد ك المحصلة من

$$(١٣) \quad \text{emf} = \oint E \cdot dL = \oint E_m \cdot dL = \oint (v \times B) \cdot dL$$

إذا كانت كثافة التدفق المغناطيسي متغيرة مع الزمن أيضا ، فحينئذ يجب أن نضمن كلا المساهمتين ، ق د ك للمحول (٥) والد ك د ك الحركية (١٢) ،

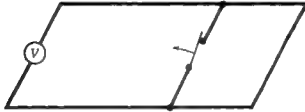
$$(١٤) \text{ emf} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \oint (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{L}$$

هذا التعبير يكافئ الصيغة البسيطة

$$(١) \text{ emf} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

وأي منهما يمكن أن يستخدم لتحديد هذه الفولتيات المنتجة بالحث .

مع أن (١) تبدو بسيطة ، فهناك قليل من الأمثلة تحتاج الى تصرف التي فيها تطبيقها الصحيح صعب جدا . هذه تشتمل عادة على اتصالات منزقة أو مفاتيح كهربية ، مشتملة دائما على استبدال أجزاء من الدائرة جزء جديد^(١) . كمثال ، أعتبر الدائرة البسيطة لشكل ١٠ - ٢ ، المحتوية على عدة اسلاك موصلة تامة ، وفولتметр مثالي ، مجال B ثابت منتظم ، ومفتاح كهربي . عندما يفتح المفتاح الكهربي ، يكون بوضوح هناك تدفق أكثر محصور في دائرة الفولتметр ، مع ذلك يستمر في قراءة صفر . التغير في التدفق لم يحدث بأي من B متغيرة مع الزمن [الحد الأول في (١٤)] أو موصل متحرك خلال مجال مغناطيسي [الجزء الثاني في (١٤)] . بدلا من ذلك ، فقد أستعيض عن الدائرة القديمة بدائرة جديدة . على ذلك فمن الضروري استخدام الحذر في تقييم التغير في وصلات التدفق .



شكل ١٠ - ٢ . زيادة ظاهرة في وصلات التدفق لا تؤدي الى فولتية متجه بالحث عندما يستبدل ببساطة جزء من الدائرة بدل آخر بفتح المفتاح الكهربي . سوف لا يلاحظ انحراف على الفولتتر .

فصل الرابع د ك الى جزءين الممثلين بـ (١٤) ، واحد بسبب معدل التغير الزمن لـ B والاخر بسبب حركة الدائرة ، اختياري الى حد ما في أنه يعتمد على السرعة النسبية بين المشاهد والنظام . مجال متغير مع كل من الزمن والفراغ قد يظهر ثابتا لمشاهد يتحرك

(١) انظر Bewley ، في بيان المراجع عند نهاية الفصل ، خاصة 19-12.PP.

مع المجال . هذا الخط من التفكير متطور بشمول أكثر فى تطبيق النظرية النسبية الخاصة على النظرية الكهرومغناطيسية^(١) .

١٠ - ١ : كثافة التدفق المغناطيسى يمكن أن تمثل بـ :
 $B_z = [1/(1+100\rho^2)]$ فى الاحداثيات الأسطوانية لـ $\rho < 0.2\text{m}$. (أ) أوجد التدفق المغناطيسى المار خلال السطح $z=0$, $\rho \leq 0.1$ ، فى الاتجاه a_z . (ب) أوجد E عند $z=0$, $\rho = 0.1$. (ج) إذا كان المسار الدائرى ، $z=0$, $\phi = \pi/4$, $\rho = 0.1$ ، سلكا موصلا ذا مقاومة $1 \Omega/\text{cm}$ ، أى تيار يمر فى السلك فى الاتجاه a_ϕ ؟

الاجابة :

$$- 1.089\cos 1,000\pi\text{mA} ; \quad - 108.9a_\phi\cos 1,000\pi\text{mV/m} ; \\ 21.8\sin 1,000\pi\mu\text{Wb}$$

١٠ - ٢ : الجهاز المبين بشكل ١٠ - ١ له $d = 0.15\text{m}$ ويعمل مع :
 $B = 0.4a_z \text{ Wb/m}^2$. إذا كانت $V = 200ya_z\text{m/s}$ و $y = 0.1\text{m}$ عند $t = 0$ ، أوجد عند $t = 10\text{ms}$: (أ) v_y ، (ب) V_{12} ، (ج) التيار الداخلى للطرف 2 للفولتметр إذا كانت مقاومة المقياس $50\text{k}\Omega$.

الاجابة : 147.8m/s , 8.87V , $177.3\mu\text{A}$.

١٠ - ٣ : تيار الازاحة :

قانون فاراداي التجريبي قد استخدم للحصول على احدى معادلات ماكسويل فى صورة تفاضلية^٢ :

$$(15) \nabla \times E = - \frac{\partial B}{\partial t}$$

التي تبين لنا أن مجالا مغناطيسيا متغيرا مع الزمن ينتج مجالا كهربيا . بتذكر تعريف الالتواء ، نرى أن هذا المجال الكهربى له خاصية الدوران الخاصة ، فتكامله الخطى حول مسار مغلق عام ليس صفرا . الآن دعنا نوجه انتباهنا للمجال الكهربى المتغير مع الزمن .

يجب أولا أن ننظر الى الصورة التفاضلية لقانون امبير الدائرى كما تطبق على مجالات مغناطيسية ثابتة ،

$$(16) \nabla \times H = J$$

(١) هذا مناقش فى عديد من المراجع المدرجة فى بيان المراجع عند نهاية الفصل . انظر — Owen , PP.231
 151 — 142 , Panofsky and Phillips , 245 و Harman فى عدة أماكن .

ونبين عدم صلاحيتها لحالات التغير مع الزمن بأخذ الانفراج لكلا الطرفين ،

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} \equiv 0 = \nabla \cdot \mathbf{J}$$

حيث أن الانفراج للالتواء يتطابق مع الصفر ، تكون $\nabla \cdot \mathbf{J}$ صفرا أيضا ، ولكن ، معادلة الاستمرارية ،

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

تبين لنا حيثئذ أن (١٦) تكون صحيحة فقط إذا كانت $\partial \rho / \partial t = 0$. وهذا تقييد غير واقعي ، ويجب أن تعدل (١٦) قبل أن نستطيع قبولها لمجالات متغيرة مع الزمن . افترض أننا أضفنا حدا مجهولا \mathbf{G} الى (١٦) ،

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \mathbf{G}$$

مرة أخرى بأخذ الانفراج ، يكون لدينا

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{J} + \nabla \cdot \mathbf{G}$$

أو

$$\nabla \cdot \mathbf{G} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

بإستبدال $\nabla \cdot \mathbf{D}$ بـ ρ ،

$$\nabla \cdot \mathbf{G} = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{D}) = \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

منها نحصل على أبسط حل لـ \mathbf{G} ،

$$\mathbf{G} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

غلتلك يصبح قانون أمبير الدائرى فى الصورة النقطية

$$(١٧) \quad \boxed{\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}}$$

معادلة (١٧) لم تستنبط . أنها مجرد صورة قد حصلنا عليها لانتعاض مع معادلة الاستمرارية . وهي أيضا متوافقة مع جميع نتائجنا الأخرى ، ونقبلها كما فعلنا مع كل قانون تجريبى والمعادلات المستنبطة منه . نحن نبني نظرية ، ولنا كل الحق فى معادلتنا الى أن يثبت خطأها . وهذا لم يثبت بعد .

الآن لدينا واحدة من معادلات ماكسويل الأخرى ويستغنى أهميتها . الحد الإضافى $\partial D / \partial t$ له وحدات كثافة التيار ، أمبير لكل متر مربع . لأنه ينتج عن كثافة تدفق كهبرى متغيرة مع الزمن (أو كثافة إزاحة) ، سماها ماكسويل كثافة تيار إزاحة . نرمز لها أحيانا بـ J_d .

$$\nabla \times H = J + J_d$$

$$J_d = \frac{\partial D}{\partial t}$$

هذا هو النوع الثالث من كثافة التيار الذى قابلناه . كثافة تيار التوصيل ،

$$J = \sigma E$$

هى حركة شحنة (عادة الكترولونات) فى منطقة صافية كثافة شحنتها صفر ، وكثافة تيار الحمل ،

$$J = \rho v$$

هى حركة كثافة شحنة حجمية . كلاهما ممثلا بـ J فى (١٧) . كثافة التيار المعقد ، بالطبع ، محتواه فى H . فى وسط غير موصل لا يوجد فيه كثافة شحنة حجمية ، $J = 0$ ، وحيثئذ

$$(١٨) \quad \nabla \times H = \frac{\partial D}{\partial t} \quad (\text{if } J = 0)$$

لاحظ التماثل بين (١٨) و (١٥) :

$$(١٥) \quad \nabla \times E = - \frac{\partial B}{\partial t}$$

ومرة أخرى التناظر بين متجهات الشدة E و H ومتجهات كثافة التدفق D و B ظاهرة . على أنه ، لا يمكن أن نوضح ثقة كبيرة جدا فى هذا التناظر ، لأنه يفشل عندما نفحص قوى على جسيمات . القوة على شحنة ترتبط بـ E وبـ B ، ويمكن تقديم بعض

حجج جيدة تبين تناظرا بين E و B وبين D و H . مع ذلك منحذفها ونفقط نقول أن فكرة تيار الازاحة ربما أوحيت لماكسويل من التماثل الذي ذكر آنفا لأول مرة^(١) .

تيار الازاحة الكلى العابر لى سطح معطى يحدد بالتكامل السطحي ،

$$I_d = \int_S \mathbf{J}_d \cdot d\mathbf{S} = \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

ونستطيع الحصول على الصورة المتغيرة مع الزمن لقانون أمبير الدائرى بتكامل (١٧) على السطح S ،

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

ونطبق نظرية ستوكس ،

$$(١٩) \quad \boxed{\int \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I + I_d = I + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}}$$

ماهى طبيعة كثافة تيار الازاحة ؟ دعنا ندرس الدائرة البسيطة لشكل . ١٠ - ٣ ، المحتوية على عروة فتيلىة ومكثف متوازى الألواح . داخل العروة يؤثر مجال مغناطيسى يتغير جيبيا مع الزمن ليتبع ق د ك حول المسار المغلق (الفتيلة بالاضافة الى الجزء ذى الشرط بين لوحى المكثف) والذي سنأخذه بالصورة

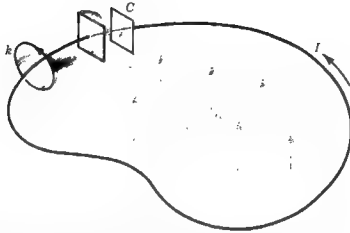
$$\text{emf} = V_0 \cos \omega t$$

باستخدام نظرية الدوائر الأولية ويفرض أن العروة لها مقاومة ومحاثية مهملان ، يمكننا الحصول على التيار فى العروة كمايلى :

$$\begin{aligned} I &= -\omega C V_0 \sin \omega t \\ &= -\omega \frac{C S}{d} V_0 \sin \omega t \end{aligned}$$

حيث نخص الكميات ϵ , S , و d المكثف .

(١) التناظر الذى يربط B بـ D و E بـ H امد ببلدة بـ Fano, Chu and Adler (انظر المراجع المقترحة للفصل الخامس) على الصفحات 159 - 160 و 179 ، حالة لمقارنة B مع E و D مع H مقدمة فى Halliday and Resnik (انظر المراجع المقترحة لهذا الفصل) على الصفحات 668 - 665 و 836 - 832 .



شكل ٣-١٠ موصل فئيلي يكون هروءة تصل لوحى مكثف متوازى الألواح . مجال مغناطيسى متغير مع الزمن داخل المسار المغلق ينتج ق د ك مقدارها $V_0 \cos \omega t$ حول المسار المغلق . تيار التوصيل I يسارى تيار الازاحة بين لوحى المكثف .

دعنا نطبق قانون أمبير الدائرى حول المسار الدائرى المغلق الأصغر k ونهمل حاليا تيار الازاحة :

$$\oint_k \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I_k$$

المسار وقيمة H على طول المسار كلاهما له كميات محددة (مع أنها صعبة التعمين) و $\oint_k \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}$ كمية محددة . التيار I_k هو ذلك التيار خلال كل سطح محيطه هو المسار k . اذا اخترنا سطحنا بسيطا مخترقا بالفتيلة ، مثل السطح الدائرى المستوى المعروف بالمسار الدائرى k ، يكون واضحا أن التيار هو تيار التوصيل . افترض الآن اننا نعتبر المسار المغلق k كفتحة كيس ورق يمر قاعها بين لوحى المكثف . والكيس لا يتقرب بالفتيلة ، ويكون تيار التوصيل صفرا . والآن نحتاج الى اعتبار تيار الازاحة ، لأن داخل المكثف

$$D = \epsilon E = \epsilon \left(\frac{V_0}{d} \cos \omega t \right)$$

ولذلك

$$I_d = -\omega \frac{\epsilon S}{d} V_0 \sin \omega t$$

هذه نفس القيمة مثل تلك لتيار التوصيل في العروة الفتيلية . لذلك نطبق قانون أمبير الدائري محتويا تيار الازاحة على المسار \mathcal{R} يؤدي الى قيمة محددة للتكامل الخطي \mathcal{H} . هذه القيمة يجب أن تساوى التيار الكلى العابر للسطح المختار . لبعض الأسطح يكون التيار كلية تقريبا تيار توصيل ، ولكن لتلك الأسطح المارة بين لوحى المكثف ، يكون تيار التوصيل صفرا ، ويكون هو تيار الازاحة الذى يساوى الان التكامل الخطي المغلق \mathcal{H} .

فيزيايا ، يجب أن نلاحظ أن مكثفا يخزن شحنة وأن المجال الكهربى بين لوحى المكثف أكبر كثيرا من مجالات التسرب الصغيرة فى الخارج . ولذلك نحن ندخل خطأ صغيرا عندما نهمل تيار الازاحة على كل تلك الأسطح التى لاتمر بين اللوحين .

تيار الازاحة مرتبط بمجالات كهربية متغيرة مع الزمن ، ولذلك يوجد فى كل الموصلات غير التامة الحاملة لتيار توصيل متغير مع الزمن . الجزء الأخير من التمرين التدرجى الآتى بعد بين السبب لماذا لم يكتشف هذا التيار الاضافى ابدا تجريبيا . هذه المقارنة موضحة أكثر فى قسم ١١ - ٣ .

ت ١٠ - ٣ : أوجد كثافة تيار الازاحة : (أ) بجوار مذبأعك ، فى الهواء حيث تعطى محطة FM المحلية حاملة لها

$$\mathcal{H} = 0.2 \cos [2.10(3 \times 10^8 t - x)] \mathbf{a}_x \text{ A/m}$$

(ب) فى الفراغ الهوائى داخل محول توزيع قدره كبيرة حيث

$$\mathcal{B} = 1.1 \cos [1.257 \times 10^{-6}(3 \times 10^8 t - y)] \mathbf{a}_x \text{ Wb/m}^2$$

(ج) داخل مكثف قدرة مملوء بالزيت كبير حيث $\epsilon_r = 6$ و

$$\mathcal{E} = 100 \sin [1.257 \times 10^{-6}(3 \times 10^8 t - 2.45z)] \mathbf{a}_x \text{ kV/m}$$

(د) فى موصل معدنى نموذجى عند 60Hz حيث $\sigma = 5 \times 10^7 \text{ /m}$ ، $\epsilon = \epsilon_0$ ،

$$\mathcal{J} = 10^6 \sin [117.1(3.22t - z)] \mathbf{a}_x \text{ A/m}^2.$$

الاجابة :

$$\begin{aligned} & -0.42 \sin [2.10(3 \times 10^8 t - x)] \mathbf{a}_y \text{ A/m}^2; \\ & -1.1 \sin [1.257 \times 10^{-6}(3 \times 10^8 t - y)] \mathbf{a}_x \text{ A/m}^2; \\ & 2.00 \cos [1.257 \times 10^{-6}(3 \times 10^8 t - 2.45z)] \mathbf{a}_x \text{ mA/m}^2; \\ & 66.8 \cos [117.1(3.22t - z)] \mathbf{a}_x \text{ pA/m}^2 \end{aligned}$$

١٠ - ٣ : معادلات ماكسويل فى الصورة النقطية

قد حصلنا فعلا على اثنتين من معادلات ماكسويل للمجالات المتغيرة مع الزمن ،

$$(٢٠) \quad \nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$(٢١) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \text{و}$$

المعادلتان الباقيتان غير متغيرتين عن صورتيهما غير المتغيرة مع الزمن :

$$(٢٢) \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

$$(٢٣) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

تنص معادلة (٢٢) أساسا على أن كثافة شحنة هي منبع (أو بالوعة) لخطوط تدفق كهري . لاحظ أنه لم يعد نستطيع القول بأن كل تدفق كهري يبدأ وينتهي على شحنة ، لأن الصورة التقطعية لقانون فاراداي (٢٠) تبين أن \mathbf{E} ، وعلى ذلك \mathbf{D} ، قد يكون لها دوران إذا وجد مجال مغناطيسي متغير . على ذلك قد تكون خطوط التدفق الكهري عروات مغلقة . مع ذلك ، العكس مازال صحيحا ، وكل كولوم من شحنة يجب أن يكون له كولوم واحد من تدفق كهري متفرج منه .

معادلة (٢٣) تعترف مرة أخرى بالحقيقة أن « شحنات مغناطيسية » ، أو ثنائيات قطب ، غير معروف أنها توجد . التدفق المغناطيسي يوجد دائما في عروات مغلقة ولا ينفرج أبدا من منبع نقطي .

هذه المعادلات الأربعة تكون الأساس لكل النظرية الكهرومغناطيسية . وهي معادلات تفاضلية جزئية وتربط المجالات الكهربية والمغناطيسية ببعضها وبمنابعها ، الشحنة وكثافة التيار . المعادلات الإضافية التي تربط \mathbf{D} و \mathbf{E} ،

$$(٢٤) \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

التي تربط \mathbf{H} و \mathbf{B} ،

$$(٢٥) \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

التي تعرف كثافة تيار التوصيل ،

$$(٢٦) \quad J = \sigma E$$

والتي تعرف كثافة تيار حمل بدلالة كثافة الشحنة الحجمية ρ ،

$$(٢٧) \quad J = \rho v$$

مطلوبة أيضا لتعرف وتربط الكميات التي تظهر في معادلات ماكسويل .

الجهود V و A لم يتضمننا آنفا لأنهما ليسا ضروريان حتما ، مع أنهما مفيدان للغاية . وسناقشان عند نهاية هذا الفصل .

إذا لم يكن لدينا مواد « لطيفة » للتعامل معها ، حيثل يجب أن نستبدل (٢٤) و (٢٥) بالعلاقات المشتمة على مجالات الاستقطاب والتمغنت ،

$$(٢٨) \quad D = \epsilon_0 E + P$$

$$(٢٩) \quad B = \mu_0(H + M)$$

للمواد الخطية يمكن أن نربط p بـ E

$$(٣٠) \quad P = \chi_e E$$

و M بـ H

$$(٣١) \quad M = \chi_m H$$

أخيراً ، بسبب أهميتها الأساسية يجب أن نضمن معادلة لورنز للقوة ، مكتوبة في الصورة النقطية كالقوة لكل وحدة حجم ،

$$(٣٢) \quad f = \rho(E + v \times B)$$

الفصول التالية مخصصة لتطبيق معادلات ماكسويل على مسائل بسيطة عديدة .

ت ١٠ - ٤ إذا كانت $\sigma = 0$ ، $\epsilon = 2.5\epsilon_0$ و $\mu = 10\mu_0$ ، حدد ما إذا كانت أزواج المجالات التالية تحقق معادلات ماكسويل أم لا : (أ) $H = 5x a_x$ و $E = 2y a_y$ ،

$$(ب) \quad E = 100 \sin 6 \times 10^7 t \sin z a_z , H = -0.1328 \cos 6 \times 10^7 t \cos z a_x$$

$$(ج) \quad D = (x + 6 \times 10^7 t) a_x , B = (-754z - 4.52 \times 10^{10} t) a_y$$

الاجابة : لا ، نعم ، نعم .

١٠ - ٤ : معادلات ماكسويل في الصورة التكاملية

التعرف على الصورة التكاملية لمعادلات ماكسويل يكون عادة أسهل بدلالة القوانين التجريبية التي منها تم الحصول على هذه المعادلات بعملية تعميم . التجارب يجب أن تعامل كميات ماكروسكوبية فيزيائية ، ولذلك نتائجها يعبر عنها بدلالة علاقات تكاملية . معادلة تفاضلية دائما تمثل نظرية . دعنا الآن نجتمع الصور التكاملية لمعادلات ماكسويل بالقسم السابق .

بتكامل (٢٠) على سطح وتطبيق نظرية ستوكس ، نحصل على قانون فاراداي ،

$$(٣٣) \quad \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

وتطبيق نفس العملية على (٢١) يعطى قانون أمبير الدائري ،

$$(٣٤) \quad \int_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = I + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

قانوني جارس للمجالات الكهربائية والمغناطيسية يحصل عليها بتكامل (٢٢)

و (٢٣) في كل نقط حجم واستخدام نظرية الانفراج :

$$(٣٥) \quad \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_{vol} \rho \, dv$$

$$(٣٦) \quad \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

هذه المعادلات الأربعة يمكننا أن نجد شروط الحدود على \mathbf{E} ، \mathbf{H} ، \mathbf{d} ، \mathbf{B} والضرورية لتحسين قيم الثوابت التي يحصل عليها في حل معادلات ماكسويل في صورة تفاضل جزئي . شروط الحدود هذه لا تتغير عامة من صورها لمجالات استاتيكية أو ثابتة ، ونفس الطرق يمكن استخدامها للحصول عليها . بين أي وسطين فيزيائيين حقيقيين (حيث \mathbf{K} يجب أن تكون صفرا على سطح الحدود) ، يمكننا (٣٣) أن نربط مركبات المجال \mathbf{E} المماسية ،

$$(٣٧) \quad E_{t1} = E_{t2}$$

ومن (٣٤)

$$(٣٨) \quad H_{t1} = H_{t2}$$

التكاملات السطحية تنتج شروط الحدود على المركبات العمودية ،

$$(٣٩) \quad D_{n1} - D_{n2} = \rho_S$$

و

$$(٤٠) \quad B_{n1} = B_{n2}$$

غالباً من المرغوب فيه أن نحيل مسألة فيزيائية الى المثالية بفرض موصل تام له σ لانهائية ولكن J محدودة . حينئذ من قانون أوم فى موصل تام ،

$$E = 0$$

ويتبع من الصورة النقطية لقانون فاراداي أن

$$H = 0$$

للمجالات المتغيرة مع الزمن . الصورة النقطية لقانون أمبير الدائرى تبين حينئذ أن القيمة المحدودة لـ J هي

$$J = 0$$

ويجب أن يحمل التيار على سطح الموصل كتيار سطحي K . على ذلك ، اذا كانت المنطقة 2 موصلا تاما ، تصبح (٣٧) الى (٤٠) ، بالترتيب ،

$$(٤١) \quad E_{t1} = 0$$

$$(٤٢) \quad H_{t1} = K$$

$$(٤٣) \quad D_{n1} = \rho_S$$

$$(٤٤) \quad B_{n1} = 0$$

لاحظ أن كثافة الشحنة السطحية تعتبر إمكانية فيزيائية لكلا من العوازل ، والموصلات التامة ، أو الموصلات غير التامة ، ولكن كثافة التيار السطحي تفرض فقط مقترنة بموصلات تامة .

شروط الحدود المصاغة آنفا جزء ضرورى جدا من معادلات ماكسويل . كل المسائل الفيزيائية الحقيقية لها حدود وتتطلب الحل لمعادلات ماكسويل فى منطقتين أو أكثر ومراعاة هذه الحلول عند الحدود . فى حالة موصلات تامة ، حل المعادلات فى الموصل لا يعطى شيئا ذا أهمية (كل المجالات المتغيرة مع الزمن صفراً) ، ولكن تطبيق شروط الحدود (٤١) الى (٤٤) قد يكون صعبا جدا .

بعض خصائص أساسية لانتشار الموجات تكون واضحة عندما تحل معادلات ماكسويل فى منطقة غير محدودة . هذه المسألة معالجة فى الفصل التالى . وهى تمثل أبسط تطبيق لمعادلات ماكسويل ، لأنها المسألة الوحيدة التى لاتتطلب تطبيق أى شروط حدود .

ت ١٠ - ٥ : وحدة المتجه $0.64a_x + 0.6a_y - 0.48a_z$ موجهة من المنطقة $(\theta_2 = 0, \mu_{R2} = 2, \epsilon_{R2} = 2.5)$ نحو المنطقة

١ ($\theta_1 = 0, \mu_{R1} = 10, \epsilon_{R1} = 4$) . سطح الحدود لا يحمل كثافة شحنة سطحية . إذا كانت $E_1 = (-100a_x - 50a_y + 200a_z) \sin 400t$ عند نقطة P فى منطقة I مجاورة للحد ، فأوجد اتساع : (أ) E_{II} ، (ب) E_{n2} ، (ج) E_1 .

الاجابة : $267V/m, 176.0V/m, 201V/m$.

ت ١٠ - ٦ : مستويان موصلان تامان يقعان عند $y = 2m$ و $y = 2.1m$. بينهما مادة لها $\epsilon_R = 9$; $\mu_R = 1$ ، و $\sigma = 0$ ، إذا كانت $E = 200 \cos (10^8t - z)a_z$ V/m ، المستويين ، أوجد :

(أ) $|H|$ عند $(5, 2.06, 1.1, t = 2ns)$ ، (ب) $|K|$ عند $(0.7, 2, 0, t = 0)$.

الاجابة : $1.592A/m, 0.989A/m$.

١٠ - ٥ : الجهود المؤثرة

الجهود المتغيرة مع الزمن ، تسمى عادة جهود مؤثرة بسبب سنراء قريبا ، تجد أعظم تطبيقاتها فى مسائل الاشعاع التى فيها توزيع المنبع معروف تقريبا . يجب أن نتذكر ان الجهد الكهربى المقياسى V يمكن ان يعبر عنه بدلالة توزيع شحنة استاتيكية ،

$$(٤٥) \quad V = \int_{vol} \frac{\rho dv}{4\pi\epsilon R} \quad (\text{استاتيكى})$$

والجهد المغناطيسي المتجه يمكن أن يوجد من توزيع تيار ثابت مع الزمن ،

$$(٤٦) \quad A = \int_{vol} \frac{\mu J dv}{4\pi R} \quad (\text{تيار مستمر})$$

المعادلة التفاضلية المحققة بـ V ،

$$(٤٧) \quad \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (\text{استاتيكي})$$

و،

$$(٤٨) \quad \nabla^2 A = -\mu J \quad (\text{تيار مستمر})$$

يمكن أن يعتبرا على أنهما الصور النقطية للمعادلتين التكامليتين (٤٥) و (٤٦) ، بالترتيب .

بإيجاد V و A يحصل حينئذ على المجالات الأساسية ببساطة باستخدام التدرج ،

$$(٤٩) \quad E = -\nabla V \quad (\text{استاتيكي})$$

أو الالتواء ،

$$(٥٠) \quad B = \nabla \times A \quad (\text{تيار مستمر})$$

ونود الآن أن نعرف جهوداً متغيرة مع الزمن مناسبة متوافقة مع التعبيرات الآتية عندما يشتمل فقط على شحنات استاتيكية وتيارات مستمرة .

معادلة (٥٠) واضح أنها مازالت متوافقة مع معادلات ماكسويل . هذه المعادلات تنص على أن $\nabla \cdot B = 0$ ، وانفراج (٥٠) يؤدي إلى انفراج الالتواء والذي يطابق الصفر . ولذلك دعنا نقبل مؤقتاً (٥٠) على أنها متحققة لمجالات متغيرة مع الزمن ونوجه اهتمامنا لـ (٤٩) .

الفصول في (٤٩) واضح ، لأن تطبيق عملية الالتواء لكلا الطرفين والتعرف على أن الالتواء لتدرج يطابق الصفر تواجهنا بـ $\nabla \times E = 0$. الصورة النقطية لقانون فاراداي تنص على أن $\nabla \times E$ لا تساوي صفراً عامة . دعنا نحاول عمل تحسين بإضافة حد مجهول إلى (٤٩) ،

$$E = -\nabla V + N$$

ياخذ الالتواء ،

$$\nabla \times E = 0 + \nabla \times N$$

باستخدام الصورة التقطعية لقانون فاراداي،

$$\nabla \times \mathbf{N} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

واستخدام (٥٠)، يعطينا

$$\nabla \times \mathbf{N} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{A})$$

أو

$$\nabla \times \mathbf{N} = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

أبسط حل لهذه المعادلة هو

$$\mathbf{N} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

وهذا يقودنا الى

$$(٥١) \quad \mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

مازال يجب أن نتحقق من (٥٠) و (٥١) بتمريضهما في معادلتى ماكسويل

الباقيتين :

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

بعمل هذا ، نحصل على التمييزات الأكثر تعقيدا

$$\frac{1}{\mu} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{J} + \epsilon \left(-\nabla \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right)$$

$$\epsilon \left(-\nabla \cdot \nabla V - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A} \right) = \rho$$

أو

$$(٥٢) \quad \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu \mathbf{J} - \mu \epsilon \left(\nabla \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right)$$

و

$$(٥٣) \quad \nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

ليس هناك عدم توافق ظاهر في (٥٢) و (٥٣) . تحت ظروف استاتيكية أو تيار مستمر $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ ، وتؤول (٥٢) و (٥٣) الى (٤٨) و (٤٧) ، بالترتيب . ولذلك سنفرض أن الجهود المتغيرة مع الزمن يمكن أن تعرف بحيث أنه يمكن الحصول على B و E منها خلال (٥٠) و (٥١) . مع أن هاتين المعادلتين الأخيرتين لا تنفي بتحديد V و A تماما . وهما يمثلان شروطا ضرورية ولكن غير كافية . فرضنا الابتدائي كان فقط أن $B = \nabla \times A$ ، ومنته لا يمكن أن يُعرف باعطاء التواء وحده . افترض مثلا ، أن لدينا مجال جهد متجه بسيط جدا فيه A_x و A_y أصفار . مفكوك (٥٠) يؤدي الى

$$B_x = 0$$

$$B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z}$$

$$B_z = -\frac{\partial A_x}{\partial y}$$

ونرى أنه لا توجد معلومات متاحة عن الطريقة التي تتغير بها A_x مع x . هذه المعلومات يمكن أن توجد إذا عرفنا أيضا قيمة انفراج A ، لأن في مثلنا $\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x}$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x}$$

أخيرا ، يجب أن نلاحظ أن معلوماتنا عن A معطاة فقط كمشتقات جزئية ، وأن حدا ثابتا فراغيا يمكن أن يضاف . في كل المسائل الفيزيائية التي فيها تمتد منطقة الحل الى مالا نهاية ، هذا الحد الثابت يجب أن يكون صفرا ، لأنه لا يمكن أن توجد مجالات عند مالانهاية .

بالتعميم من هذا المثال البسيط ، يمكننا القول أن مجالا متجهيا يعرف تماما عندما يُعطى كل من التواءه وانفراجه وعندما تعرف قيمته عند أى نقطة واحدة (بمافيه مالانهاية) . ولذلك لنا حرية تحديد انفراج A ونعمل هذا مع مراقبة (٥٢) و (٥٣) ، باحثين عن أبسط التعبيرات . نعرف

$$(٥٤) \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu\epsilon \frac{\partial V}{\partial t}$$

وتصبح (٥٢) و (٥٣)

$$(٥٥) \quad \nabla^2 \mathbf{A} = -\mu\mathbf{j} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}$$

و

$$(٥٦) \quad \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

هذه المعادلات مرتبطة بمعادلة الموجة ، التى ستناقش فى الفصل التالى . وهما يبديان تماثلا كبيرا ، ويجب أن نكون مغتربين بشدة بتعريفنا لـ V و A ،

$$(٥٠) \quad B = \nabla \times A$$

$$(٥٤) \quad \nabla \cdot A = -\mu\epsilon \frac{\partial V}{\partial t}$$

$$(٥١) \quad E = -\nabla V - \frac{\partial A}{\partial t}$$

والتكاملات المكافئة لـ (٤٥) و (٤٦) للجهد المتغيرة مع الزمن تتبع من التعاريف (٥٠) ، (٥١) ، و (٥٤) ، ولكننا سنعطى فقط النتائج النهائية ونشير الى طبيعتها العامة . فى الفصل التالى ستقدم دراسة الموجة المستوية المنتظمة مفهوم الانتشار ، التى فيها أى اضطراب كهرومغناطيسى يتضح أنه ينتقل بسرعة

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

خلال أى وسط متجانس موصوف بـ μ و ϵ . فى حالة فضاء حر يتضح أن هذه السرعة هى سرعة الضوء ، تقريبا $3 \times 10^8 \text{ m/s}$. من المنطقي ، حيثئذ ، أن نشك أن الجهد عند أى نقطة ليس نتيجة قيمة كثافة الشحنة عند نقطة ما بعيدة عند نفس اللحظة ، ولكن لقيمتها عند زمن ما سابق ، لأن التأثير ينتشر بسرعة محدودة . على ذلك تصبح (٤٥)

$$(٥٧) \quad V = \int_{\text{vol}} \frac{[\rho]}{4\pi\epsilon R} dv$$

حيث ندر $[\rho]$ الى أنه قد استبدل بكل t ظاهرة فى تعبير ρ زمن مؤخر ،

$$t' = t - \frac{R}{v}$$

على ذلك ، اذا أعطيت كثافة الشحنة فى كل مواضع الفراغ بـ

$$\rho = e^{-r} \cos \omega t$$

فان

$$[\rho] = e^{-r} \cos \left[\omega \left(t - \frac{R}{v} \right) \right]$$

حيث R هى المسافة بين عنصر الشحنة التفاضلى المعتبر والنقطة التى سيعين عندها الجهد .

الجهد المغناطيسي المؤخر يعطى به

$$(٥٨) \quad A = \int_{vol} \frac{\mu[J]}{4\pi R} dv$$

استخدام زمن مؤخر تسبب فى أن تعطى الجهود المتغيرة مع الزمن اسم الجهود المؤخرة . فى الفصل الثالث عشر سنتطرق (٥٨) للحالة البسيطة لعنصر تيار تفاضلى فيه I دالة جيبية فى الزمن . تطبيقات بسيطة أخرى لـ (٥٨) معتبرة فى المسائل عند نهاية هذا الفصل .

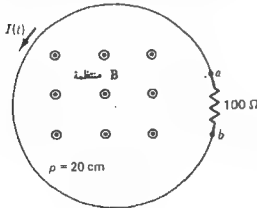
يمكننا تلخيص استخدام الجهود بالنص على أن معرفة توزيعات ρ و J فى كل مواضع الفراغ تمكنتنا نظريا أن نعين V و A من (٥٧) و (٥٨) . ويحصل حينئذ على المجالات الكهربائية والمغناطيسية بتطبيق (٥٠) و (٥١) . إذا كانت توزيعات الشحنة والتيار غير معروفة ، أولا يمكن عمل تقريبات معقولة لها ، فهذه الجهود عادة لا تقدم طريقا سهلا فى اتجاه الحل عما يفعله التطبيق المباشر لمعادلات ماكسويل .

ت ١٠ - ٧ : شحنة نقطية ذات $2\cos 10^8 \pi t \mu C$ تقع عند $(0,0,-1.5)$ ، بينما عند $(0,0,1.5)$ شحنة $-2\cos 10^8 \pi t \mu C$. كلاهما فى فضاء حر . أوجد V عند :
(أ) $(0,0,2,998.5)$ عند $t = 0$ ، (ب) $(0,0,2,999)$ عند $t = 0$ ، (ج) نقطة على المحور x على بعد $2,998.5m$ من كل شحنة ، كدالة فى t .
الإجابة : $11.99V$ ، $10.38V$ ، $0V$.

مراجع مقترحة :

1 Bewley, L. V.: "Flux Linkages and Electromagnetic Induction," The Macmillan Company, New York, 1952.

هذا الكتاب الصغير يناقش عدیدا من الأمثلة المتناقضة ظاهريا المشتمة على فولتيات مولدة (٩) بالحث .



شكل ١٠ - ٤ انظر مسألة ١ .

- 2 Faraday, M.: "Experimental Researches in Electricity," B. Quaritch, London, 1839, 1855.

قراءة شيقة جدا لبحث على ميكرو. ومصدر أحدث ومتاح هو

Encyclopaedia Britannica, Inc., Chicago, 1952.

- 3 Halliday, D., and R. Resnick: "Physics," pt. II, 3d ed., John Wiley & Sons, New York, 1978.

هذا المرجع منتشر الاستخدام في منهج المستوى الجامعي الأول في الفيزياء. معظم رموزها ومعادلاتها هي نفس التي نستخدمها.

- 4 Harman, W. W.: "Fundamentals of Electronic Motion," McGraw-Hill Book Company, New York, 1953.

التأثيرات النسبية مناقشة بطريقة واضحة وشيقة.

- 5 Langmuir, R. V.: "Electromagnetic Fields and Waves," McGraw-Hill Book Company, New York, 1961.

معادلات ماكسويل مستبقة في الفصل السادس.

- 6 Nussbaum, A.: "Electromagnetic Theory for Engineers and Scientists," Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1965.

انظر مثال المولد- الصاروخ الذي يبدأ على 211 p

- 7 Owen, G. E.: "Electromagnetic Theory," Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1963.

قانون فاراداي مناقش بدلالة مرجع الاسناد في الفصل الثامن.

- 8 Panofsky, W. K. H., and M. Phillips: "Classical Electricity and Magnetism," 2d ed., Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1962.

النسبية معالجة على مستوى متوسط التقدم في الفصل الخامس عشر.

مسائل

١. دح الموصل الذي يصل بين نهايتي المقاومة بشكل ١٠ - ٤ يكون تاما، ودع $B = 0.4 \sin 120\pi t \text{ Wb/m}^2$ ، يمكن فرض أن التدفق الناتج من تيار العروة نفسها مهمل. أي أن، المحاثة الذاتية للدائرة مهمله. (أ) أوجد $V_{oe}(t)$ (ب) أوجد $I(t)$.

٢. جوانب عروة مربعة في المستوى $z = 0$ موضوعة عند $x = \pm 0.6\text{m}$ و $y = \pm 0.6\text{m}$. يوجد هناك مجال مغناطيسي متغير مع الزمن في هذه المنطقة، معطى $B = (0.2a_x - 0.4a_y + 0.8a_z) \cos 2,000\pi \text{ Wb/m}^2$ إذا كانت المقاومة الكلية للحلقة هي $1\text{k}\Omega$ ماهو التيار الموجود في اتجاه عقرب الساعة (كما يرى من المحور z الموجب) ؟ يمكن فرض أن التدفق الناتج من تيار العروة نفسها مهمل. أي أن، المحاثة الذاتية للعروة يمكن أن تهمل.

٣- إذا كانت $B = 2 \cos(3 \times 10^4 \pi t - \pi y) \text{ a}_z \mu\text{Wb/m}^2$

أوجد $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$ حول المسار المغلق :

(أ) $(0,0,0)$ الى $(1,0,0)$ الى $(1,1,0)$ الى $(0,1,0)$ الى $(0,0,0)$ ،

(ب) $(0,0,0)$ الى $(1,0,0)$ الى $(1,2,0)$ الى $(0,2,0)$ الى $(0,0,0)$.

٤- خط نقل محوري ذو أسطح موصلة عند $\rho = 1\text{mm}$ ، $\rho = 5\text{mm}$ و $z = 0$ ،

مملوء بالهواء ويحتوى المجال $\mathbf{H} = (0.031/\rho) \cos 6 \times 10^7 \pi t \cos 0.2\pi z \text{ a}_\phi \text{ A/m}$

(أ) أوجد $\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{L}$ حول مسار ممتد من $(10^{-3}, 0^\circ, 0)$ الى :

$(5 \times 10^{-3}, 0^\circ, -2)$ الى $(5 \times 10^{-3}, 0^\circ, -2)$ الى $(10^{-3}, 0^\circ, -2)$ الى

$(10^{-3}, 0^\circ, 0)$.

(ب) على طول أى أقسام من هذا المسار يجب أن يكون $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$ صفراً ؟

٥- عروة موصلة فى المستوى $z = 0$ محدودة بـ $x = 0$ و $x = 0.2\text{m}$ و $y = 0$ و

$y = 0.3\text{m}$ عند $t = 0$. العروة متحركة فى اتجاه \mathbf{a}_x بسرعة منتظمة ذات 6m/s .

العروة تحتوى على مقاومة صغيرة جداً ، $R = 20\Omega$. مجال مغناطيسى غير منتظم

ثابت مع الزمن فى هذه المنطقة يمكن أن يمثل بـ $B = 2x^2 y \text{ a}_z \text{ Wb/m}^2$. ارسم

منحنى تخطيطي مبين القدرة المعطاة لـ R كدالة فى الزمن ، $0 \leq t \leq 100\text{ms}$.

٦- الفيضان فى شكل ١٠-٥ يفصلهما 5cm ويمتدان مسافة 2.4m من الفولتметр . إذا

كانت $B = 0.4x \text{ a}_z \text{ wb/m}^2$ وموضع الفيضيب المنزلق معطى بـ :

$x = 5.4t - t^2 \text{ meters}$: (أ) أوجد V_{ab} عندما يكون الفيضيب عند $x = 1\text{m}$ ، (ب)

ارسم V_{ab} تخطيطياً مع t .

٧- فى شكل ١٠-٦ ، دع $B = 0.4 \text{ Wb/m}^2$ خارجاً من الورقة ، و $v = 8\text{m/s}$.

(أ) أوجد قراءة الفولتметр كدالة فى الزمن إذا كانت $x = 0$ عند $t = 0$.

(ب) أعد إذا أعطى موضع الفيضيب المنزلق بـ $x = 300t^2 \text{ meters}$.

٨- الفيضان فى شكل ١٠-٧ كلاهما له مقاومة مقدارها $2\Omega/\text{m}$. يتحرك الفيضيب

بسرعة ثابتة مقدارها 10m/s فى مجال مغناطيسى منتظم مقداره 0.7 wb/m^2 . أوجد I

كدالة فى T إذا ترك الفيضيب الطرف الأيسر عند $t = 0$.

٩- المنطقة بين الفيضيين فى شكل ١٠-٨ تحتوى مجالاً منتظماً $B = 0.15 \text{ Wb/m}^2$.

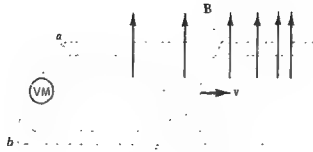
الفيضيب المنزلق يتحرك الى اليمين بسرعة ثابتة 8m/s ويحتوى على فولتметр ذو

مقاومة عالية ، ولكن ليست لانهائية . أوجد قراءة الفولتметр عندما يكون الفيضيب عند

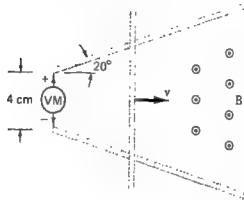
$x = 5\text{m}$: (أ) ترك الفيضان مفتوحاً - الدائرة عند $x = 0$ و $x = 10$ كما هو

مبين ، (ب) النهاية عند $x = 0$ مقصورة الدائرة (ج) النهاية عند $x = 10$ مقصورة

الدائرة ؛ (د) كلا النهايتين مقصورة الدائرة .



شكل ١٠ - ٥ : انظر مسألة ٦ .



شكل ١٠ - ٦ : انظر مسألة ٧ .

١٠ - الفضيّان في شكل ١٠ - ١ متبعدان مسافة 24cm

و $B = 0.3 \cos 120\pi t \text{ a}_z \text{ Wb/m}^2$ إذا كانت $y' = 0$ عند

$t = 0$ ، أوجد V_{12} عند $t = 2\text{ms}$:ـ (أ) $V = 12a_y \text{ m/s}$

(ب) $V = 12\cos 10\pi t a_y \text{ m/s}$.

١١ - احسب نسبة اتساعات كثافة تيار التوصيل الى كثافة تيار الازاحة للمجال الكهربى

في $E = E_0 \cos \omega t \text{ V/m}$:

(أ) النحاس U_1/m و $\sigma = 5.8 \times 10^7$ و $\epsilon = \epsilon_0$ ، $\omega = 1,000\text{rad/s}$ ،

(ب) ماء مقطر U_2/m و $\sigma = 2 \times 10^{-4}$ ، $\epsilon = \epsilon_R = 80$ و $\omega = 1,000\text{rad/s}$ ،

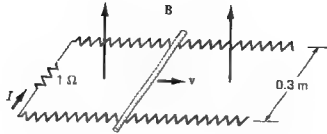
(ج) بوليسترين ، U_3/m ، $\sigma = 10^{-16}$ ، $\epsilon_R = 2.53$ ، $\omega = 1,000\text{rad/s}$.

١٢ - منبع فولتية $V_0 \sin \omega t$ موصل بين كرتين موصلتين متحدى المركز ، $r = a$

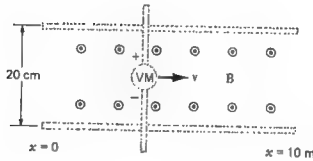
و $r = b$ ، حيث الحيز بينهما هو مادة لها $\epsilon = \epsilon_R \epsilon_0$ و $\mu = \mu_0$ ،

و $\sigma = 0$. أوجد تيار الازاحة الكلى خلال العازل وقارنه بتيار المنبع كما يعين من

السمة (قسم ٥ - ١٠) وطرق تحليل الدائرة .



شكل ١٠ - V . انظر مسألة ٨ .



شكل ١٠ - A . انظر مسألة ٩ .

١٣ - كثافة تيار الازاحة $2\cos(\omega t - 5z)\mathbf{a}_z \mu A/m^2$ في مادة لها $\sigma = 0$, $\epsilon = 4\epsilon_0$ و $\mu = 5\mu_0$. (أ) استخدم تعريف كثافة تيار الازاحة لايجاد E و D . (ب) استخدم الان الصورة النقطية لقانون فاراداي ، وتكاملا زمنيا لايجاد H و B . (ج) أخيرا ، استخدم الصورة النقطية لقانون أمبير الدائري لايجاد كثافة تيار الازاحة . كم يجب أن تكون ω ؟

١٤ - مادة لها $\epsilon_R = 1.5$ و $\mu_R = 1$ لها موصلية σ . دع $E = 60\cos 10^5 t \mathbf{a}_x$ V/m . أوجد : (أ) J_e ، (ب) J_d ، (ج) الموصلية التي بها كثافة تيار الازاحة وكثافة تيار التوصيل يكون لها اتساعان متساويان .

١٥ - إذا كانت $E = 200e^{a-x-kt}\mathbf{a}_y$ V/m في فضاء حر ، استخدم معادلات ماكسويل لايجاد k و H ، علما بان كل المجالات تتغير مع الزمن بالصورة e^{-kt} .

١٦ - خط نقل محوري له نصف قطر داخلي $a = 1$ mm ، نصف قطر خارجي $b = 4$ mm ، وعازل متجانس فيه $\mu_R = 1$, $\epsilon_R = 2.25$ و $\sigma = 0$ شدة المجال الكهربى هي $E = (100/\rho) \cos(10^8 t - \beta z)$ V/m

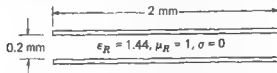
(أ) استخدم معادلات الالتواء لماكسويل لإيجاد β . (ب) أوجد H . (ج) عين كثافة الشحنة السطحية على الموصل الداخلى كدالة فى z و ϕ .

(د) احسب اتساع تيار الازاحة الكلى فى الطول $0 \leq z \leq 1m$.
 ١٧ - المجال المغناطيسى بالقرب من موتور مكثف شعر يتغير جيبيا مع تردد مقداره $60Hz$. (أ) بين أن التعبير البسيط $B = \cos 2\pi 60 t a_x \text{ Wb/m}^2$ لا يحقق معادلات ماكسويل فى الهواء . (ب) أوجد قيمة k التى تجعل $B = \cos (2\pi 60 t - k y) a_x$ تحقق معادلات ماكسويل .

١٨ - مجال كهربي فى فضاء حر معطى فى احداثيات كروية بالصورة
 $E = (0.1/r) \sin \theta \sin (15 \times 10^9 t - 5r) a_\theta \text{ V/m}$. أوجد H اذا فرض أن كل المجالات تتغير جيبيا مع الزمن بنفس التردد .

١٩ - شدة المجال الكهربي عند نقطة الأصل هى $10a_y - 3a_z \text{ V/m}$ عند $t = 0$. (أ) اذا وقعت نقطة الأصل على سطح تام التوصيل بينما المادة المتاخمة لنقطة الأصل لها $\epsilon_R = 10$, $\mu_R = 2$, و $\sigma = 0$ أوجد مقدار كثافة الشحنة السطحية عند نقطة الأصل عند $t = 0$. (ب) اذا كانت $\epsilon_R = 8$, $\mu_R = 3$, و $\sigma = 0$ لـ $x \leq 0$, بينما $\epsilon_R = 3$, $\mu_R = 8$, و $\sigma = 0$ لـ $x > 0$, أوجد $|E|$ عند $t = 0$ عند النقطة $(0^+, 0, 0)$.

٢٠ - فى القسم الأول من هذا الفصل ، استخدم قانون فاراداي لبيان أن المجال $E = -1/2k B_0 e^{kt} a_\phi$ يتبع من المجال المغناطيسى المتغير $B = B_0 e^{kt} a_z$ (أ) بين أن هذه المجالات لا تحقق معادلة الالتواء الأخرى لماكسويل . (ب) اذا جعلنا $B_0 = 1 \text{ Wb/m}^2$ و $k = 10^6 \text{ s}^{-1}$ فنحن ننشئ كثافة تدفق مغناطيسى كبيرة لحد ما فى $1 \mu\text{s}$. استخدم معادلة $\nabla \times H$ لتبين أن المعدل الذى يجب (ولكن لاتعمل) أن تتغير به B_z مع ρ هو حوالى $10^{-6} \text{ Wb/m}^2 \text{ per meter}$ فقط فى فضاء حر عند $t = 0$.



شكل ٩-١٠ أنظر مسألة ٨ .

٢١ - دع $\epsilon_{R1} = 1$, $\mu_{R1} = 1$, و $\sigma_1 = 0$ فى منطقة 1 ($z < 0$) ، بينما $\mu_{R2} = 20$ و $\epsilon_{R2} = 5$ و $\sigma_2 = 0$ فى منطقة 2 ($z > 0$) شدة المجال الكهربي فى منطقة 1 هى $E_1 = [60 \cos (15 \times 10^9 t - 5z) + 20 \cos (15 \times 10^9 t + 5z)] a_x \text{ V/m}$ فى منطقة ٢
 $E_2 = A \cos (15 \times 10^9 t - 50z) a_x \text{ V/m}$, 2

(أ) أوجد A . (ب) أوجد H_1 . (ج) أوجد H_2 . (د) بين أن H_1 و H_2 تحقق شروط الحدود الضرورية عند $z = 0$.

٢٢ - في منطقة $1 < x < 10^{-11} \text{ F/m}$ ، $\epsilon_1 = 10^{-11} \text{ F/m}$ ، $\mu_1 = 4 \times 10^{-6} \text{ H/m}$ ،

و $\sigma_1 = 10^{-3} \text{ V/m}$ ، بينما $\epsilon_2 = 2 \epsilon_1$ ، $\mu_2 = \mu_1/2$ و $\sigma_2 = 4\sigma_1$ في منطقة

$2 < x$. من المعلوم أن $E_t = (10a_x + 20a_y + 30a_z) \cos 10^9 t \text{ V/m}$

عند $P_1 (0,0,0)$. (أ) أوجد E_{t1} ، E_{n1} ، D_{t1} و D_{n1} عند P_1 ،

(ب) أوجد J_{t1} و J_{n1} عند P_1 . (ج) أوجد E_{t2} ، E_{n2} ، D_{t2} و D_{n2} عند

$P_2 (0^+, 0, 0)$. (د) (أصعب) استخدم معادلة الاستمرارية لتساعد في بيان أن

$J_{n2} - J_{n1} = \partial D_{n2}/\partial t - \partial D_{n1}/\partial t$ ثم حدد J_{n2} و J_{n1} .

٢٣ - أسطح تامة التوصيل تقع عند $\rho = 5 \text{ mm}$ ، $\rho = 20 \text{ mm}$ ، $z = 0$ ، و $z = 50 \text{ cm}$ في

احداثيات اسطوانية المنطقة المحصورة هي عازل مع $\epsilon_R = 2.25$ ، $\mu_R = 1$

و $\sigma = 0$. في هذه المنطقة ، $H = (2/\rho) \cos 2\pi z \cos 4\pi 10^8 t \text{ A/m}$.

(أ) أوجد كثافة التيار السطحية عند $\rho = 5 \text{ mm}$ ، $\phi = 0$ ، و $z = 5 \text{ cm}$.

(ب) أوجد E .

(ج) حدد كثافة الشحنة السطحية عند $\rho = 20 \text{ mm}$ ، $\phi = \pi/2$ ، و $z = 25 \text{ cm}$.

(د) احسب كثافة تيار الازاحة عند $\rho = 10 \text{ mm}$ ، $\phi = 0.2\pi$ ، و $z = 25 \text{ cm}$.

٢٤ - فتيلة موصلة تمتد من $z = -5 \text{ m}$ الى $z = 5 \text{ m}$ على المحور z في فضاء حر

وتحمل تيارا $I = 4t \text{ A}$ في اتجاه a_z . أوجد وارسم تخطيطيا $A(t)$ عند $(0,0,10)$

لـ $0.1 \mu\text{s} \leq t \leq 0.1 \mu\text{s}$.

٢٥ - شدة المجال الكهربى داخل خط النقل الشريطى الدقيق المبين فى شكل ١٠ - ٩

يمكن أن يفترض أنها $E = -10^5 \cos(10^9 t - 4z) a_y \text{ V/m}$

(أ) أوجد $A(x,y,z,t)$ اذا كانت $A(x,0,z,t) = 0$.

(ب) أوجد $V(x,y,z,t)$ اذا كانت $V(x,0,z,t) = 0$.

٢٦ - إذا أعطيت الجهود المؤخرة ، $V = x - ct$ و $A = (x/c - t) a_x$ حيث

$c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$: (أ) بين أن $\nabla \cdot A = -\mu \epsilon \partial V / \partial t$ ، (ب) أوجد H, B, E و D .

(ج) بين أن هذه النتائج تحقق معادلات ماكسويل فى فضاء حر .

الفصل الحادى عشر

الموجة المستوية المنتظمة

فى هذا الفصل سنتطرق معادلات ماكسويل لتقديم النظرية الأساسية للحركة الموجية . الموجة المستوية المنتظمة تمثل واحدة من أبسط تطبيقات معادلات ماكسويل ، ومع ذلك توضح الأساسيات وراء انتشار الطاقة . سنقدم سرعة الانتشار ، طول الموجة ، معاوقة الموجة ، ثوابت الطور والتوهين . واستخدام نظرية بوينتيج فى إيجاد كثافة القدرة . أخيرا ، سنعتبر ارتداد ونفاذ موجة مستوية منتظمة عند الحدود بين وسطين مختلفين . استخدام نسبة الموجة الواقفة ومعاوقة الدخول سيعدنا لاعتبار عديد من المسائل العملية للثقل الموجة للقدرة والمعلومات فى الفصل التالى .

١١-١ : الحركة الموجية فى الفضاء الحر

كما أشرنا فى مناقشتنا لشروط الحدود فى الفصل السابق ، حل معادلات ماكسويل بدون تطبيق أى شروط حدود اطلاقا يمثل نوعا خاصا جدا من المسائل . مع أننا نقصر اهتمامنا على حل فى احداثيات كرتيزية ، فرغم ذلك يظهر أننا نحل مسائل مختلفة عديدة حينما نعتبر حالات خاصة مختلفة فى هذا الفصل . يُحصل على الحلول أولا فى حالات فضاء حر ، ثم لعوازل تامة ، يلى ذلك لعوازل فاقدة ، وأخيرا للموصل الجيد . نعمل هذا لنستعمل التقريبات التى يمكن تطبيقها لكل حالة خاصة ولتؤكد الصفات المميزة الخاصة لانتشار الموجة فى هذه الأوساط ، ولكنه ليس ضروريا أن نستخدم معالجة منفصلة ، من الممكن (وليس صعبا جدا) حل المسألة العامة مرة بلارجعة . مناقشتنا للانتشار فى العازل ذى فقد تبدأ باعتبار الحالة العامة ، ولكن سنُبسط حيثل التحليل بحصر اهتمامنا على عوازل ذات فقد صغير نسبيا .

لاعتبار الحركة الموجية فى فضاء حر أولا ، يمكن كتابة معادلات ماكسويل بدلالة

E و H فقط بالصورة

$$(١) \quad \nabla \times H = \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

$$(٢) \quad \nabla \times E = -\mu_0 \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$(٣) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

$$(٤) \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0$$

الآن دعنا نرى ما إذا كان ممكنا استنتاج الحركة الموجبة من هذه المعادلات الأربعة بدون حلها فعلا ، المعادلة الأولى تنص على أنه إذا كانت E متغيرة مع الزمن عند نقطة ما ، فإن H لها التواء عند تلك النقطة ، وعلى ذلك يمكن أن تعتبر مكونة لعروة مغلقة صغيرة مرتبطة بالمجال E المتغير . أيضا إذا كانت E متغيرة مع الزمن ، فإن H ستغير عامة أيضا مع الزمن ، مع أنه ليس بالضرورة بنفس الطريقة . بعد ذلك ، نرى من المعادلة الثانية أن هذه الـ H المتغيرة تنتج مجالا كهربيا الذي يكون عروة مغلقة صغيرة حول خطوط H . لدينا الآن مرة أخرى مجال كهربى متغير ، وهو فرضنا الأصلي ، ولكن هذا المجال موجود على مسافة صغيرة بعيدا عن نقطة الاضطراب الأصلي . قد نخمن (صحيحا) أن السرعة التى يتحرك بها التأثير بعيدا عن النقطة الأصلية هى سرعة الضوء ، ولكن هذا يجب أن يحقق بفحص كمى أكثر لمعادلات ماكسويل .

دعنا أولا نكتب معادلات ماكسويل الأربعة الآتية للحالة الخاصة للتغير الجيبى (أكثر دقة ، جيبى التمام) مع الزمن . يتحقق هذا بواسطة التدوين المركب والمطاورات . نفرض أن مركبة ما ، مثل E_x ، معطاة بالصورة

$$(٥) \quad E_x = E_{xyz} \cos(\omega t + \psi)$$

حيث E_{xyz} دالة حقيقية فى x, y, z وربما ω ، ولكن ليس فى الزمن ، و ψ هى زاوية طور التى يمكن أن تكون أيضا دالة فى x, y, z و w . باستخدام مطابقة أولير ،

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$$

ندع

$$(٦) \quad E_x = \text{Re } E_{xyz} e^{j(\omega t + \psi)} = \text{Re } E_{xyz} e^{j\psi} e^{j\omega t}$$

حيث معنى Re أن يؤخذ الجزء الحقيقى للكمية التالية . اذا بسطنا حينئذ المصطلحات باسقاط E_x وحذف $e^{j\psi}$ ، تصبح كمية المجال E_x مطاور أو كمية مركبة ، التى نميزها باستخدام رمز سفلى E_{xx} ، على ذلك

$$(٧) \quad E_{xx} = E_{xyz} e^{j\psi}$$

الـ s يمكن التفكير فيها كمسيرة لكمية مجال تردد معبر عنها كدالة في التردد المركب s ، مع أننا سنعتبر فقط تلك الحالات التي فيها s تخيلية صرفة ، $s = j\omega$.

مثلا ، دعنا نأخذ $E_y = 100 \cos(10^8 t - 0.5z)$ V/m ونعبر عنها كمطاور . نلجأ أولا للتدوين الأسى ،

$$E_y = \text{Re}[100e^{j(10^8 t - 0.5z)}]$$

ثم نمسح R_e ونحذف $e^{j10^8 t}$ ، حاصلين على المطاور ،

$$E_{ys} = 100e^{-j0.5z}$$

لاحظ أن E_y حقيقية ، ولكن E_{ys} عامة مركبة .

إذا أعطيت مطاورا ، فيمكن دائما الحصول على الكمية الحقيقية المقابلة بالضرب في $e^{j\omega t}$ وأخذ الجزء الحقيقي للتعبير المحصل .
الآن ، لأن

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} [E_{xys} \cos(\omega t + \psi)] = -\omega E_{xys} \sin(\omega t + \psi) \\ &= \text{Re } j\omega E_{xs} e^{j\omega t} \end{aligned}$$

من الواضح أن أخذ المشتقة الجزئية لأي كمية مجال بالنسبة للزمن تكافئ ضرب المطاور المقابل في $j\omega$.

كمثال ، إذا كانت

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial H_z}{\partial z}$$

تكون معادلة المطاور المقابلة

$$j\omega E_{xs} = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial H_{zs}}{\partial z}$$

حيث يمكن أن يكون كلا من E_{ys} و E_{zs} كميات مركبة .

التعبير عن متجه كمطاور ليس أكثر تعقيدا من التعبير عن مركبة مفردة كمطاور . على ذلك ، إذا أعطيت معادلات ماكسويل ،

$$\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

تكون العلاقة المقابلة بدلالة متجهات - مطاور هي

$$(A) \quad \nabla \times H_s = j\omega\mu_0 E_s$$

معادلة (A) والمعادلات الثلاثة

$$(9) \quad \nabla \times E_s = -j\omega\mu_0 H_s$$

$$(10) \quad \nabla \cdot E_s = 0$$

$$(11) \quad \nabla \cdot H_s = 0$$

هي معادلات ماكسويل الأربعة بتدوين مطاور لتغير جيبي مع الزمن في فضاء حر . يجب ملاحظة أن (١٠) و (١١) لم تعد ذات علاقتين غير مرتبطتين ، لأنهما يمكن أن يحصل عليهما بأخذ انفرج (A) و (9) ، بالترتيب .

خطواتنا التالية هي الحصول على صورة الحالة الثابتة الجيبية لمعادلة الموجة ، وهذه خطوة يمكننا حلها لأن المسألة البسيطة التي سنحلها تعطى بسهولة الحل الآتي للمعادلات الأربعة الآنفة . كيفما كان ، معادلة الموجة هي معادلة هامة وهي نقطة بدء ملائمة لتعديد من الاستقصاءات الأخرى .

الطريقة التي يحصل بها على معادلة الموجة يمكن إنجازها في سطر واحد (باستخدام أربع علامات تساوى على فرخ أعرض من الورق) :

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times E_s &= \nabla(\nabla \cdot E_s) - \nabla^2 E_s = -j\omega\mu_0 \nabla \times H_s \\ &= \omega^2\mu_0\epsilon_0 E_s = -\nabla^2 E_s \end{aligned}$$

لأن $\nabla \cdot E_s = 0$ على ذلك

$$(12) \quad \nabla^2 E_s = -\omega^2\mu_0\epsilon_0 E_s$$

معادلة المتجه - المطاور الموجزة هذه معروفة أيضاً بمعادلة هلمهولتز المتجهة^(١) . وهي

(١) هيرمان لديفيج فيرديناند فون هلمهولتز (1821 - 1894) . كان أستاذا في برلين يعمل في مجالات الفيزيولوجيا ، الديناميكا الكهربائية ، والبصريات . هرتز كان أحد تلاميذه .

صعبة جدا عندما تفك ، حتى فى احداثيات كرتيزية ، لأن ثلاث معادلات مطاور مقياسية تنتج ، وكل له أربعة حدود . المركبة فى اتجاه x لـ (١٧) تصبح ، باستخدام التدوين بالعامل دل ،

$$(١٣) \nabla^2 E_{xs} = -(\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 E_{xs})$$

وفك العامل يؤدي الى المعادلة التفاضلية الجزئية من الرتبة الثانية

$$(١٤) \frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial z^2} = -(\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 E_{xs})$$

دعنا نحاول حلا لـ (١٤) بفرض أن حلا بسيطا يكون ممكنا لا تتغير فيه E_{xs} مع x أو y ، حتى نكون المشتقتين المقابلتين اصفارا ، مؤدية الى المعادلة التفاضلية العادية

$$(١٥) \frac{d^2 E_{xs}}{dz^2} = -(\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 E_{xs})$$

بالفحص ، يمكننا كتابة حل لـ (١٥) ،

$$(١٦) E_{xs} = A e^{-j\omega \cdot \overline{\mu_0 \epsilon_0} z}$$

أعد ادخال العامل $e^{j\omega t}$ ، وتختزل الى صورة مثلثية بأخذ الجزء الحقيقي ،

$$E_x = A \cos [\omega(t - z\sqrt{\mu_0 \epsilon_0})]$$

حيث يمكن استبدال عامل الاتساع الاختيارى بـ E_{x0} ، قيمة E_x عند $t = 0$ ، $z = 0$ ،

$$(١٧) \boxed{E_x = E_{x0} \cos [\omega(t - z\sqrt{\mu_0 \epsilon_0})]}$$

مسألة ١ عند نهاية هذا الفصل تبين أن

$$(١٨) \boxed{E'_x = E_{x0} \cos [\omega(t + z\sqrt{\mu_0 \epsilon_0})]}$$

ويمكن أيضا الحصول عليها من حل بديل لمعادلة هلمهولتز المتجهة .

قبل أن نجد أى مركبات مجال أخرى ، يجب أن نفهم الطبيعة الفيزيائية للمركبة المفردة للمجال الكهربى التى قد حصلنا عليها فى معادلة (١٧) . نرى أنها مركبة فى اتجاه x ، التى يمكننا وصفها على أنها متجهة الى أعلى عند سطح ارض مستوية ، الجذر $\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ له القيمة التقريبية $1/(3 \times 10^8) \text{ s/m}$ ، التى هى مقلوب c ، سرعة الضوء فى فضاء خمر ،

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 2.998 \times 10^8 \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

دعنا أيضا نسمح للمحور z أن نشير للمشرق ونأخذ $z = 0$ في شيكاغو . في شيكاغو ، حيثذ ، المجال معطى بـ

$$E_x = E_{x0} \cos \omega t$$

التي هي تغير بسيط ومألوف مع الزمن . شحنة حرة (ربما في هوائي استقبال رأسى) تعجل الى أعلى وإلى اسفل $\omega/2\pi$ من المرات كل ثانية . في كليفلاند ، حوالى 500km شرقاً ، سنجد

$$E_x = E_{x0} \cos \left[\omega \left(t - \frac{5 \times 10^5}{3 \times 10^8} \right) \right] = E_{x0} \cos [\omega(t - 0.00167)]$$

مبينة أن قوة المجال في كليفلاند مطابقة لتلك التي وجدت في شيكاغو مبكر بـ 0.00167s . بصفة عامة ، يجب حيثذ أن نتوقع أن المجال عند أى نقطة على بعد z meters شرق شيكاغو يتأخر عن مجال المرجع بـ $z \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ ، أو $z/(3 \times 10^8)$ s . دعنا نغير نقطة اهتمامنا الآن ونفحص المجال في كل مكان عند $t = 0$ ،

$$E_x = E_{x0} \cos (-\omega z \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}) = E_{x0} \cos \frac{\omega z}{c}$$

واجدين تغيراً دورياً مع المسافة .

مدة دورة هذه الموجة الجيب نمائية ، كما تقاس على المحور z تسمى طول الموجة λ ،

$$\frac{\omega \lambda}{c} = 2\pi$$

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{f} \quad (\text{free space})$$

عند أى نقطة ، نجد تغيراً جيبياً مع الزمن له مدة دورة $T = 1/f$ ، عند أى زمن ، نجد تغيراً جيبياً مع المسافة ذى طول دورة λ ، عند كل نقطة وعند كل لحظة من الزمن ، E_x موجة رأسياً . الآن دعنا نعتبر الاستجابة عندما يغير كلا من الزمن والموقع . بالتأكيد يمكننا القول أن E_x لا تتغير إذا كانت زاوية الطور $\omega(t - z \sqrt{\mu_0 \epsilon_0})$ غير متغيرة ، أو

$$\omega(t - z\sqrt{\mu_0\epsilon_0}) = \text{constant}$$

بأخذ التفاضلات ، يكون لدينا

$$\omega(dt - dz\sqrt{\mu_0\epsilon_0}) = 0$$

لذلك

$$(١٩) \quad \frac{dz}{dt} = v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = c$$

هذه السرعة يطلق عليها سرعة طور ، لأنها تعرف نقطة ذات طور ثابت . هنا ، سرعة الطور تساوي سرعة الضوء c ، والمجال لذلك يتحرك في اتجاه z بسرعة الضوء c . مهما تكن قيمة المجال لحظياً عند $t = t_1$ ، $z = z_1$ ، فإنها سيكون لها القيمة المطابقة عند z_2 عند زمن $(z_2 - z_1) / c$ فيما بعد ، سيكون لها أيضا القيمة المطابقة عند $t = t_2$ ، على مسافة $c(t_2 - t_1)$ أبعد إلى الشرق . المجال الكهربى في حركة ويطلق عليه منطقياً موجة متحركة .

معادلة (١٨) ، التى كانت أيضاً حلاً لمعادلة موجتنا ، تمثل بوضوح موجة متحركة فى اتجاه $z -$ ، أو غرباً . للتبسيط ، نعتبر فقط الموجة المتحركة الموجبة .

دعنا الآن نعود لمعادلات ماكسويل ، (٨) إلى (١١) ، ونحدد صورة المجال H . إذا أعطيت E_x ، فإن H_z يحصل عليها بأقصى سهولة من (٩) ،

$$(٩) \quad \nabla \times E_x = -j\omega\mu_0 H_z$$

التى تبسط بشدة لمركبة E_{xz} مفردة تتغير فقط مع z ،

$$\frac{\partial E_{xz}}{\partial z} = -j\omega\mu_0 H_{zs}$$

باستخدام (١٩) لـ E_{xz} مع $A = E_{x0}$ ، نحصل على

$$H_{zs} = -\frac{1}{j\omega\mu_0} E_{x0} (-j\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}) e^{-j\omega z/c}$$

و

$$(٢٠) \quad H_z = E_{x0} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{c} \right) \right]$$

ولذلك نجد أن هذه المركبة الرأسية لـ E المتقلبة إلى الشرق تتحقق بمجال مغناطيسي أفقي (شمال- جنوب) . علاوة على ذلك ، نسبة شدتي المجالين الكهربى والمغناطيسى ، المعطاة بنسبة (١٧) إلى (٢٠) ،

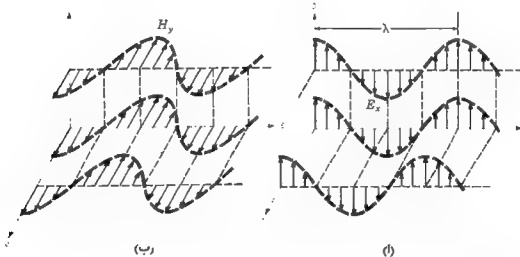
$$(٢١) \quad \frac{E_x}{H_y} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

ثابتة . باستخدام لغة نظرية الدوائر ، يمكننا القول أن E_x و H_y فى « طور واحد » ، ولكن علاقة الطور الواحد هذه تشير إلى الفراغ وكذلك إلى الزمن . نحن معتادون على التسليم بهذا فى مسألة دائرة فيها تيار $I_m \cos \omega t$ مفترض أن له أقصى اتساع I_m خلال كل أجزاء دائرة نوال عند $t = 0$. كل من (١٧) و (٢٠) تبين بوضوح ، مع ذلك ، أن القيمة العظمى لأى من E_x أو H_y تحدث عندما يكون $\omega(t - z/c)$ مضاعفاً صحيحاً لـ $2\pi \text{ rad}$ ، ولا يكون أى من المجالين نهاية عظمى فى كل مكان عند نفس اللحظة . ممايستحق الملاحظة ، حينئذ ، أن نسبة هاتين المركبتين ، وكلاهما متغير فى الفراغ والزمن يجب أن تكون ثابتة فى كل مكان .

المجدر التربيعى لنسبة الانفاذية والسماحية يسمى المعاوقة الذاتية (إيتا) ، η ،

$$(٢٢) \quad \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

حيث η لها وحدات الأوم .



شكل ١١-١ : (أ) الأسهم تمثل القيم اللحظية $E_{x0} \cos [\omega(t - z/c)]$ عند $t = 0$ على المحور z ، على خط اختياري فى المستوى $x = 0$ مواز للمحور وعلى خط اختياري فى المستوى $y = 0$ مواز للمحور z . (ب) القيم المتأصلة لـ H_y مبينة . لاحظ أن E_x و H_y فى نفس الطور عند أى نقطة وعند أى زمن .

المعاوقة الذاتية لفضاء حر هي

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377 \pm 120\pi \quad \Omega$$

هذه الموجة تسمى موجة مستوية منتظمة لأن قيمتها منتظمة خلال أى مستوى ، z = ثابت . وهي تمثل انسياب طاقة فى الاتجاه z الموجب . كل من المجالين الكهربى والمغناطيسى متعامد على اتجاه الانتشار ، أو كلاهما يقع فى مستوى مستعرض على اتجاه الانتشار ، الموجة المستوية المنتظمة هى موجة كهرومغناطيسية مستعرضة ، أو موجة كه م TEM .

بعض الاحساس بالطريقة التى تتغير بها المجالات فى الفراغ يمكن أن يحصل عليه من شكلى ١١-١ أو ١١-١ ب . شدة المجال الكهربى فى شكل ١١-١ أ مينة عند $t = 0$ ، وقيمة المجال اللحظية مرسومة على ثلاثة خطوط ، المحور z وخطوط اختيارية توازى المحور z فى المستويين $x = 0$ و $y = 0$. لأن المجال منتظم فى مستويات عمودية على المحور z ، فالتغير على طول الخطوط الثلاثة هو نفسه . دورة كاملة واحدة للتغير تحدث فى طول موجى λ . قيم H_y عند نفس الوقت والمواضع مينة فى شكل ١١-١ ب .

موجة مستوية منتظمة لا يمكن أن توجد فىزيائيا ، لأنها تمتد الى ما لا نهاية فى بعدين على الأقل وتمثل قدرا لا نهائيا من الطاقة . المجال البعيد لهوائى ارسال ، مع ذلك ، هو أساسا موجة مستوية منتظمة فى منطقة ما محدودة . وموجة تصل إلى هوائى استقبال فى كليفلاند من شيكاغو تحلل كموجة مستوية منتظمة بالقرب من الهوائى ، وإشارة رادار مصطلحة بهدف بعيد هى أيضا موجة مستوية منتظمة تقريبا .

مع أننا قد اعتبرنا فقط موجة تتغير جييبيا فى الزمن والفراغ ، فإن تجميعا مناسباً من حلول معادلة الموجة يمكن أن يعمل ليحقق موجة ذات أى شكل مرغوب . جمع عدد لانهاى من التوافقيات خلال استخدام متسلسلة فوريير يمكن أن ينتج موجة دورية ذات شكل مربع أو مثلث فى كل من الفراغ والزمن . يمكن الحصول على موجات غير دورية من حلنا الأساسى بطرق تكامل فوريير . أخيرا ، يمكن أيضا تضمين موجات فى اتجاهات أخرى ، ربما تمثل موجة منتشرة جنوبا طبقا من الشرق . هذه المواضع ضمن تلك المعبرة فى الكتب الأكثر تقدما عن النظرية الكهرومغناطيسية .

ت ١١-١ : شدة المجال الكهربى لموجة مستوية منتظمة فى الهواء لها اتساع مقداره 800V/m وفى الاتجاه x . إذا كانت الموجة تنتشر فى اتجاه z ولها طول موجة 2ft

أوجد : (أ) التردد ، (ب) زمن الدورة ، (ج) قيمة k اذا عبر عن المجال بالصورة $H \cos(\omega t - kz)$ ، (د) اتساع H

الاجابة : $2.12A/m$, $10.31rad/m$, $2.03ns$, $492MHz$

ت ١١ - ٢ : اذا كانت $H_z = [(5e^{j20})a_x - (3 + j1)a_z]e^{-jks}$ A/m في فضاء حرو $f = 6MHz$ ، أوجد المقدار اللحظي لـ H عند :

(أ) $(0,0,0)$ عند $t = 0$ ، (ب) $(0,0,0)$ عند $t = 0.1\mu s$ ، (ج) $(2,5,8)$ عند $t = 0$ ، (د) $(2,5,8)$ عند $t = 0.1\mu s$

الاجابة : $5.91A/m$, $4.66A/m$, $3.35A/m$, $5.57A/m$

١١ - ٢ : الحركة الموجية في العوازل التامة

دعنا الآن نمد معالجتنا التحليلية للموجة المستوية المنتظمة في عازل تام (عديم الفقد) ذي سماحية ϵ وإنفاذية μ . الوسط موحد الخواص ومتجانس ، وتكون معادلة الموجه الآن

$$(٢٣) \nabla^2 E_z = -\omega^2 \mu \epsilon E_z$$

بالنسبة لـ E_{xz} لدينا

$$(٢٤) \frac{\partial^2 E_{xz}}{\partial z^2} = -\omega^2 \mu \epsilon E_{xz}$$

بدلا من كتابة حل (٢٤) في الحال ، دعنا نفترض حالا ذا صورة أكثر تعميما ونستخدم (٢٤) لتحديد قيم مناسبة لبارامتراتنا المفترضة . نسمح لتوهين أسى بفرض

$$E_x = E_{x0} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z)$$

أومايكافتها في تدوين أسى مركب ،

$$E_{xz} = E_{x0} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}$$

العامل الأسى الحقيقى يسمح لنا أن نعتبر حالات فيها يمكن للموجة أن توهن بينما تنتشر في اتجاه z ، α تسمى ثابت التوهين . لأن وسطنا عديم الفقد ، يجب أن نكون قادرين على بيان أن α تكون صفرا . اذا لاحظنا بعد ذلك أن βz يجب أن تقاس بالتقدير الدائرى (بفرض أن β حقيقية) ، حيثذ فمن المنطقي أن يطلق على β ثابت الطور . هو مقياس لازاحة الطور بالتقدير الدائرى لكل متر . عامة ، غالبا نضم α و β في ثابت الانتشار المركب γ (جاما) ،

$$(٢٥) \gamma = \alpha + j\beta$$

بحيث يمكن أن نكتب

$$E_{xx} = E_{x0} e^{-\gamma z}$$

الآن دعنا نعوض في (٢٤) :

$$\gamma^2 E_{x0} e^{-\gamma z} = -\omega^2 \mu \epsilon E_{x0} e^{-\gamma z}$$

وعلى ذلك يجب أن نتطلب

$$\gamma^2 = -\omega^2 \mu \epsilon$$

أو

$$\gamma = \pm j\omega\sqrt{\mu\epsilon}$$

لهذا

$$\alpha = 0$$

و

$$(٢٦) \quad \beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$$

حيث قد اخترنا الجذر الذي يعطى انتشارا في اتجاه z الموجب . على ذلك

$$E_x = E_{x0} \cos(\omega t - \beta z)$$

ويمكننا شرح هذه كموجة متحركة في اتجاه z + بسرعة طور v

$$(٢٧) \quad v = \frac{\omega}{\beta}$$

بالنسبة للموجة المستوية المتظمة المنتشرة في عازل تام ، نجد

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_R \epsilon_R}}$$

طول الموجة هو نسبة السرعة الى التردد ،

$$(٢٨) \quad \lambda = \frac{v}{f} = \frac{c}{f\sqrt{\mu_R \epsilon_R}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_R \epsilon_R}}$$

حيث λ_0 هو طول الموجة في الفضاء الحر . لاحظ أن $\epsilon_r > 1$ ، μ_R ، ولذلك فطول

الموجة أقصر والسرعة أقل في كل الأوساط الحقيقية عنها في فضاء حر . من (٢٧) و (٢٨) لدينا أيضا العلاقة العامة

$$(٢٩) \quad \beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

شدة المجال المغناطيسي المرتبطة بـ E_x هي

$$H_y = \frac{E_{x0}}{\eta} \cos(\omega t - \beta z)$$

حيث المقاومة الذاتية هي

$$(٣٠) \quad \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

المجالان E_x و H_y مرة أخرى متعامدان على بعضهما ، متعامدان على اتجاه الانتشار ، ولهما نفس الطور في كل مكان . لاحظ أن عندما تضرب E ضربا اتجاهيا في H ، فالمتجه المحصل يكون في اتجاه الانتشار . سنرى سبب هذا عندما نناقش متجه بوينج .

دعنا نطبق هذه النتائج على موجة ترددها 300 MHz — منتشرة خلال ماء عذب . مع أنه ليس لدينا وسط عديم الفقد ، سنهمل التوهين في هذا الوقت ونفرض أن $\alpha = 0$. لذلك $\mu_R = 1$ و $\epsilon_R = 78$ (عند 300 MHz) ، و

$$v = \frac{c}{\sqrt{\mu_R \epsilon_R}} = \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{78}} = 0.340 \times 10^8 \text{ m/s}$$

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{0.340 \times 10^8}{3 \times 10^8} = 0.113 \text{ m}$$

بينما طول الموجة في الهواء يجب أن يكون 1 m . بالاستمرار لحساب البارامترات الأخرى ، نجد أن

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = 55.5 \text{ rad/m}$$

أو $80.8^\circ/\text{in}$ ، و

$$\eta = \eta_0 \sqrt{\frac{\mu_R}{\epsilon_R}} = \frac{377}{\sqrt{78}} = 42.7 \Omega$$

إذا جعلنا شدة المجال الكهربى لها أقصى اتساع 0.1 V/m ، حيث

$$E_x = 0.1 \cos (6\pi 10^8 t - 55.5z)$$

$$H_y = \frac{E_x}{\eta} = 2.34 \times 10^{-3} \cos (6\pi 10^8 t - 55.5z)$$

ت ١١ - ٣ : موجة مستوية منتظمة ذات $9.4 \text{ GHz} = 9.4 \times 10^9 \text{ Hz}$ تنتشر فى بوليثيلين (انظر ملحق حـ) . إذا كان اتساع شدة المجال المغناطيسى هو 7 mA/m والمادة مفترض أنها عديمة الفقد ، أوجد : (أ) سرعة الانتشار ، (ب) طول الموجة (فى البوليثيلين) ، (جـ) ثابت الطور ، (د) المعاوقة الذاتية ، (هـ) اتساع شدة المجال الكهربى .

الاجابة : 1.754 V/m ، 251Ω ، 296 rad/m ، 2.12 cm ، $1.996 \times 10^8 \text{ m/s}$

١١ - ٣ : الموجات المستوية فى الموازل ذات الفقد

كل المواد العازلة لها بعض الموصلية ، وبينما يمكن أن نهمل فى عدة حالات ، فبرغم ذلك من الضرورى تحديد المعايير لعمل ذلك . سنستمر فى حصر اهتمامنا على تغيرات زمنية جيبية ، وعلى ذلك تكون معادلات الالتواء لماكسويل

$$\nabla \times \mathbf{H}_z = \mathbf{J}_z + j\omega\epsilon\mathbf{E}_z$$

أو

$$\nabla \times \mathbf{H}_z = (\sigma + j\omega\epsilon)\mathbf{E}_z$$

و

$$(٣١) \quad \nabla \times \mathbf{E}_z = -j\omega\mu\mathbf{H}_z$$

التأثير الوحيد لتضمين الموصلية σ هو أن العامل $j\omega\epsilon$ قد أصبح الآن : $\sigma + j\omega\epsilon$. ولذلك يمكننا فى الحال حساب القيمة الجديدة لثابت الانتشار ،

$$\gamma^2 = (\sigma + j\omega\epsilon)j\omega\mu$$

$$\gamma = \pm \sqrt{(\sigma + j\omega\epsilon)j\omega\mu}$$

بقسمة الحدود على مجموعة مألوفة من الثوابت ، نحصل على

$$(٣٢) \quad \gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}\sqrt{1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}}$$

حيث قد أبقينا فقط الإشارة الموجبة للجذر لسبب سيصبح واضحا بعد قليل . هذا التعبير يختلف عن حالة عدم الفقد في وجود عامل الجذر الثاني ، الذي يصبح واحدا عندما تتلاشى σ . في الحالة العامة ، قيم μ ، ϵ و ω يمكن أن تدخل في (٣٢) ، ونحسب أجزاء γ الحقيقية والتخيلية ،

$$\dot{\gamma} = \alpha + j\beta$$

ويحصل على المركبة في اتجاه x لشدة المجال الكهربى المنتشرة في الاتجاه $+z$ ،

$$E_{xz} = E_{x0} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}$$

استخدام الإشارة الموجبة للجذر في (٣٢) يؤدي الى قيم عددية موجبة لـ α و β ومن ثم تقابل انتشار في الاتجاه $+z$.

باستخدام (٣١) ، فمن السهل بيان أن H_{yz} هي

$$H_{yz} = \frac{E_{x0}}{\eta} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}$$

حيث المعاوقة الذاتية هي الآن كمية مركبة ،

$$(٣٣) \quad \eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon} \frac{1}{\sqrt{1 - j(\sigma/\omega\epsilon)}}}$$

المجالان الكهربى والمغناطيسى لم يعودا بعد في نفس الطور الزمنى .

قبل أن نعتبر مثالا موضحا هذه الحسابات ، فطبيعة العامل الأسى $e^{-\alpha z}$ تستحق بعض الفحص . بالنسبة لموجة منتشرة في اتجاه $+z$ ، يسبب هذا العامل نقصا أسيا في الاتساع مع قيم z المتزايدة . ثابت التوهين يقاس بالتغير لكل متر (Np/m) لكى يقاس أس e بالوحدات المجردة من الأبعاد التغير^(١) . على ذلك . اذا كانت $\alpha = 0.01 \text{ Np/m}$ ،

(١) اختير الحد تيير (برأسطة بعض الضعفاء في التهجئة) لنكرم John Napier ، رياضى اسكتلدى وهو أول من اقترح استخدام اللوغاريتمات .

فلزوة اتساع الموجة عند $z = 50\text{m}$ ستكون $0.0607 = e^{-0.5}/e^{-0}$ من قيمتها عند $z = 0$. عند الانتقال مسافة $1/\alpha$ في اتجاه $z +$ ، ينقص اتساع الموجة بالعامل المألوف e^{-1} ، أو 0.368 .

بعض النتائج العددية يمكن أن تحسب للماء المقطر ، الذى هو عازل رديء جدا . قيم نموذجية للبارامترات هي $\mu_R = 1$ ، $\epsilon_R = 50$ ، و $\sigma = 20 \text{ } \Omega / \text{m}$ عند : $\omega = 10^{11} \text{ rad/s}$ ، أو $f = 15.9\text{GHz}$ ، وهى قيمة تقع فى نطاق SHF (تردد فوق العالى) . على ذلك

$$\frac{\sigma}{\omega\epsilon} = \frac{20 \times 10^{12}}{10^{11} \times 50 \times 8.854} = 0.452$$

و

$$\begin{aligned}\gamma &= j \frac{10^{11} \sqrt{1 \times 50}}{3 \times 10^8} \sqrt{1 - j0.452} \\ &= j2,360 \sqrt{1.097 / -24.3^\circ} \\ &= 2,470 / 77.8^\circ = 520 + j2,410 \quad \text{m}^{-1}\end{aligned}$$

$$\alpha = 520 \text{ Np/m} \quad \text{لذلك}$$

واتساع E_x أو H_y متوهن بعامل مقداره 0.368 لكل $1/520\text{m}$ من الانتشار فى الماء . التعبير « يتشر » على ذلك يكون مستخدما دون أى دقة . التوهين العالى يبين السبب لماذا يكون الرادار غير فعال تحت الماء ويستخدم السونار بدلا منه ، وهو أيضا يوحى أن الماء أو المطر فى الجو قد يسبب مشاكل فى الانتشار عند الترددات العالية .

ثابت الطور هو

$$\beta = 2,410 \text{ rad/m}$$

وهذا قد نائم طفيفا فقط بالموصلية غير الصفرية ، لأن الحسابات العددية الآتية تبين أنه يكون $2,360 \text{ rad/m}$ إذا كانت σ صفرا . وطول الموجة عند هذا التردد هو 1.88cm فى الهواء ، ولأن $\beta = 2\pi/\lambda$ ، فهو 2.60mm فى الماء .

المعاوقة الذاتية يتضح أنها

$$\eta = \frac{377}{\sqrt{50} \sqrt{1 - j0.452}} = 50.9 / 12.2^\circ = 49.8 + j10.7 \quad \Omega$$

و E_x تتقدم H_y بـ 12.2° عند كل نقطة .

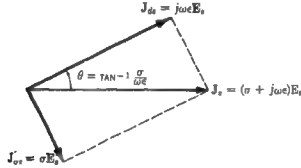
دعنا الآن نوجه اهتمامنا للحالة الأكثر عملية لمادة عازلة لها بعض الفقد الصغير .
المعيار الذى يجب أن نحكم به ما إذا كان الفقد صغيرا أم لا هو مقدار $\sigma/\omega \epsilon$ بالمقارنة
بالوحدة ، كما هو مبين بـ (٣٢) و (٣٣) الحد $\sigma/\omega \epsilon$ يشار اليه بظل الفقد لسبب
سيصبح واضحا عندما نعتبر معادلة ماكسويل لانتواء H ، التى كونت نقطة البداية
لتحليلنا ،

$$\nabla \times \mathbf{H}_x = (\sigma + j\omega\epsilon)\mathbf{E}_x = \mathbf{J}_{\sigma x} + \mathbf{J}_{\epsilon x}$$

نسبة كثافة تيار التوصيل الى كثافة تيار الإزاحة هى

$$\frac{J_{\sigma x}}{J_{\epsilon x}} = \frac{\sigma}{j\omega\epsilon}$$

أى أن هذين المتجهين يشيران فى نفس الاتجاه فى الفراغ ، ولكنهما بينهما طور 90° فى
الزمن . كثافة تيار الإزاحة تتقدم كثافة تيار التوصيل بـ 90° بالضبط مثلما يتقدم التيار
خلال مكثف التيار خلال مقاومة على التوازي معه بـ 90° فى دائرة كهربية عادية . علاقة
الطور هذه مبينة فى شكل ١١ - ٢ .



شكل ١١ - ٢ علاقة الطور- الزمنى بين $J_{\epsilon x}$ ، $J_{\sigma x}$ و J_x . ظل θ يساوى $\sigma/\omega\epsilon$ و $90^\circ - \theta$ هى زاوية عامل
القدرة الشائعة ، أو الزاوية التى يتقدم بها J_x على E_x .

الزاوية θ (لا يجب أن تخلط مع الزاوية القطبية فى إحداثيات كروية) يمكن لذلك أن
تعرف بالزاوية التى تتقدم بها كثافة تيار الإزاحة على كثافة التيار الكلى ، و

$$(٣٤) \quad \tan \theta = \frac{\sigma}{\omega\epsilon}$$

هذه العلاقة قد أدت الى اسم « ظل الفقد » لـ $\sigma/\omega\epsilon$. مسألة ١٧ عند نهاية هذا الفصل تبين أن الـ Q لمكثف (عامل جودته ، وليس شحنته) الذي يشتمل على عازل ذي فقد هو مقلوب ظل الفقد .

إذا كان ظل الفقد صغيرا ، حينئذ يمكننا الحصول على تقريبات مفيدة لثوابت التوهين والطور ، والمعاوقة الذاتية . لأن

$$(٣٢) \quad \gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon} \sqrt{1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}}$$

يمكنك فك الجذر الثاني بنظرية ذات الحدين

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots$$

حيث $|x| < 1$. حددنا x على أنها $-j\sigma/\omega\epsilon$ و n على أنها $1/2$ ، وعلى ذلك

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon} \left[1 - j\frac{\sigma}{2\omega\epsilon} + \frac{1}{8}\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2 + \dots \right]$$

من ثم

$$(٣٥) \quad \alpha \approx j\omega\sqrt{\mu\epsilon} \left(-j\frac{\sigma}{2\omega\epsilon} \right) = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

و

$$(٣٦) \quad \beta \approx \omega\sqrt{\mu\epsilon} \left[1 + \frac{1}{8}\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2 \right]$$

أو في حالات كثيرة،

$$(٣٦ب) \quad \beta \approx \omega\sqrt{\mu\epsilon}$$

وبطريقة مشابهة ، نجد

$$(٣٧) \quad \eta \approx \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left[1 - \frac{3}{8}\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2 + j\frac{\sigma}{2\omega\epsilon} \right]$$

أو

$$(٣٧ب) \quad \eta \approx \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left(1 + j\frac{\sigma}{2\omega\epsilon} \right)$$

لكي نوضح دقة تقريباتنا ، دعنا نعيد حساب α ، β و η لمثال الماء المقطر المناقش فيما قبل ، حتى برغم أن ظل الفقد له قيمة عالية نسبيا مقدارها 0.452 . مع $\sigma = 50 \text{ } \Omega/\text{m}$ ، $\omega = 10^{11}$ و $\mu_R = 1$ ، نحصل من (٣٥) على $\alpha = 533 \text{ Np/m}$

بالمقارنة مع القيمة المضبوطة 520Np/m . باستخدام (١٣٦) ، يكون ثابت الطور $\beta = 2,420 \text{ rad/m}$ القريبة من القيمة المضبوطة 2,410rad/m بينما (٣٦ب) تعطى القيمة عديمة الفقد . $\beta = 2,360 \text{ rad/m}$

أخيراً ، يتضح من (١٣٧) أن المقاومة الذاتية

$$\eta = 50.7 \angle 13.7^\circ = 49.2 + j12.0 \Omega$$

بالمقارنة بقيمة مضبوطة مقدارها $10.7 \Omega \angle 12.2^\circ = 49.8 + j10.9$ ، وينشأ خطأ أكبر باستخدام (٣٧ب)

$$\eta = 54.7 \angle 12.7^\circ = 53.3 + j12.0 \Omega$$

مع أن ظل الفقد في هذا المثال هو 0.452 ، فالأخطاء المشتملة في استخدام الصيغ الأكثر تقريبا ربما تكون غير هامة لأن الموصلية وثابت العازل النسبي نادرا ما يعرفا بدقة عالية . وسنوصي ، مع ذلك ، باستخدام التقريبات فقط عندما تكون $\sigma / \omega \leq 0.1$ ، أى تقريبات أبعد يجب أن تؤسس على تقدير هندسي .

في معظم العوازل الطبيعية يكون ظل الفقد أكثر ثبوتا مع التردد من الموصلية . أى أن ، تميل الموصلية للزيادة مع التردد ، ولكن ليس خطيا . قد يكون هناك أيضا تغيرات سريعة نسبيا في الموصلية ، السماحية ، وظل الفقد في منطقة دون الحمراء وأيضا في منطقة فوق البنفسجية^(١) . رسم تخطيطي لتغير σ ، ϵ_R ، و σ / ω مع التردد للميرانول 1467 ، تفلون ، وبوليستيرين مبين في شكل ١١ - ٣ بمقياس رسم لوغاريتمي للتردد .

ت ١١ - ٤ : مادة تميز بـ $\epsilon_R = 2.5$ ، $\mu_R = 1$ ، و $\sigma = 4 \times 10^{-5} \text{ U/m}$ عند تردد مقدار 1MHZ . عين القيم العددية لـ : (أ) ظل الفقد ، (ب) ثابت التوهين ، (ج) ثابت الطور .

الاجابة : 0.288 ; $4.72 \times 10^{-3} \text{ Np/m}$; $33.5 \times 10^{-3} \text{ rad/m}$.

ت ١١ - ٥ : مادة غير مغناطيسية لها ظل فقد 0.05 وسماحية نسبوية 5.2 . هذه القيم يمكن أن يفرض أنها ثابتة بين 2MHZ و 50 . عين قيم α و λ عند f تساوى : (أ) 3MHZ ، (ب) 30 MHZ .

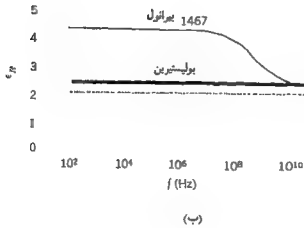
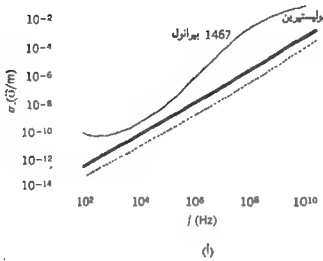
الاجابة : $3.58 \times 10^{-3} \text{ Np/m}$ ، 43.8 m ، 40.0358 Np/m ، 4.38 m .

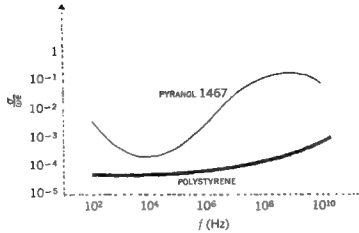
(١) تغيرات كل هذه البارامترات مع التردد مسجلة لمعدي من المواد في Von Hippel انظر بيان المراجع عند نهاية الفصل .

١١ - ٤ : متجه بوينتنج واعتبارات القدرة

لكي نوجد القدرة في موجة مستوية منتظمة ، من الضروري أن نستبط نظرية قدرة للمجال الكهرومغناطيسي معروفة بنظرية بوينتنج . وقد افترضت أصلا في 1884 بواسطة فيزيائي انجليزي ، جون هـ . بوينتنج .
دعنا نبدأ بمعادلة ماكسويل ،

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$





(جـ)

شكل ١١ : تغير σ ، ϵ_R ، و $\sigma/\omega\epsilon$ مع ω بين (أ) ، (ب) ، و (جـ) ، بالترتيب للبيروانول 1467 ، بوليستيرين ، وتفلون . لاحظ استخدام مقياس الرسم اللوغاريتمية لكل المحاور عدا ϵ_R .

ينضرب كلا من طرفي المعادلة نقطياً مع \mathbf{E} ،

$$\mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

والآن نستفيد من المتطابقة المتجهة ،

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} + \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E}$$

التي يمكن برهانها بالفك في الاحداثيات الكرتيزية . على ذلك

$$\mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

ولكن

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

ولذلك

$$-\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

أو

$$-\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \epsilon \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

على أن

$$\epsilon \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\epsilon}{2} \frac{\partial E^2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon E^2}{2} \right)$$

$$\mu \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{\mu}{2} \frac{\partial H^2}{\partial t} \quad \text{و}$$

على ذلك

$$-\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right)$$

أخيراً ، نكامل خلال حجم ،

$$-\int_{\text{vol}} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dv = \int_{\text{vol}} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dv + \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{vol}} \left(\frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right) dv$$

وتطبق نظرية الانفراج لنحصل على

$$(٣٨) \quad -\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{vol}} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dv + \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{vol}} \left(\frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right) dv$$

إذا فرضنا أنه ليس هناك منابع داخل الحجم ، حيثئذ يكون التكامل الأول الى اليمين هو القدرة الأومية الكلية (ولكن اللحظية) المبذدة داخل الحجم . إذا وجدت منابع داخل الحجم ، حيثئذ ستكون نتيجة التكامل على حجم المنبع موجبة إذا كانت القدرة تغطي للمنبع ، ولكنها ستكون سالبة إذا كانت القدرة تغطي بالمنبع .

التكامل في الحد الثانى الى اليمين هو الطاقة الكلية المخزنة في المجالين الكهربى والمغناطيسى^(١) ، والمشتقات الجزئية بالنسبة للزمن تجعل هذا الحد يكون المعدل الزمنى لزيادة الطاقة المخزنة داخل هذا الحجم ، أو القدرة اللحظية التى تعمل على زيادة الطاقة المخزنة داخل هذا الحجم . مجموع التعبيرات على اليمين يجب أن يكون القدرة الكلية المناسبة الى داخل هذه الحجم ، وعلى ذلك تكون القدرة الكلية المناسبة خارج الحجم هى

$$\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S}$$

حيث التكامل على السطح المغلق المحيط بالحجم . الاتجاهى $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ معروف بمتجه بوينتينج^(٢) .

$$(٣٩) \quad \mathcal{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

(١) هذا هو التعبير لطاقة المجال المغناطيسى التى كنا نتوقعها منذ الفصل التاسع .

الذى يفسر بأنه كثافة القدرة اللحظية ، مقاسة بالوات لكل متر مربع (W/m^2) . هذا التفسير يستند على نفس الاعتبارات الفلسفية كما كان وصف $\frac{1}{2}D.E$ أو $\frac{1}{2}B.H$ ككثافتى طاقة . نستطيع فقط أن نبين بدقة تامة أن تكامل متجه بوينتنج على سطح مغلق يعطى القدرة الكلية العابرة للسطح فى اتجاه الخروج . عل أن هذا التفسير ككثافة قدرة لايضلنا ، خاصة عندما يطبق لمجالات تتغير جيئيا . مسألة ١٨ تبين أن نتائج غريبة قد توجد عندما يطبق متجه بوينتنج على مجالات ثابتة مع الزمن .

اتجاه المتجه \mathcal{P} يبين اتجاه انسياب القدرة اللحظية عند النقطة ، وكثير منا يفكر فى متجه بوينتنج كمتجه مشير "pointing" . هذه المجانسة ، بينها هى بالصدفة ، صحيحة .

حيث أن \mathcal{P} معطى بالضرب الاتجاهى لـ E و H ، فاتجاه انسياب القدرة عند أى نقطة عمودى على كل من متجهى E و H . هذا يتفق بالتاكيد مع خبرتنا مع الموجة المستوية المنتظمة ، لأن انتشارا فى اتجاه $z +$ كان دائما مرتبطا مع مركبة E_x و H_y . علاوة على ذلك ،

$$E_x a_x \times H_y a_y = \mathcal{P}_z a_z$$

فى عازل نام المجالات E و H هذه معطاة بـ

$$E_x = E_{x0} \cos(\omega t - \beta z)$$

$$H_y = \frac{E_{x0}}{\eta} \cos(\omega t - \beta z)$$

وعلى ذلك

$$\mathcal{P}_z = \frac{E_{x0}^2}{\eta} \cos^2(\omega t - \beta z)$$

لايجاد كثافة القدرة المتوسطة مع الزمن ، نكامل على دورة واحدة ونقسم على مدة الدورة ، $T = 1/f$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{z,av} &= f \int_0^{1/f} \frac{E_{x0}^2}{\eta} \cos^2(\omega t - \beta z) dt \\ &= \frac{f}{2} \frac{E_{x0}^2}{\eta} \int_0^{1/f} [1 + \cos(2\omega t - 2\beta z)] dt \\ &= \frac{f}{2} \frac{E_{x0}^2}{\eta} \left[t + \frac{1}{2\omega} \sin(2\omega t - 2\beta z) \right]_0^{1/f} \end{aligned}$$

$$(40) \quad P_{z,av} = \frac{1}{2} \frac{E_{x0}^2}{\eta} \quad W/m^2$$

إذا كنا نستخدم قيم جذر متوسط المربع بدلاً من الاتساعات العظمى ، لما وجد العامل $1/2$.
أخيراً ، القدرة المتوسطة المناسبة خلال أى مساحة S عمودية على المحور z هي (١)

$$P_{z,av} = \frac{1}{2} \frac{E_{x0}^2}{\eta} S \quad W$$

فى حالة عازل دى فقد ، x و Hy ليسا فى نفس الطور الزمنى ، ويكون التكامل أطول بخطوة أو اثنتين . النتيجة هي

$$(41) \quad P_{z,av} = \frac{1}{2} \frac{E_{x0}^2}{\eta_m} e^{-2\alpha z} \cos \theta_q$$

حيث η معبر عنها بالصورة القطبية ،

$$\eta = \eta_m / \theta_q$$

ت ١١ - ٦ : عند ترددات 1MHz و 100MHz و 3GHz ، ثابت العزل لجليد مصنوع من ماء نقى له القيم 3.45 ، 3.20 ، بالترتيب ، بينما ظل الفقد هو 0.12 ، 0.035 ، و 0.0009 بالترتيب أيضاً . إذا كانت موجة مستوية منتظمة ذات اتساع 100V/m عند $z = 0$ منتشرة خلال مثل هذا الجليد ، أوجد متوسط القدرة الزمنى العابرة لمساحة مقدارها $1m^2$ عند $z = 0$ وعند $z = 5m$ لكل تردد .

الاجابة : 14.31W , 23.7W , 12.48W , 24.7W , 26.4W , 27.1W .

١١ - ٥ : الانتشار فى الموصلات الجليدة : الظاهرة السطحية

كمثالنا الأخير لانتشار غير محدود سنفحص تصرف موصل جيد عندما تنشأ فيه موجة مستوية منتظمة . أجدى من التفكير فى منبع مطمور فى كتلة من النحاس وإطلاق موجة فى تلك المادة ، يجب أن نكون مهتمين أكثر بموجة منشأة بمجال كهرومغناطيسى موجود فى عازل خارجى يلاصق سطح الموصل . سنرى أن انتقال الطاقة البدىئى يجب أن يحدث فى المنطقة خارج الموصل ، لأن كل المجالات المتغيرة مع الزمن توهن بسرعة جدا داخل موصل جيد .

(١) - نستخدم P للقدرة وكذلك أيضاً للاستهلاك . إذا ظهر كلاهما فى نفس المعادلة فى هذا الكتاب ، فهو خطأ .

الموصل الجيد له موصلية عالية وتيارات توصيل كبيرة . لذلك نقل الطاقة المثلة بالموجة المتنقلة خلال المادة عندما تنتشر الموجة بسبب وجود فقد أومى باستمرار . عندما ناقشنا ظل الفقد ، رأينا أن نسبة كثافة تيار التوصيل الى كثافة تيار الازاحة في مادة تعطى بـ $\sigma/\omega\epsilon$. باختيار موصل معدني رديء وتردد عال جدا كمثال تقليدي ، هذه النسبة^(١) للنيكروم ($\sigma = 10^6$) عند 100MHZ هي 2×10^8 تقريبا .

على ذلك لدينا حالة فيها $\sigma/\omega\epsilon \gg 1$ ، ويجب أن نستطيع عمل عدة تقريبات جيدة جدا لايجاد α ، β ، و η لموصل جيد .
التعبير العام لثابت الانتشار هو

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon} \sqrt{1 - j \frac{\sigma}{\omega\epsilon}}$$

الذي تبسطة في الحال لنحصل على

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon} \sqrt{-j \frac{\sigma}{\omega\epsilon}}$$

$$\gamma = j\sqrt{-j\omega\mu\sigma} \quad \text{أو}$$

$$-j = 1/-90^\circ \quad \text{لكن}$$

$$\sqrt{1/-90^\circ} = 1/-45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} - j \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{و}$$

$$\gamma = j \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - j \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \sqrt{\omega\mu\sigma} \quad \text{لذلك}$$

$$(٤٢) \quad \gamma = (j1 + 1)\sqrt{\pi f \mu \sigma} \quad \text{أو}$$

$$(٤٣) \quad \alpha = \beta = \sqrt{\pi f \mu \sigma} \quad \text{ولهذا}$$

بغض النظر عن البارامترات μ و σ للموصل أو لتردد المجال المؤثر ، يكون α و β متساويان . إذا فرضنا مرة أخرى مركبة E_x فقط متنقلة في اتجاه $+z$ ، حينئذ

$$(٤٤) \quad E_x = E_{x0} e^{-\gamma_z \sqrt{\pi f \mu \sigma}} \cos(\omega t - z \sqrt{\pi f \mu \sigma})$$

(١) من الممتد أخذ $\epsilon = \epsilon_0$ للموصلات المعدنية .

يمكن أن نربط هذا المجال في الموصل بمجال خارجي عند سطح الموصل . ندع المنطقة $z > 0$ تكون الموصل الجيد والمنطقة $z < 0$ تكون عازلا تاما . عند سطح الحدود $z = 0$ ، تصبح (٤٤)

$$E_x = E_{x0} \cos \omega t \quad (z = 0)$$

سنعتبر هذا مجال المنيع الذي ينشأ المجالات خلال الموصل . حيث أن تيار الاثارة مهمل ،

$$J = \sigma E$$

على ذلك ، كثافة تيار التوصيل عند أى نقطة داخل الموصل ترتبط مباشرة بـ E :

$$(٤٥) \quad J_x = \sigma E_x = \sigma E_{x0} e^{-z/\sqrt{\pi f \mu \sigma}} \cos(\omega t - z/\sqrt{\pi f \mu \sigma})$$

المعادلتان (٤٤) و (٤٥) تحتويان ثروة من المعلومات . باعتبار أولا الحد الأسى السالب ، نجد تناقصا أسيا في كثافة تيار التوصيل وشدة المجال الكهربى مع التعمق داخل الموصل (بعيدا عن المنيع) . العامل الأسى يساوى الوحدة عند $z = 0$ وينقص الى $e^{-1} = 0.368$ عندما

$$z = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}}$$

هذه المسافة يرمز لها بـ δ ويطلق عليها عمق الاختراق أو العمق السطحي

$$(٤٦) \quad \delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}} = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\beta}$$

وهو بارامترهام في وصف تصرف موصل في مجالات كهرومغناطيسية . لنحصل على بعض الفكرة عن مقدار العمق السطحي ، دعنا نعتبر النحاس ، $\sigma = 5.8 \times 10^7$ ، عند عدة ترددات مختلفة . لدينا

$$\delta_{cu} = \frac{0.0661}{\sqrt{f}}$$

عند تردد قوى ذى 60HZ ، $\delta_{cu} = 8.53\text{mm}$ أو $1/3$ in تقريبا . نذكر أن كثافة القدرة تحمل حدا أسيا $e^{-2\alpha z}$ ، نرى أن كثافة القدرة مضروبة بعامل مقداره $0.135 = 0.368^2$ لكل مسافة 8.53mm داخل النحاس .

عند تردد موجات دقيقة ذى $10,000\text{MHZ}$ ، تكون δ هي $6.61 \times 10^{-4}\text{mm}$ ، أو حوالى ثمن طول موجة الضوء المرئى .

على ذلك ، عند هذا التردد كل المجالات في موصل جيد مثل النحاس تكون اساسا صفرا على مسافات من السطح اكبر من أعماق سطح قليلة . أى كثافة تيار أو شدة مجال كهربى منشأة عند سطح موصل جيد تضمحل بسرعة عندما نتقدم بداخل

الموصل . الطاقة الكهرومغناطيسية لا تنتفذ الى داخل موصل ، تنتقل في المنطقة المحيطة بالموصل ، بينما الموصل يرشد الموجات فقط . التيارات المنشأة على سطح الموصل تنتشر في داخل الموصل في اتجاه عمودى على اتجاه كثافة التيار ، ويوهنوا بالفقد الأومى . هذا الفقد في القدرة هو الثمن المتزاع بالموصل لعمله كمرشد . سنعتبر الانتشار الموجه بتفصيل أكثر في الفصل التالى .

افترض أن لدينا قضيب توصيل نحاسى فى محطة فرعية ، شركة كهرباء خدمة التى نرغب فى أن تحمل تيارات عالية ، ولذلك نختار أبعاد 2×4 in . حيث لا يستفاد بأغلب النحاس ، لأن المجالات تقل بشدة فى عمق سطحى واحد ، حوالى $1/3$ in^(١) موصل أجوف بسمك حائط مقداره $1/2$ in تقريباً سيكون تصميمًا أفضل بكثير . مع أننا نطبق نتائج تحليل لموصل مستوي لانهائى لواحذ ذى أبعاد محدودة ، فالمجالات توهن فى الموصل ذى الحجم المحدود بطريقة مشابهة .

والعمق السطحي القصير للغاية عند ترددات الموجة الدقيقة يبين أن الغطاء السطحي للموصل الموجه هو المهم فقط . وقطعة زجاج مع سطح فضة مبخرة سمكه 0.0001 in تكون موصلًا ممتازًا عند هذه الترددات .

بعد ذلك ، دعنا نحدد تعبيرات للسرعة وطول الموجة داخل موصل جيد . حيث

أن

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

يمكننا استخدام (٤٦) لنجد

$$(٤٧) \quad \lambda = 2\pi\delta$$

أيضاً ، بتذكر معادلة (٢٧) ، قسم $\gamma = 11$ ،

$$v = \frac{\omega}{\beta}$$

$$(٤٨) \quad v = \omega\delta \quad \text{يكون لدينا}$$

للنحاس عند 60Hz ، $\lambda = 5.36\text{cm}$ و $v = 3.22\text{m/s}$. أو حوالى 7.2mi/h . معظمنا يمكنهم العدو أسرع من ذلك . فى فضاء حر ، طبعاً ، موجة 60—Hz لها طول موجة مقداره $3,100\text{mi}$ وتنتقل بسرعة الضوء .

لكى نجد H_r ، نحتاج الى تعبير للمعاوقة الذاتية لموصل جيد . نبدأ بمعادلة

(٣٣) ، قسم ١١ - ٣ ،

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}}$$

(١) شركة الخدمة هذه تعمل عند 60Hz .

حيث أن $\omega \gg \sigma$ ، يكون لدينا

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu_0}{\sigma}}$$

التي يمكن أن نكتب على الصورة

$$(٤٩) \quad \eta = \frac{\sqrt{2}/45^\circ}{\sigma\delta} = \frac{1}{\sigma\delta} + j \frac{1}{\sigma\delta}$$

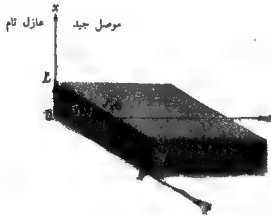
على ذلك ، إذا أعدنا كتابة (٤٤) بدلالة المعق الطحي ،

$$(٥٠) \quad E_x = E_{x0} e^{-z/\delta} \cos \left(\omega t - \frac{z}{\delta} \right)$$

حيث

$$(٥١) \quad H_y = \frac{\sigma\delta E_{x0}}{\sqrt{2}} e^{-z/\delta} \cos \left(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4} \right)$$

ونرى أن الاتساع الأقصى لشدة المجال المغناطيسي تحدث ثمن دورة بعد الاتساع الأقصى لشدة المجال الكهربى عند كل نقطة .



شكل ١١ - كثافة التيار $J_x = J_{x0} e^{-z/\delta} \cos \omega t$ تتناقص في المقدار عندما تنتشر الموجة في داخل الموصل . متوسط فقد القدرة في المنطقة $0 < x < L$ ، $0 < y < b$ ، $z > 0$ هو $\delta b L J_{x0}^2 / 4 \sigma \text{ Watts}$.

من (٥٠) و (٥١) يمكن الحصول على المتوسط الزمنى لمتجه بوينتج بتطبيق (٤١) ،

$$\mathcal{P}_{z,av} = \frac{1}{2} \frac{\sigma\delta E_{x0}^2}{\sqrt{2}} e^{-2z/\delta} \cos \frac{\pi}{4}$$

$$\text{أو } j_{z,av} = \frac{1}{4} \sigma \delta E_{x0}^2 e^{-2z/\delta}$$

نلاحظ مرة أخرى أن في مسافة عمق سطحي واحد تكون كثافة القدرة $e^{-2} = 0.135$ فقط من قيمتها عند السطح .

فقد القدرة الكلى فى عرض $0 < y < b$ وطول $0 < x < L$ فى اتجاه التيار ، كما هو مبين فى شكل ١١ - ٤ ، يحصل عليه بايجاد القدرة العابرة لسطح الموصل فى نطاق هذه المساحة ،

$$\begin{aligned} P_{L,av} &= \int_0^b \int_0^L \frac{1}{4} \sigma \delta E_{x0}^2 e^{-2z/\delta} dx dy \\ &= \frac{1}{4} \sigma \delta b L E_{x0}^2 \end{aligned}$$

بدلالة كثافة التيار J_{x0} عند السطح ،

$$J_{x0} = \sigma E_{x0}$$

يكون لدينا

$$(٥٢) \quad P_{L,av} = \frac{1}{4} \frac{1}{\sigma} \delta b L J_{x0}^2$$

الآن دعنا نرى ما فقد القدرة الذى قد ينتج اذا وزع التيار الكلى فى عرض b بانتظام فى عمق سطحي واحد . لاييجاد التيار الكلى ، نكامل كثافة التيار فوق العمق اللانهائى للموصل ،

$$I = \int_0^\infty \int_0^b J_x dy dz$$

$$J_x = J_{x0} e^{-z/\delta} \cos \left(\omega t - \frac{z}{\delta} \right) \quad \text{حيث}$$

أوبالتدوين الأسى المركب لتبسيط التكامل ،

$$\begin{aligned} J_{xs} &= J_{x0} e^{-z/\delta} e^{-jz/\delta} \\ &= J_{x0} e^{-(1+j)z/\delta} \end{aligned}$$

لذلك،

$$\begin{aligned} I_z &= \int_0^\infty \int_0^b J_{x0} e^{-(1+j)z/\delta} dy dz \\ &= J_{x0} b e^{-(1+j)z/\delta} \left[\frac{-\delta}{1+j} \right]_0^\infty \\ &= \frac{J_{x0} b \delta}{1+j} \end{aligned}$$

$$I = \frac{J_{x0} b \delta}{\sqrt{2}} \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{4} \right) \quad \text{د}$$

إذا وزعت هذه بانتظام في المقطع العرضي b ، $0 < y < b$ ، $0 < z < \sigma$ ، حينئذ

$$J' = \frac{J_{x0}}{\sqrt{2}} \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{4} \right)$$

الفقد الأومي في القدرة لكل وحدة حجم هو J.E ، وعلى ذلك فالقدرة الكلية اللحظية المبذولة في الحجم تحت الاعتبار هي

$$P_L = \frac{1}{\sigma} (J')^2 b L \delta = \frac{J_{x0}^2}{2\sigma} b L \delta \cos^2 \left(\omega t - \frac{\pi}{4} \right)$$

المتوسط الزمني لفقد القدرة يحصل عليه بسهولة ، لأن القيمة المتوسطة لعامل مربع جيب تمام هو نصف ،

$$(٥٣) \quad P_L = \frac{1}{4} \frac{J_{x0}^2}{\sigma} b L \delta$$

بمقارنة (٥٢) و (٥٣) ، نرى أنهما متطابقتان . على ذلك فقد القدرة المتوسط في

موصل مع وجود الظاهرة السطحية يمكن أن يحسب بافتراض أن التيار الكلي موزع بانتظام في عمق سطحي واحد . بدلالة المقاومة يمكننا القول أن مقاومة عرض b وطول L للوح ذي سمك δ لانتهائي مع الظاهرة السطحية هو نفسه كمقاومة لوح مستطيل عرضه b ، وطوله L وسمكه δ بدون الظاهرة السطحية ، أومع توزيع تيار منتظم .

يمكننا تطبيق هذا على موصل ذي مقطع عرضي دائري مع خطأ قليل ، بشرط أن يكون نصف القطر a اكبر كثيرا من العمق السطحي . المقاومة عند تردد عال حيث تكون هناك الظاهرة السطحية ظاهرة جدا لتوجد لذلك باعتبار لوح عرضه يساوي المحيط $2\pi a$ وسمكه δ . ولهذا

$$(٥٤) \quad R = \frac{L}{\sigma S} = \frac{L}{2\pi a \sigma \delta}$$

سلك نحاس مستدير نصف قطره 1mm وطوله 1km له مقاومة عند التيار مستمر مقدارها

$$R_{dc} = \frac{10^3}{\pi 10^{-6} (5.8 \times 10^7)} = 5.48 \Omega$$

عند 1MHz يكون العمق السطحي 0.0661mm على ذلك $a \ll \delta$ ، والمقاومة عند 1MHz توجد به (٥٤) ،

$$R = \frac{10^3}{2\pi 10^{-3} (5.8 \times 10^7) (0.0661 \times 10^{-3})} = 41.5 \Omega$$

ت ١١ - ٧ : موصل له مقطع عرضي دائري نصف قطره 2.5mm ومصنوع من صلب 300m ويحمل تيارا كليا $\sigma = 5.1 \times 10^6 \text{ U/m}$ و $\mu_R = 200$ اذا كان طول الموصل 300m وحمل تيارا كليا $I(t) = 1.5 \cos 3 \times 10^4 t \text{ A}$ ، حدد : (أ) العمق السطحي ، (ب) المقاومة الفعالة ، (ج) المقاومة لتيار مستمر ، (د) فقد القدرة المتوسط .

الاجابة : 18.47W , 3.00Ω , 16.42Ω , 0.228mm .

١١ - ٦ : انعكاس الموجات المستوية المنتظمة

لكي نعالج مسائل ذات أهمية عملية ، يجب توجيه انتباهنا لمناطق ذات حجم محدود . في هذا القسم سنعتبر ظاهرة الانعكاس التي تحدث عندما تسقط موجة مستوية منتظمة على الحد بين منطقتين تتكونان من مادتين مختلفتين . سوف ننشئ تعبيرات للموجة التي تنعكس من السطح البيني وتلك التي تنفذ من منطقة الى داخل الأخرى . هذه النتائج سيتمكن تطبيقها مباشرة على مسائل الموامعة في خطوط النقل العادية ، وكذلك على أدلة الموجات ونظم نقل أكثر غرابة أخرى .

نفرض مرة أخرى أن لدينا مركبة مفردة لشدة المجال الكهربى . دعنا نختار منطقة 1 ومنطقة 2 $(\epsilon_1, \mu_1, \sigma_1)$ as $z < 0$ و $(\epsilon_2, \mu_2, \sigma_2)$ as $z > 0$. من البداية نحدد الموجة المنتقلة في اتجاه $z +$ في منطقة 1 ،

$$(٥٥) \quad E_{x1}^+ = E_{x10}^+ e^{-\gamma_1 z}$$

الرمز السفلى 1 يميز المنطقة والرمز العلوى $+$ يبين موجة منتقلة في الاتجاه الموجب . مرافقا لـ E_z^+ يوجد مجال مغناطيسى

$$(٥٦) \quad H_{y1}^+ = \frac{1}{\eta_1} E_{x10}^+ e^{-\gamma_1 z}$$

هذه الموجة المستوية المنتظمة في منطقة 1 التي تنتقل نحو سطح الحد عند $z = 0$ تسمى الموجة الساقطة . حيث أن اتجاه انتشار الموجة الساقطة عمودى على مستوى الحد ، فنصفها بأنها سقوط عمودى .

الآن نعرف على أن طاقة سوف تنتقل عبر السطح الحد عند $z = 0$ الى داخل منطقة 2 باعطاء موجة تتحرك في اتجاه $+z$ في ذلك الوسط ،

$$(٥٧) \quad E_{x2}^+ = E_{x20}^+ e^{-\gamma_2 z}$$

$$(٥٨) \quad H_{y2}^+ = \frac{1}{\eta_2} E_{x20}^+ e^{-\gamma_2 z}$$

هذه الموجة التي تتحرك بعيداً عن سطح الحد في منطقة 2 تسمى موجة منفلة ، لاحظ استخدام ثابت انتشار γ_2 ومعاوقة ذاتية η_2 مختلفين .

الآن يجب أن نحاول تحقيق شروط الحدود عند $z = 0$ بهذه المجالات المفترضة . E_x مجال مماسي ، لهذين المجالين E في المنطقتين 1 و 2 يجب أن يتساويا عند $z = 0$. $z = 0$ بوضع $z = 0$ في (٥٥) و (٥٧) سيتطلب أن $E_{x10}^+ = E_{x20}^+$. على أن H_y هي أيضا مجال مماسي ، ويجب أن تكون مستمرة عبر الحد (لا توجد ألواح تيارات في أوساط حقيقية) . مع ذلك ، عندما ندع $z = 0$ في (٥٦) و (٥٨) نجد أنه يجب أن يكون لدينا $E_{x10}^+/\eta_1 = E_{x20}^+/\eta_2$ ؛ وحيث أن :

$E_{x10}^+ = E_{x20}^+$ ، فإن $\eta_1 = \eta_2$. ولكن هذا شرط خاص جدا لا يلائم الحقائق عامة ، ولذلك نكون غير قادرين على تحقيق شروط الحدود بموجة ساقطة وموجة منفلة فقط .



شكل ١١ - موجة E_1^+ ساقطة على حد مستوى تنشئ موجة منعكسة E_1^- وموجة منفلة E_2^+ .

نتطلب موجة تنتقل مبتعدة عن الحد في منطقة 1 ، كما هو مبين في شكل ١١ - ٥ ، وهذه تسمى موجة منعكسة ،

$$(٥٩) \quad E_{x1}^- = E_{x10}^- e^{\gamma_1 z}$$

$$(٦٠) \quad H_{ys1}^- = -\frac{E_{x10}^-}{\eta_1} e^{j1z}$$

حيث E_{x10}^- يمكن أن تكون كمية مركبة . حيث أن هذا المجال ينتقل في اتجاه $z -$ ،
 $E_{xs1}^- = -\eta_1 H_{ys1}^-$ لأن متجه بوينتينج يبين أن $\mathbf{E}_1^- \times \mathbf{H}_1^-$ يجب أن يكون في اتجاه $z -$ ،
 \mathbf{a}_z

شروط الحدود تحقق الآن بسهولة ، وأثناء خطوات العملية يمكن إيجاد اتساعات
 الموجات المنفصلة والمنعكسة بدلالة E_{x10}^+ . شدة المجال الكهربى الكلية مستمرة
 عند $z = 0$ ،

$$E_{xs1} = E_{xs2} \quad (z = 0)$$

$$E_{xs1}^+ + E_{xs1}^- = E_{xs2}^+ \quad (z = 0) \quad \text{أو}$$

$$(٦١) \quad E_{s10}^+ + E_{x10}^- = E_{x20}^+ \quad \text{لذلك}$$

$$H_{ys1} = H_{ys2} \quad (z = 0) \quad \text{علاوة على ذلك}$$

$$H_{ys1}^+ + H_{ys1}^- = H_{ys2}^+ \quad (z = 0) \quad \text{أو}$$

$$(٦٢) \quad \frac{E_{x10}^+}{\eta_1} - \frac{E_{x10}^-}{\eta_1} = \frac{E_{x20}^+}{\eta_2} \quad \text{ولذلك}$$

بحل (٦٢) في E_{x20}^+ وبالتعويض في (٦١) ، نجد

$$E_{x10}^+ + E_{x10}^- = \frac{\eta_2}{\eta_1} E_{x10}^+ - \frac{\eta_2}{\eta_1} E_{x10}^-$$

أو

$$E_{x10}^- = E_{x10}^+ \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

نسبة اتساعى المجالين الكهربيين المنعكس والساقط تسمى معامل الانعكاس ويرمز له بـ Γ (جاما) ،

$$(٦٣) \quad \Gamma = \frac{E_{x10}^-}{E_{x10}^+} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

معامل الانعكاس قد يكون مركبا ، وفى هذه الحالة يكون هناك إزاحة فى الطور فى الموجة المنعكسة .

الاتساع النسبى لشدة المجال الكهربى المنفذ توجد بضم (٦٣) و (٦١) ،

$$(٦٤) \quad \frac{E_{x20}^+}{E_{x10}^+} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1}$$

وهذا معروف بمعامل النفاذ ولكننا سوف لـنستخدمها بما فيه الكفاية لتبرير الرمز لها برمز خاص .

دعنا نرى كيف يمكن تطبيق هذه النتائج على عدة حالات خاصة . أولا ندع منطقة 1 تكون عازلا تاما ومنطقة 2 تكون موصلا تاما . حيث أن σ_2 لانهائية ،

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{j\omega\mu_2}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2}} = 0$$

ومن (٦٤) ،

$$E_{x20}^+ = 0$$

لايمكن وجود مجالات متغيرة مع الزمن فى الموصل التام . وطريقة بديلة للنظر لهذا هى ملاحظة أن العمق السطحي يساوى صفرا .

حيث أن $\eta_2 = 0$ ، فإن (٦٣) تبين أن

$$\Gamma = -1$$

و

$$E_{x10}^- = -E_{x10}^+$$

الموجة المنعكسة تساوى فى الاتساع وتضاد فى الاشارة الموجة الساقطة . كل الطاقة الساقطة تنعكس بواسطة الموصل التام ، والمجال E الكلى فى منطقة 1 هو

$$\begin{aligned} E_{xs1} &= E_{xs1}^+ + E_{xs1}^- \\ &= E_{x10}^+ e^{-j\beta_1 z} - E_{x10}^+ e^{j\beta_1 z} \end{aligned}$$

حيث قد جعلنا $\gamma_I = 0 + j\beta_I$ فى المعازل التام . هذه الحدود يمكن أن تظم وتبسط ،

$$\begin{aligned} E_{xI} &= (e^{-j\beta_I z} - e^{j\beta_I z})E_{xI0}^+ \\ &= -j2 \sin \beta_I z E_{xI0}^+ \end{aligned}$$

أو بالضرب فى j وأخذ الجزء الحقيقى للحصول على الصورة المثلثية ،

$$(٦٥) \quad E_{xI} = 2E_{xI0}^+ \sin \beta_I z \sin \omega t$$

هذا المجال الكلى فى منطقة I ليس موجة متنقلة ، مع أنه قد حصل عليه بضم موجتين متساويتى الاتساع تنتقلان فى اتجاهين متضادين . دعنا نقارن صورته مع تلك للموجة الساقطة ،

$$(٦٦) \quad E_{xI}^+ = E_{xI0}^+ \cos (\omega t - \beta_I z)$$

هنا نرى الحد $\omega t - \beta_I z$ أو $\omega(t - z/v_I)$ ، الذى يخص موجة متنقلة فى اتجاه $z +$ بسرعة $v_I = \omega/\beta_I$. على أن فى (٦٥) ، العوامل المشتملة على زمن ومسافة هى حدود مثلثية منفصلة . عند كل المستويات التى لها $\beta_I z = n\pi$ ، تكون E_{xI} صفرا لكل الوقت . علاوة على ذلك ، كلما كان $\omega t = n\pi$ ، تكون E_{xI} صفرا فى كل مكان . ومجال له الصورة (٦٥) معروف بأنه موجة واقفة .

المستويات التى عليها $E_{xI} = 0$ تقع حيثما

$$\beta_I z = n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

على ذلك

$$\frac{2\pi}{\lambda_I} z = n\pi$$

$$z = n \frac{\lambda_I}{2} \quad \text{و}$$

على ذلك $E_{xI} = 0$ عند الحد $z = 0$ وكل نصف طول موجة من الحد فى منطقة I و $z = 0$ ، كما هو موضح فى شكل ١١-٦ .

حيث أن $E_{xI}^+ = H_{yI}^+ \eta_I$ و $E_{xI}^- = -H_{yI}^- \eta_I$ ، يكون المجال المغناطيسى

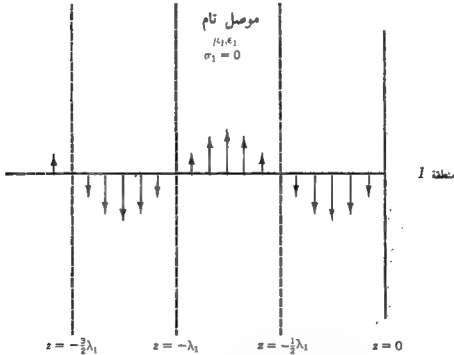
$$H_{y1} = \frac{E_{x10}^+}{\eta_1} (e^{-j\beta_1 z} + e^{j\beta_1 z})$$

أو

$$(٦٧) \quad H_{y1} = 2 \frac{E_{x10}^+}{\eta_1} \cos \beta_1 z \cos \omega t$$

هذه أيضاً موجة واقفة ، ولكنها تبدو اتساعاً أقصى عند المواضع حيث $E_{x1} = 0$. وهي أيضاً مختلفة 90° في الطور الزمنى مع E_{x1} في كل مكان . على ذلك لا تنتقل قدرة متوسطة في أى من الاتجاهين .

دعنا الآن نعتبر عوازل تامة في كلا المنطقتين I و 2 ، η_2 و η_1 كلاهما كميات موجبة حقيقية و $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.



شكل ٦-١١ القيم اللحظية للمجال الكلى E_{x1} عند $t = \pi/2$ ، $E_{x1} = 0$ لكل زمن عند مضافات نصف طول موجة واحد من السطح الموصل .

معادلة (٦٣) يمكننا أن نحسب معامل الانعكاس ونجد E_{x1}^- بدلالة الاتساع الساقط E_{x10}^+ . بمعرفة E_{x1}^+ و E_{x1}^- ، نجد حيث H_{y1}^+ و H_{y1}^- . في منطقة 2 ، توجد E_{x2}^+ من (٦٤) ، وهذه حيث H_{y2}^+ . كمثال على ذلك دعنا نختار

$$\eta_1 = 300 \, \Omega$$

$$\eta_2 = 100 \, \Omega$$

$$E_{x10}^+ = 100 \, \text{V/m}$$

حيث

$$\Gamma = \frac{100 - 300}{100 + 300} = -0.5$$

$$E_{x10}^- = -50 \, \text{V/m}$$

شدتنا المجال المغناطيسي هما

$$H_{y10}^+ = \frac{100}{300} = 0.333 \, \text{A/m}$$

$$H_{y10}^- = -\frac{50}{300} = 0.167 \, \text{A/m}$$

كثافة القدرة المتوسطة الساقطة هي

$$P_{1,av}^+ = \frac{1}{2} E_{x10}^+ H_{y10}^+ = 16.67 \, \text{W/m}^2$$

بينما

$$P_{1,av}^- = -\frac{1}{2} E_{x10}^- H_{y10}^- = 4.17 \, \text{W/m}^2$$

في منطقة 2

$$E_{x20}^+ = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} E_{x10}^+ = 50 \, \text{V/m}$$

و

$$H_{y20}^+ = \frac{50}{100} = 0.500 \, \text{A/m}$$

على ذلك

$$P_{2,av}^+ = \frac{1}{2} E_{x20}^+ H_{y20}^+ = 12.5 \, \text{W/m}^2$$

لاحظ أن الطاقة محفوظة

$$P_{1,av}^+ = P_{1,av}^- + P_{2,av}^+$$

علاقة القدرة بين القدرات الساقطة ، المنعكسة ، والمنفذة يجب أن تقارن مع المعادلة المعبرة عن استمرارية شدة المجال الكهربى المماس عند سطح الحد ،

$$E_{x10}^+ + E_{x10}^- = E_{x20}^+$$

الموجات الساقطة والمنعكسة فى منطقة I يمكن أن تضم لتعطى المجال الكلى هناك ، ولكن هذا سيحتجز للقسم التالى .

ت ١١ - ٨ : فى منطقة 1 , $y < 0$, $\epsilon_1 = 10 \text{ pF/m}$, $\mu_1 = 2.5 \text{ } \mu\text{H/m}$, و $\sigma_1 = 0$ لمنطقة 2 , $y > 0$, $\epsilon_2 = 9 \text{ pF/m}$, $\mu_2 = 4 \text{ } \mu\text{H/m}$, و $\sigma_2 = 0$ موجة مستوية منتظمة ساقطة فى منطقة I , $E_{x1}^+ = 500 \text{ V/m}$, تنتقل نحو الحد عند $y = 0$. إذا كانت : $\omega = 10^8 \text{ rad/s}$, أوجد : (أ) $E_{x1}(t)$: (ب) المجال المغناطيسى الساقط كدالة متجهة فى الزمن , (جـ) $E_{z1}(t)$, (د) $E_{z2}(t)$.
الاجابة :

$$571 \cos(10^8 t - 0.6y) \text{ V/m} , 71.4 \cos(10^8 t + 0.5y) \text{ V/m} , \cos(10^8 t - 0.5y) \text{ a}_x \text{ A/m} , 500 \cos(10^8 t - 0.5y) \text{ V/m}$$

١١ - ٧ : نسبة الموجة الواقفة

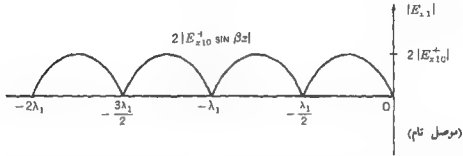
أحد القياسات الذى يعمل بسهولة على نظم النقل هو الاتساع النسبى لشدة المجال الكهربى أو المغناطيسى خلال استخدام مجس . عروة تقارن صغيرة ستعطى يانا لاتساع المجال المغناطيسى ، بينما موصل مركزى لكابل محورى ممتد طفيفا س يأخذ عينة المجال الكهربى . كلا الجهازين عادة توالفا مع التردد العامل لتعطى حساسية مزادة . ويُقوم خرج المجس ويوصل مباشرة بميكرومتر أو قد يوصل الى فولتمتر الكترونى أو مكبر خاص . والبيان يناسب مع اتساع المجال المتغير جيبياً مع الزمن الذى ينحصر فيه المجس .

عندما تنتقل موجة مستوية منتظمة خلال منطقة عديمة الفقد ، ولا توجد موجة منعكسة ، سيبين المجس نفس الاتساع عند كل نقطة . طبعاً ، المجال اللحظى الذى يأخذ عيته المجس سيختلف فى الطور بمقدار $\beta(z_2 - z_1) \text{ rad}$ عندما يحرك المجس من $z = z_1$ الى $z = z_2$ ولكن النظام غير حساس لطور المجال . والفولتيات المتساوية الاتساع خاصة لموجة متحركة غير موهنة .

عندما تنعكس موجة تنتقل فى وسط عديم الفقد بواسطة موصل تام ، يكون المجال الكلى موجة واقفة ومجس الفولتية لا يعطى خرجاً عندما يوضع على مسافات تقدر بأعداد
٤٧١

صحيحة من نصف طول الموجة من سطح الانعكاس وعندما يغير موضع المجس ، يتغير خرجة بالصورة $|\sin \beta z|$ ، حيث z هي المسافة من الموصل . تغير الاتساع الجيبي هذا مبين في شكل ١١ - ٧ ، وهو يميز موجة واقفة .

تبرز حالة أكثر تعقيدا عندما لا يكون المجال المنعكس صفراً أو ١٠٠ في المائة من المجال الساقط . بعض الطاقة تنفذ الى داخل المنطقة الثانية وبعضها ينعكس . منطقة I لذلك تحمل مجالا مكونا من كلتا موجتين موجة متنقلة وموجة واقفة . من المعتاد وصف هذا المجال كموجة واقفة مع أن موجة متنقلة موجودة ايضا . سنرى أن المجال ليس له اتساع صفري عند أى نقطة لكل وقت ، والدرجة التى ينقسم بها المجال بين موجة متنقلة وموجة واقفة حقيقية يعبر عنها بنسبة الاتساع الأقصى التى توجد بالمجس الى الاتساع الأدنى .



شكل ١١ - ٧ موجة الفولتية الواقفة الناتجة في وسط عديم الفقد بانعكاس من موصل تام تتغير بالصورة $|\sin \beta z|$.

باستخدام نفس المجالات المستقصاة في القسم السابق ، نضم شدتا المجال الكهربى الساقطة والمنعكسة ،

$$E_{x1} = E_{x1}^+ + E_{x1}^-$$

المجال E_{x1} دالة جيبيية في z (عامة مع زاوية طور غير صفريية) ، وتتميز مع z بطريقة غير معروفة بعد . سنفحص كل z لايجاد الاتساعين الأقصى والأدنى ، ونعين نسبتهما . نسمى هذه النسبة نسبة الموجة الواقفة وسنرمز لها بـ S .

دعنا الآن نذهب خلال ميكانيكية هذه الطريقة للحالة التى فيها الوسط I عازل تام ، $\alpha_2 = 0$ ، ولكن منطقة 2 قد تكون أى مادة . لدينا

$$E_{xs1}^+ = E_{x10}^+ e^{-j\beta_1 z}$$

$$E_{xs1}^- = \Gamma E_{x10}^+ e^{j\beta_1 z}$$

حيث

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

و η_1 حقيقية وموجبة ، ولكن η_2 قد تكون مركبة . على ذلك Γ قد تكون مركبة ، ونسمح لهذا الاحتمال بأن ندع

$$\Gamma = |\Gamma|e^{i\phi}$$

إذا كانت منطقة 2 موصل تام ، تكون ϕ تساوى π ، إذا كانت η_2 حقيقية وأقل من η_1 ، تكون ϕ أيضا تساوى π ، وإذا كانت η_2 حقيقية وأكبر من η_1 ، تكون ϕ صفرا . المجال الكلى فى منطقة I هو

$$(٦٨) \quad E_{x1} = (e^{-\beta_1 z} + |\Gamma|e^{i\phi}e^{\beta_1 z})E_{x10}^+$$

نحن نبحت عن القيم العظمى والصغرى لمقدار الكمية المركبة فى الأقواس الأكبر ولدبتنا . بالتاكيد قيمة عظمى عندما يكون لكل حد فى الأقواس الأكبر نفس زاوية الطور ، على ذلك ، بالنسبة لـ E_{x10}^+ موجبة وحقيقية ،

$$(٦٩) \quad E_{x1, \max} = (1 + |\Gamma|)E_{x10}^+$$

ويحدث هذا حيثما

$$-\beta_1 z = \beta_1 z + \phi + 2n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

على ذلك

$$(٧٠) \quad -\beta_1 z_{\max} = \frac{\phi}{2} + n\pi$$

لاحظ أن فولتية عظمى تقع عند مستوى الحد ($z = 0$) إذا كانت $\phi = 0$ ، علاوة على ذلك ، $\phi = 0$ عندما يكون Γ حقيقيا وموجبا . هذا يحدث لـ η_1 و η_2 حقيقتين عندما $\eta_2 > \eta_1$. على ذلك هناك فولتية عظمى عند سطح الحد عندما تكون المعاوقة الذاتية لمنطقة 2 أكبر من تلك لمنطقة I وكلا المعاوقتين حقيقتين .

بالنسبة للموصل التام $\phi = \pi$ ، وهذه القيم العظمى توجد عند : $-\beta_1 z = \pi/2, 3\pi/2$ ، وهلم جراً ، كما رأينا من قبل .

القيم الصغرى يجب أن تحدث حيثما تختلف زوايا الطور للحددين فى الأقواس

-- الأكبر بـ 180° ، على ذلك

$$(٧١) \quad E_{x1, \min} = (1 - |\Gamma|)E_{x10}^+$$

وهذا يحدث حيثما

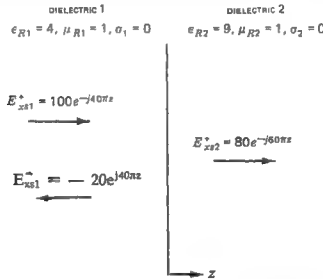
$$-\beta_1 z = \beta_1 z + \phi + \pi + 2n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

أو

$$(٢٧) \quad -\beta_1 z_{\min} = \frac{\phi}{2} + n\pi + \frac{\pi}{2}$$

القيم الصغرى منفصلة بمضاعفات نصف طول موجة واحد (مثلما هي القيم العظمى) ،
وبالنسبة لموصل تام تحدث القيمة الصغرى الأولى عندما $-\beta_1 z = 0$ ، أو عند سطح
الموصل . عامة ، توجد فولتية صغرى عند $z = 0$ كلما $\phi = \pi$ ، يحدث هذا إذا كانت
 $\eta_2 < \eta_1$. وكلاهما حقيقي .

لتوضيح بعض هذه النتائج ، دعنا نعتبر موجة ذات $100V/m$ ، 3 GHz تنتشر
في مادة لها $\epsilon_{R1} = 4$ ، $\mu_{R1} = 1$ ، و $\sigma_1 = 0$. الموجة ساقطة عموديا على عازل تام
آخر في منطقة $z > 0$ ، حيث $\epsilon_{R2} = 9$ و $\mu_{R2} = 1$ (شكل ١١ - أ) .



شكل ١١ - أ . موجة ساقطة ، $E_{x1+} = 100 e^{-j40\pi z}/m$ ، متحركة بمعامل انكسار ، $\Gamma = -0.2$. عازل 2
سميك لانهايا .

نحسب $\omega = 6\pi \cdot 10^9 \text{ rad/s}$ ، $\beta_1 = 40\pi \text{ rad/m}$ ، و $\beta_2 = 60\pi \text{ rad/m}$ مع أن طول
الموجة ستكون 10 cm في الهواء ، نجد هنا أن
 $\lambda_1 = 5\text{ cm}$ ، $\lambda_2 = 3.33\text{ cm}$ ، $\eta_2 = 2/3 \eta_1$. و $\Gamma = -0.2$. حيث أن حقيقية وسالبة
($\eta_2 < \eta_1$) ، ستكون هناك قيمة صغرى للمجال الكهربائي عند الحد ، ستكرر على
فواصل نصف طول موجة

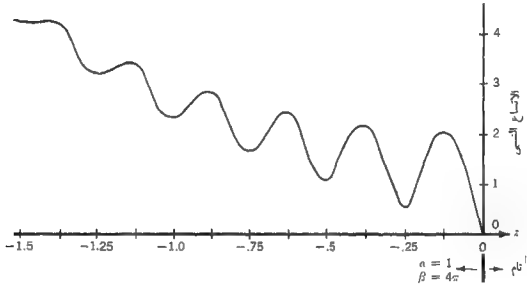
(2.5 cm) في عازل I . من (٧١) ، نرى أن $E_{x1,min} = 80V/m$.

قيم عظمى لـ E توجد عند مسافات 1.25cm , 3.75cm , 6.25cm , ... من $z = 0$.
هذه القيم العظمى كلها لها الانساعات ذات $120V/m$ ، كما يتنبأ بها (٦٩) .
ليس هناك قيم عظمى أو صغرى في منطقة 2 حيث لا يوجد هناك موجة منعكسة .
نسبة السعتين العظمى والصغرى تسمى نسبة الموجة الواقة :

$$(٧٣) \quad S = \frac{E_{x1,max}}{E_{x1,min}} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|}$$

حيث أن $|\Gamma| \leq 1$ ، تكون S دائماً موجبة وأكبر من أو تساوي الوحدة . بالنسبة للمثال
آفنا ، $S = (1 + |-0.2|) / (1 - |-0.2|) = 1.2/0.8 = 1.5$.

إذا كان $|\Gamma| = 1$ يكون الانساعان المرتد والساقط متساويين ، كل الطاقة الساقطة
تنعكس ، وتكون S لانهاية . ويمكن إيجاد مستويات منفصلة بمضاعفات $\lambda/2$ عليها
 E_{x1} تساوى صفراً عند كل الأوقات .



شكل ٩-١١ تأثير موجة منعكسة يختفي في مادة ذات فقد .

في المتوسط بين هذه المستويات ، E_{x1} لها اتساع أقصى ضعف ذلك للموجة الساقطة .
إذا كانت $\eta_2 = \eta_1$ ، حينئذ $\Gamma = 0$ ، لاتنعكس طاقة ، و $s = 1$ ، الانساعان
الأعظم والأصغر متساويان .

إذا انعكست نصف القدرة الساقطة ، $| \Gamma |^2 = 0.5$ ، $| \Gamma | = 0.707$ ، و $s = 5.83$.

حيث أن نسبة الموجة الواقفة هي نسبة اتساعين ، فإن الاتساع النسبي المعطى بواسطة مجس يسمح استخدامه لتحسين s تجريبياً . لهذا السبب فإن نسبة الموجة الواقفة بارامتر هام لخط نقل ، ونستخدمها كثيراً في الفصل القادم .

دعنا الآن نفترض أن منطقة I هي مادة ذات فقد لها α_I غير صفرية . موجة ساقطة تأتي من اليسار تخضع لتوهين أسي عندما تتقدم في اتجاه $z +$. الموجة المنعكسة توهين عندما تنتشر في اتجاه $z -$. أخيراً يكون اتساعها مهملاً بالمقارنة بذلك الذي للموجة الساقطة . على ذلك القيم المعطى والصغرى يمكن أن تقبل التمييز بالقرب من سطح الانعكاس ، ولكنها تزداد اقتراباً في قيمها على مسافات أكبر منه . شكل ١١ - ٩ يبين رسماً تخطيطياً للاتساع E_{xI} عندما تكون منطقة 2 موصلًا تاماً ومنطقة 1 لها ثابت انتشار $\gamma_I = I + j4\pi$. يجب ملاحظة أن ليس لأي قيمتين عظيمتين نفس الاتساع ، وكذلك بالنسبة للقيم الصغرى المتتالية . نسبة الموجة الواقفة دالة في z ، وقيمتها لا يمكن تحديدها بدقة لحالة مثل تلك المبينة . ما لم يحدد الموضع الذي تقاس عنده نسبة الموجة الواقفة ، فإن وصف التصرف بدلالة معامل الانعكاس وعامل التوهين يكون أكثر غنى بالمعلومات إلى حد بعيد .

مع أن الحالة المبينة في شكل ١١ - ٩ هي حالة متطرفة ، يجب أن ندرك أن خط النقل عديم الفقد التام لا يوجد في الممارسة ، وتكون نسبة الموجة الواقفة دائماً دالة في الموضع من الحمل . تكون قيمة s ذات معنى فقط عندما لا تتغير بوضوح خلال المنطقة التي نهتم بها .

مرة أخرى بقصر اهتمامنا على وسط I عديم الفقد ، دعنا نجد نسبة شدتي المجال الكلي الكهربى والمغناطيسى . بالنسبة لموجة متنقلة تكون هذه $\pm \eta_I$ ، والإشارة تعتمد على اتجاه الانتقال . على أن ، الانعكاس من موصل تام قد بين لنا أن E_{ysI} و E_{xsI} قد تكون صفراً عند مواضع معينة ، وعلى ذلك فنسبتهما قد تتغير من صفر إلى قيمة لانهاية . المجالات الكلية عند $z = -l$ هي

$$E_{xI} = (e^{j\beta_1 l} + \Gamma e^{-j\beta_1 l}) E_{xI0}^+$$

$$H_{yI} = (e^{j\beta_1 l} - \Gamma e^{-j\beta_1 l}) \frac{E_{xI0}^+}{\eta_1}$$

نسمى النسبة معاوقة دخل ذاتية η_{in}

$$\eta_{in} = \frac{E_{xsI}}{H_{ysI}} \Big|_{z=-l} = \eta_1 \frac{e^{j\beta_1 l} + \Gamma e^{-j\beta_1 l}}{e^{j\beta_1 l} - \Gamma e^{-j\beta_1 l}}$$

بجعل $\Gamma = (\eta_2 - \eta_1) / (\eta_2 + \eta_1)$ واستخدام مطابقة أولر ، يكون لدينا

$$\eta_{in} = \eta_1$$

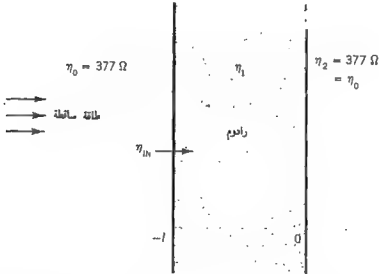
$$\times \frac{(\eta_2 + \eta_1)(\cos \beta_1 l + j \sin \beta_1 l) + (\eta_2 - \eta_1)(\cos \beta_1 l - j \sin \beta_1 l)}{(\eta_2 + \eta_1)(\cos \beta_1 l + j \sin \beta_1 l) - (\eta_2 - \eta_1)(\cos \beta_1 l - j \sin \beta_1 l)}$$

$$u_{\text{in}} = jfs_j fsumgn gilyix$$

$$(٧٤) \quad \eta_{in} = \eta_1 \frac{\eta_2 + j\eta_1 \tan \beta_1 l}{\eta_1 + j\eta_2 \tan \beta_1 l}$$

η_2 تساوى η_{in} ، تساوى η_1 أيضا ، لا يكون هناك انعكاساً ، ونقول أن نظام النقل متوائم . إذا كانت $\eta_2 = 0$ (موصل تام) ، $\eta_{in} = j\eta_1 \tan \beta_1 l$ ، تكون معاوقة الدخل صفراً عندما $\beta_1 l = n\pi$ أو عند تلك النقطة حيث $E_{z,zl} = 0$. أيضا ، η_{in} تكون لانهاية عند تلك المواضع حيث $H_{y,zl} = 0$.

سنستخدم (٧٤) بتوسع في الفصل القادم في صورة قابلة للتطبيق على خطوط النقل ، ولكن يمكننا اختتام هذا الفصل على الموجات المستوية ببيان كيف تصمم نافذة شفافة لهوائي رادار .



شكل ١١-١٠ لكي نوائم الموجة الساقطة لفناء حر عند اليمن الجيد ، فمن الضروري أن نجعل η_{in} تساوى η_0 باختيار مناسب لـ η_1 و l .

هذه المسألة تظهر أنه ضرورى أن نحصى هذه الهوائيات من الطقوس بأغطية مناسبة أورادومات . دعنا نفرض أن الهوائي بعيد على اليسار في فضاء حر ، $z < -l$ ، كما هو

مبين فى شكل ١١ - ١٠ . منطقة I تقع بين $l = -z$ و 0 . ندع منطقة I تكون لوحا من عازل تام ، جاعلين اياها رفعة بقدر ما نستطيع ، لنبقى فرضنا لفقد صفرى صحيحا . الى اليمين فى منطقة 2 ، $z > 0$ ، تكون منطقة الفضاء الحر التى سترسل فيها اشارة الرادار . لكى نتجنب أى انعكاس للقدرة راجعة الى داخل الهوائى ، أولكى نوائم الهوائى مع العالم الخارجى ، نضع $\eta_{in} = 377$. حيث أن $\eta_2 = 377$ ، يكون لدينا

$$377 = \eta_1 \frac{377 + j\eta_1 \tan \beta_1 l}{\eta_1 + j377 \tan \beta_1 l}$$

بضرب الطرفين والوسطين ، نجد

$$j377^2 \tan \beta_1 l = j\eta_1^2 \tan \beta_1 l$$

حيث أن $377 < \eta_1$ لكل المواد غير المغناطيسية ، يمكننا تحقيق هذه المعادلة فقط باختيار $\beta_1 l = n\pi$. ارفع رادوم يحصل عليه عندما $\beta_1 l = \pi$ ، أو $\beta_1 l = \lambda_1/2$.

على ذلك ، اذا كان التردد العامل هو $10,000\text{MHZ}$ ، يمكننا اختيار بلاستيك قليل الفقد خفيف الوزن له $\epsilon_{R1} = 2.25$ ونستخدم سمك

$$l = \frac{\lambda_1}{2} = \frac{v_1}{2f_1} = \frac{3 \times 10^8}{2\sqrt{2.25} \cdot 10^{10}} = 10^{-2} \text{ m} \quad (\text{or } 1 \text{ cm})$$

إذا كان الرادوم سمكه 0.5cm ، فيمكن بيان أن $\eta_{in} = 167.5\Omega$ و $\eta_1 = 14.8$ فى المائة من القدرة الساقطة ، سوف ينعكس .

ت ١١ - ٩ : موجة مستوية منتظمة ذات 4GHZ تسقط عموديا من منطقة

1 ، $z < 0$ ، $\epsilon_{R1} = 5$ ، $\mu_{R1} = 1$ ، $\sigma_1 = 0$ ، فى اتجاه منطقة

2 ، $z > 0$ ، $\epsilon_{R2} = 2$ ، $\mu_{R2} = 10$ ، $\sigma_2 = 0$. أوجد :

(أ) S فى منطقة 1 ، (ب) S فى منطقة 2 ، (ج) η_{in} عند $z = -0.6\text{cm}$.

الاجابة : 1.00 ، 5.00 ، $86.9^\circ - 61.8^\circ \Omega$.

مراجع مقترحة :

- 1 Ginzton, E. L.: "Microwave Measurements," McGraw-Hill Book Company, New York, 1957.

هذا الكتاب يعطى وصفا جيدا لتقنيات ونظرية القياسات فى الموجات الدقيقة كما كانت فى منتصف الخمسينات . كثير منها مازال صالحا ، وجميعها تعطى معلومات .

- 2 International Telephone and Telegraph Co., Inc.: "Reference Data for Radio Engineers," 6th ed., Howard W. Sams & Co., Indianapolis, Ind., 1975.

هذا الكتيب يحتوى على بعض بيانات ممتازة عن خواص المواد العازلة .

- 3 Rao, N. Narayana: "Elements of Engineering Electromagnetics," Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1977.

هذا المرجع على مستوى طلبة مرحلة البكالوريوس يؤكد على مجالات متغيرة مع الزمن . الموجة المستوية المنتظمة هي موضوع الفصلين الرابع والخامس .

- 4 Seshadri, S. R.: "Fundamentals of Transmission Lines and Electromagnetic Fields," Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1971.

الموجات المستوية مناقشة في الفصلين الخامس والسادس .

- 5 Stuart, R. D.: "Electromagnetic Field Theory," Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1965.

هذا الكتاب الموجز موجه الى طلبة الهندسة الكهربائية في المرحلة الوسطى من دراسته الجامعية . الحركة الموجبة هي موضوع الفصل التاسع .

- 6 von Hippel, A. R.: "Dielectric Materials and Applications," The Technology Press of the Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass., and John Wiley & Sons, Inc., New York, 1954.

مسائل :

- ١ - بين أن $E_{xx} = Ae^{\pm j(kz+\alpha)}$ هو حل لمعادلة هلمهولتز المتجهة ، قسم ١١ - ١ ، معادلة (١٥) ، لـ $k = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ وأى α .
- ٢ - عبر عن H و E كدوال حقيقية فى الزمن لموجة مستوية منتظمة متشرة فى اتجاه y فى فضاء حر اذا كان لـ E اتساع اقصى مقداره $250V/m$ عند $y = 0.5$ و $t = 0.2ns$ ، وفى اتجاه وحدة المتجه ، $0.6a_x - 0.8a_z$. دع $f = 400MHz$.
- ٣ - شدة المجال الكهربى لموجة مستوية منتظمة جيبيه ذات $100MHz$ معطاة عند $P(4, -2, 6)$ $E_z = 100a_x - 70a_y V/m$. أوجد $|E(t)|$ عند : (أ) P عند $t = 0$ ، (ب) P عند $t = 1ns$ ، (ج) $Q(3, 5, 8)$ عند $t = 2ns$ اذا كانت الموجة تنتقل فى اتجاه a_x فى فضاء حر .

٤ - إذا أعطيت $E_x = A e^{-j12x}$ لموجة مستوية منتظمة في فضاء حر ، عين أولاً ω ثم

احسب مقدار $E(t)$ عند $t = 0$ عند نقطة الأصل إذا : (أ) $A = 100a_x$ ،

(ب) $A = (100 + j60)a_x$ ، (ج) $A = 100e^{j35^\circ}a_x$ ، (د) $A = (100/\sqrt{35^\circ})a_x + (80/\sqrt{52^\circ})a_y$ ،

(هـ) $A = 100a_x + 80a_y$ ، (و) $A = (100/\sqrt{35^\circ})a_x + (80/\sqrt{52^\circ})a_y$.

٥ - موجتان مستويتان منتظمتان تنتقلان في اتجاه a_x في فضاء حر . كلتاها تصل إلى

نهاية عظمى موجبة $1,000V/m$ في اتجاه a_x عند نقطة الأصل عند $t = 0$. احدى

الموجتين لها تردد $920KHz$ ، بينما الأخرى $930KHz$. (أ) كم من الوقت يستغرق

حتى تصل الموجتين لقيم عظمى موجبة آتيا عند نقطة الأصل مرة أخرى ؟ (ب)

ما هي النقطة التالية على المحور z الموجب التي عندها $E = 2,000a_xV/m$ ؟

٦ - المجال الكهربى لموجة مستوية منتظمة في هواء معطى بـ

$E_x = (100a_x + j100a_y)e^{-j2\pi z/3} V/m$. أوجد ω لهذه الموجة . (ب) جهز رسماً

تخطيطياً ميّناً مقدار واتجاه $E(t)$ في المستوى $z = 0$ عند $t = 0, 2, 4, 6$ and $8ns$.

إن رسماً تخطيطياً صحيحاً يبين لماذا يقال عن موجة من هذا النوع أنها دائرية

الاستقطاب .

٧ - موجة مستوية منتظمة $E = (50a_x - 120a_y)e^{j(10t - \beta z)} V/m$ ، E_y ، تنتشر في

بوليبروبيلين ، الذى يمكن أن يفرض أنه عديم الفقد . أوجد : (أ) β ، (ب) λ ،

(ج) $H(x, y, z, t)$.

٨ - عبر عن كل من E و H كدوال في الزمن لموجة مستوية منتظمة ذات $30MHz$ منتشرة

في اتجاه a_x في وسط عديم الفقد له $\epsilon = 20pF/m$ و $\mu = 5\mu H/m$. E لها مركبة

في اتجاه a_x فقط وتصل اتساع أقصى موجب قيمته $800V/m$ عند $x = 0.4m$ عندما

$t = 6ns$.

٩ - مولد اشارات معين ينتج موجة مستوية منتظمة في فضاء حر لها طول موجة $12cm$.

عندما تنتشر الموجة خلال مادة عديمة الفقد ذات خصائص مجهولة ، ينقص طول

موجتها إلى $8cm$. في هذه المادة ، اتساع المجال E هو $50V/m$ واتساع المجال H

هو $0.1A/m$. أوجد تردد المولد و μ_R و ϵ_R للمادة المجهولة .

١٠ - أوجد H عند $P(100, 80, 500)$ عند $t = 8\mu s$ لكل من المجالات E المعطاة فيما

يلي إذا كانت $\omega = 10^5 rad/s$ والموجة تنتشر خلال مادة لها $\epsilon_R = 9$ ، $\mu_R = 1$ ،

و $\sigma = 0$: (أ) $E_x = 600e^{-j\beta x}a_x V/m$ ، (ب) $E_x = 600e^{-j\beta x}a_x V/m$ ، (ج)

$E_y = 600e^{j\beta x}a_x V/m$.

١١ - استخدم المنحنيات في شكل ١١ - ٣ لتعيين قيم α و β لبوليستيرين عند

$f = 100MHz$.

١٢ - أوجد α , β , ν , λ , و η لغريت له الخصائص التالية عند 10 GHz
و $\sigma = 10 \text{ mS/m}$, $\mu_R = 4$, $\epsilon_R = 9$.

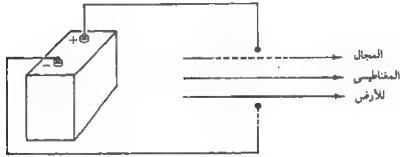
١٣ - حدد الخصائص (μ_R , ϵ_R , σ) لمادة موجة مستوية منتظمة ذات 100MHz
يكون لها طول موجة 1m , وتوهين 2Np/m , ومعاوقة ذاتية مقدارها 200Ω .

١٤ - موجة توصف بـ $E_z = (7.500 \angle 30^\circ) e^{-iz} e^{j\omega t} \text{ V/m}$ تنتشر في عازل له

$\epsilon = 20 \text{ pF/m}$, $\mu = 5 \mu \text{ H/m}$ و $\sigma = 10 \mu \text{ S/m}$, عند تردد $\omega = 10^8 \text{ rad/s}$.

(أ) أكتب تعبيراً لـ $E(t)$ وقدر قيمتها لـ $z = 20 \text{ m}$, $t = 100 \text{ ns}$. (ب) اكتب تعبيراً

لـ $H(t)$ قدر قيمتها لـ $z = 20 \text{ m}$, $t = 100 \text{ ns}$.



شكل ١١-١١ مجال كهروستاتيكي ومجال مغناطيسي ثابت يمكن أن يعطيا فيما غير متوقعة لمعجه بويتنج .
انظر مسألة ١٨ .

١٥ - موجة مستوية منتظمة ذات 2Mrad/s لها القيمة $E_z = (20/90^\circ) a_z \text{ mV/m}$ في

المستوى $z = 0$. الوسط له البارامترات

$\mu_R = 10$, $\epsilon_R = 2.5$, $\sigma = 10^{-4} \text{ S/m}$. حدد قيما عديدة لـ (أ) α , (ب) β ,

(ج) λ , (د) ν , (هـ) η , (و) E عند $z = 10 \text{ m}$, $t = 6 \mu \text{ s}$.

١٦ - موجة مستوية منتظمة ذات 150MHz تنتشر في عازل ذي فقد له $\epsilon_R = 1.4$

و $\mu_R = 1$, و $\sigma/\omega\epsilon = 10^{-4}$. كم مترا تستطيع الموجة أن تنتقل في العازل قبل

أن : (أ) ينصف اتساعها , (ب) يتغير طورها 90° ؟

١٧ - عامل القدرة لمكثف معرف بجيب تمام زاوية طور المعاوقة , و Q له هو $\omega\epsilon R$,

حيث R هي المقاومة المتوازية . افرض أن مكثفا متوازي الألواح جعل مثاليا ذا

عازل مميز بـ ϵ , σ , و μ_0 . أوجد كلا من عامل القدرة و Q بدلالة ظل الفقد .

١٨ - مجال كهروستاتيكي ومجال مغناطيسي ثابت ميبان في نفس المنطقة من الفراغ في

شكل ١١-١١ . حدد اتجاه معجه بويتنج عند النقط المختلفة في كل انحاء النظام

وبين كيف تكون نظرية بويتنج محققة .

- ١٩ - خط نقل محوري له موصل داخلي نصف قطره 1mm وموصل خارجي نصف قطره الداخلي 5mm . افرض $\sigma = \infty$ لكلا الموصلين . المجال E في الفضاء الحريين الموصلين هو $E(\rho, \phi, z, t) = [100/(p, \ln 5)] \cos(10^9 t - 10z/3) a_\rho \text{V/m}$. حدد : (أ) $H(\rho, \phi, z, t)$ ، (ب) $\mathcal{P}(\rho, \phi, z, t)$ ، (ج) \mathcal{P}_{av} لخط النقل .
- ٢٠ - موجة (ليست موجة مستوية منتظمة) في فضاء حر معطاة في إحداثيات كروية بالصورة $E = (100/r) \sin \theta \cos[\omega(t - r/c)] a_\theta \text{V/m}$ (أ) أوجد H . (ب) احصل على \mathcal{P} وكامل على سطح كرة نصف قطرها r لتوجد القدرة اللحظية المناسبة للمخرج خلال السطح . (ج) احسب متوسط القدرة خلال السطح بالوات .
- ٢١ - متجه بوينتج معطى بالصورة $a_z W/m^2 (3 \times 10^8 t - z)$. أوجد متوسط القدرة العابرة : (أ) 1m^2 من المستوى $z = 5$ ، (ب) 1m^2 من المستوى المعرف بالنقط الثلاث ، $(0,0,0)$ ، $(0,4,0)$ ، $(3,0,2)$.
- ٢٢ - موصل معدني له مقطع عرضي دائري نصف قطره 1cm . دع $\sigma = 2 \times 10^7 \text{ U/m}$. الموصل يحمل تيارا مستمرا موزعا بانتظام مقداره 100A في اتجاه a_z . (أ) احسب المقاومة R لطول 1m من الموصل واستخدم $I^2 R$ لتوجد فقد القدرة المستمرة في ذلك الطول . (ب) احسب E ، H ، \mathcal{P} داخل الموصل . (ج) كامل \mathcal{P} على السطح الاسطواني المحتوي على طول 1m من الموصل وبين أن الاجابة هي نفسها كمافي جزء أ آنفا .
- ٢٣ - المجالات لموجة مستوية منتظمة ذات 500KHz في عازل عديم الفقد معطاة بـ $E_z = 4a_z - a_y + 2a_z \text{ kV/m}$ و $H_z = 6a_x + 18a_y - 3a_z \text{ A/m}$. (أ) اعط وحدة متجه في الاتجاه الذي تنتقل فيه الموجة . (ب) ماهي كثافة القدرة المتوسطة زمنيا في الموجة ؟ (ج) اذا كانت $\mu_R = 1$ ، أوجد ϵ_R .
- ٢٤ - كثافة التيار عند سطح لوح نحاسي سميك معطاة بـ $J = 10^4 \cos 1000t a_x \text{ A/m}^2$. المنطقة $z > 0$ نحاس . ارسم منحنى J_x مع z لـ $t = 0$.
- ٢٥ - أوجد التردد المؤثر والموصلية لمادة جيالة التوصيل لها سرعة الانتشار تساوي عُشر في المائة من سرعة الضوء في فضاء حر ، والتي فيها طول الموجة 0.3mm . افترض أن المادة غير مغناطيسية .
- ٢٦ - موصل صلب لا يصدأ ذو مقطع عرضي دائري يحمل تيارا كلياً $0.8 \cos \omega t \text{ A}$. $\sigma = 10^6 \text{ U/m}$ ، $\mu_R = 100$ ، و $\rho = 4\text{mm}$. ماهي الفولتية المؤثرة (rms) التي تظهر عبر 100m من الموصل ، وماكمية متوسط القدرة التي تفقد فيه اذا كانت ω تساوي : (أ) 1rad/s ، (ب) 10^6 rad/s ؟
- ٢٧ - المنطقة $z < 0$ هي مادة لها $\mu = \mu_0$ ، $\epsilon = \epsilon_0$ ، و $\sigma = 1,000 \text{ U/m}$. $z > 0$ هي فضاء حر . عند $(0,0,0^+)$ ، $H = 100 \cos 4 \times 10^8 t a_x \text{ A/m}$ ،

(أ) أوجد $H(t)$ عند $(0,0,0)$ (ب) بفرض انتشار موجة مستوية منتظمة في اتجاه z لـ $z > 0$ ، أوجد $E(t)$ عند $(0,0,0^+)$. (ج) بفرض انتشار موجة مستوية منتظمة في اتجاه $-z$ لـ $z < 0$ ، أوجد $E(t)$ عند $(0,0,0^-)$.

٢٨ - نتائج نموذجية لتربة جافة معطاة فيما يلي لأمدية تردد مختلفة . بحساب قيم ثابت التوهين ، أحصل على إجابات من الرتبة الأولى لكل من الأسئلة الآتية : (أ) هل سيكون هوائيا ذا 20kHz فعلا إذا دفن على عمق 2ft في الأرض ؟ استخدم $\epsilon_R = 2.8$ ، $\sigma = 2 \times 10^{-4} \text{ U/m}$ (ب) هل يمكن استخدام نظام راداري ذى 10GHz للبحث عن خامات معدنية على أعماق 100m ؟ استخدم $\sigma = 8 \times 10^{-3}$ (ج) هل تكون دودة أرض أكثر أمانا في التعرض لإشعاع كهرومغناطيسى إذا انحرفت بضع أقدام تحت الأرض عندما تمر بخط قوى ذى 60Hz ؟ استخدم $\epsilon_R = 2.9$ ، $\sigma = 8 \times 10^{-5} \text{ U/m}$.

٢٩ - خط نقل محوري مصنوع من نحاس أصفر نصف قطره الداخلى : $a = 2\text{mm}$ و $b = 8\text{mm}$. التشغيل عند 300MHz . احسب المقاومة لكل متر طولى من :

(أ) الموصل الداخلى ، (ب) الموصل الخارجى ، (ج) الخط المحورى .
٣٠ - الموجة $E^+ = 10 \cos(3 \times 10^8 t - 30\pi z) \text{ a}_x \text{ V/m}$ ساقطة على حد مستوى عند $z = 0$. إذا كانت $I_{\mu R} = 1$ فى كل مكان و $\epsilon_R = 4$ لـ $z > 0$ ، أوجد E و H لـ $z > 0$.

٣١ - موجة مستوية منتظمة لها $\omega = 5 \times 10^8 \text{ rad/s}$ ساقطة من وسط $Z < D A$ ، $\sigma_A = 0$ ، $\epsilon_{RA} = 4$ ، $\mu_{RA} = 1$ ، على وسط :
إذا كانت شدة المجال الكهربى $\mu_{RB} = 4$ ، $\epsilon_{RB} = 10$ ، $\sigma_B = 0$ ، $z > 0$ للموجة الساقطة هى : 2.4V/m عند $z = 0$ عند $t = 0$ ، أوجد :
(أ) β_A و β_B ، (ب) Γ ، (ج) $E_A(t)$ ، (د) $E_B(t)$ ، (هـ) H_A عند $(0,0,-1)$ عند $t = 5\text{ns}$.

٣٢ - مادتان غير مغناطيسيتين عديمتا الفقد لهما سطح بينى مستوى . موجة مستوية منتظمة ساقطة على الحد من منطقة 1 . (أ) أوجد النسبة $\epsilon_{R2}/\epsilon_{R1}$ إذا أنفذت ثلث القدرة الساقطة الى داخل منطقة 2 . (ب) أعد بالنسبة للانتقال فى الاتجاه المضاد .

٣٣ - موجة مستوية منتظمة متفلة فى بوليستيرين فى اتجاه z تقابل موصلا مثاليا عند $z = 0.82\text{cm}$. إذا كانت $f = 16 \text{ GHz}$: (أ) عين مواقع المستويات التى عندها $E = 0$ (ب) أوجد نسبة شدة المجال الكهربى العظمى الى شدة المجال المغناطيسى العظمى فى البوليستيرين .

٣٤ - المجال $E = 45 \sin 10^9 \cos 5z a_y \text{ V/m}$ موجود في وسط عديم الفقد حيث :
 $\mu = \mu_0$. (أ) استخدم معادلات ماكسويل لتحديد H . (ب) مرة أخرى استخدم معادلات ماكسويل وأوجد ϵ_R . (ج) إذا كانت المنطقة التي أنشئ فيها المجال هي $b < z < a$ ، حدد القيمتين الموجبتين الصغيرتين لـ a و b حيث يمكن أن يوجد مستويات موصلة .

٣٥ - المنطقة النصف اللانهائية $z < 0$ هي فضاء حر ، بينما
 $\epsilon = 20 \text{ pF/m}$ ، $\mu = 5 \mu \text{ H/m}$ ، و $\sigma = 0.004 \text{ U/m}$ لـ $z > 0$. موجة مستوية منتظمة $E_{y1} = 100 e^{-\alpha_1 z} \cos [(10^8 t - \beta_1 z) \text{ V/m}]$ ، ساقطة على الحد . (أ) أوجد α_1 و β_1 . (ب) أوجد ثابت الانعكاس عند الحد . (ج) أوجد E_{x1} . (د) E_{x2}^+ .

٣٦ - موجة مستوية منتظمة ذات 200 MHz لها اتساع مجال كهربى مقداره 2 V/m يسقط عموديا على حد هواء الى بوليستيرين . كلا المنطقتين لانهاى السمك .
 (أ) أوجد القيمة العظمى لشدة المجال الكهربى فى الهواء وموضعها . (ب) أعد للقيمة الصغرى . (ج) أوجد القيم العظمى والصغرى لشدة المجال الكهربى فى البوليستيرين وموضعها .

٣٧ - موجة مستوية منتظمة مع $\lambda = 3 \text{ cm}$ فى فضاء حر تسقط عموديا على رادوم من زجاج ليفى (fiberglass) ($\epsilon_R = 4.9$ ، $\sigma = 0$) . (أ) أى سمك من الزجاج الليفى سوف لا ينتج انعكاسا ؟ (ب) ما النسبة المثوبة من الطاقة الساقطة ستنفذ خلال الزجاج الليفى إذا تردد أنقص الموجة الساقطة بعشرة فى المائة ؟

٣٨ - موجة مستوية منتظمة ، $H_z = 2 \cos(\omega t - \beta_1 z) a_y \text{ A/m}$ ، تنتقل فى وسط يميز بـ $\epsilon_R = 4$ ، $\mu_{R1} = 1$ ، $\sigma_1 = 0$ ، و تقابل الموجة مادة ثانية فى منطقة 2 ، $z > 0$ ، لها $\epsilon_{R2} = 2$ ، $\mu_{R2} = 50$ ، $\sigma_2 = 0$. إذا كانت $f = 5 \text{ GHz}$ ، أوجد : (أ) نسبة الموجة الواقعة لـ E فى منطقة 1 ، (ب) القدرة المتوسطة لكل متر مربع التى تنفذ الى داخل منطقة 2 .

٣٩ - فى شكل ١١ - د ، دع منطقة 1 تكون فضاء حر ، بينما $\mu_{R2} = 1$ ، $\sigma_2 = 0$ ، و ϵ_{R2} مجهولة . أوجد ϵ_{R2} إذا كان : (أ) اتساع E_1 ثلث تلك لـ E_1^+ ؛ (ب) $P_{-1,av}^-$ ثلث $P_{+1,av}^+$ ، (ج) $|E_1|_{\min}$ ثلث $|E_1|_{\max}$.

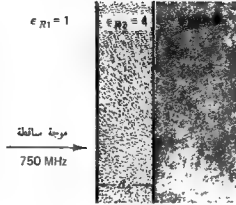
٤٠ - د $\epsilon_2 = 9$ ، $\mu_1 = \mu_2$ ، و $\sigma_1 = 0$ لـ $z < 0$ ، بينما $\epsilon_2 = \epsilon_0$ ، $\mu_2 = \mu_0$ ، و $\sigma_2 = 0$ لـ $z > 0$. موجة ساقطة فى منطقة 1 معطاة بـ :

$$E_1^+ = 20 \cos(2\pi 10^8 t - \beta_1 z) a_x \text{ V/m}$$

(أ) ارسم $|E_1|$ تخطيطيا مع $-0.6 < z < 0 \text{ m}$. (ب) لآى مدى من z حول قيمة صغرى تكون $|E_1| \leq 1.1$ ؟

(ج) لآى مدى من z حول قيمة عظمى تكون $|E_1| \geq 0.9 |E_1|_{\max}$ ؟

(د) أيهما يعين موضعها بأكثر دقة تجريبيا ، $|E_1|_{\min}$ أم $|E_1|_{\max}$ ؟



شكل ١١ - ١٢ انظر مسألة ٤١ .

- ٤١ - المناطق الثلاث المبينة في شكل ١١ - ١٢ جميعها عديمة الفقد وغير متغاطيسية .
 حدد نسبة الموجة الواقفة لـ E في المنطقة اليسرى عندما تساوى d_2 : (أ) 0 ،
 (ب) 5cm ، (ج) 3cm .

الفصل الثاني عشر

خطوط النقل

تستخدم خطوط النقل لنقل طاقة وإشارات كهربية من نقطة إلى أخرى . ويصل خط النقل الأساسى منبعاً بحمل . هذا قد يكون جهاز إرسال وهوائى ، مسجل تغير وقلب الذاكرة فى حاسب رقمى ، محطة توليد هيدروكهربائية ومحطة فرعية على بعد عدة مئات من الأميال ، هوائى تليفزيون ومستقبل ، أو قناة واحدة لمائدة استريو دوارة ومدخل واحد للمضخم المتقدم . عدة أنواع مختلفة من خطوط النقل متضمنة فى هذه الاستخدامات المختلفة ، وسندرس خصائصها فى القسم الثانى من هذا الفصل .

كيفما كان نحتاج أولاً أن نبين أن هناك تناظراً مباشراً بين خط النقل المنتظم والموجة المستوية المنتظمة . سنجد أن الجهد المخصص للموجة المستوية المنتظمة فى الفصل السابق يجعل من الممكن استنباط نتائج مشابهة لخط النقل المنتظم بسهولة وبسرعة . توزيعات المجال للموجة المستوية المنتظمة ولخط النقل المنتظم كلاهما معروف بانها موجات كهرومغناطيسية مستعرضة (TEM) لأن E و H كلاهما عمودى على اتجاه الانتشار ، أو كلاهما يقع فى المستوى المستعرض . التشابه الكبير فى النتائج هو نتيجة مباشرة للحقيقة أننا نتعامل مع موجات TEM فى كل حالة . على أنه فى خط النقل من الممكن والمعتاد تعريف فولتية وتيار . هذه الكميات هى تلك التى سكتب لها معادلات ، نحصل على حلول ، ونوجد ثوابت انتشار ، معاملات انعكاس ، ومعاوقات دخل . سنعتبر أيضاً القدرة بدلا من كثافة القدرة .

إضافة هامة لوسائل تحليلنا وتصميمنا ستكون استخدام طريقة تقنية بيانية لحل مسائل الانعكاس والمواومة . هذه الطريقة يمكن تطبيقها أيضاً على الموجة المستوية المنتظمة .

١٢ - ١ : معادلات خط النقل

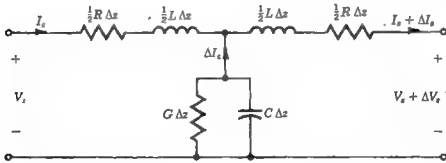
سنحصل أولاً على المعادلات التفاضلية التى يجب أن يحققها الفولتية أو التيار على خط نقل منتظم . هذا يمكن أن ينجز بأى من عدة طرق . مثلاً ، طريقة واضحة قد تكون حل معادلات ماكسويل خاضعة لشروط الحدود المفروضة بخط النقل الخاص الذى نعتبره . نستطيع حينئذ تعريف فولتية وتيار ، وهكذا نحصل على معادلاتنا المرغوبة . من الممكن أيضاً حل مسألة الموجة TEM العامة مرة بلاعودة . بدلا من ذلك ، سنشئ نموذج دائرة لطول عنصرى تزايدى من الخط ، نكتب معادلتى دائرة ،

ونبين أن المعادلات المحصلة تناظر المعادلات الأساسية التي استنبطت منها معادلة الموجة في الفصل السابق بهذه الوسيلة سنبدأ ربط المجال ونظرية الدوائر معا ، مهمة ستابعها مرة أخرى في الفصل التالي .

نموذجاً للدائرة سيحتوى على المحاعة ، المكثف ، الموصلة المتصلة على التوازي ، والمقاومة المتصلة على التوالي المرتبطة بطول عنصرى تزايدى من الخط . دعنا نعمل على التفكير بدلالة خط نقل محورى يحتوى على عازل ذو انفاذية μ (عادة μ_0) ، سماحية ϵ ، وموصلية σ . الموصلان الداخلى والخارجى لهما موصلية عالية σ_c . بمعرفة تردد التشغيل والأبعاد ، نستطيع حينئذ تعيين قيم L ، G ، R و C على اساس لكل وحدة طول باستخدام صيغ مستنبطة فى فصول سابقة . سترجع هذه التعبيرات ونجمع المعلومات عن عدة أنواع مختلفة من الخطوط فى القسم التالي .

دعنا نفرض مرة أخرى انتشاراً فى اتجاه z . لذلك نفصل جزءاً طوله Δz يحتوى مقاومة $R\Delta z$ ، محاعة $L\Delta z$ ، موصلة $G\Delta z$ ، وسعة $C\Delta z$ ، كما هو مبين فى شكل ١٢ - ١ . حيث أن الجزء من الخط يبدو نفسه من كلا الطرفين ، نقسم العناصر المتصلة على التوالى بالنصف لتعطى شبكة متماثلة . وكنا نستطيع على حد سواء تماماً وضع نصف الموصلة ونصف السعة عند كل طرف .

حيث أننا متعددون فعلاً على الخصائص الأساسية لانتشار الموجة ، دعنا نتحول فى الحال لحالة التغير الجيبى مع الزمن ، ونستخدم تدوين الكميات المركبة التى استنبطناها فى الفصل الأخير .



شكل ١٢ - ١ طول عنصرى تزايدى من خط نقل منظم R ، L ، G ، C دوال فى شكل ومواد خط النقل .

الفولتية V بين الموصلين تكون عامة دالة فى z و t مثلاً ، بالصورة ،

$$V = V_0 \cos (\omega t - \beta z + \psi)$$

يمكننا استخدام متطابقة أولير للتعبير عن هذا في تدوين مركب ،

$$V = \text{Re } V_0 e^{j(\omega t - \beta z + \psi)} = \text{Re } V_0 e^{j\psi} e^{-j\beta z} e^{j\omega t}$$

باسقاط Re وحذف $e^{j\omega t}$ ، نحول الفولتية الى مطاوع ، الذى ندل عليه برمز سفلى s ،

$$V_s = V_0 e^{j\psi} e^{-j\beta z}$$

يمكننا الان كتابة معادلة الفولتية حول محيط الدائرة لشكل ١٢ - ١ ،

$$V_s = (\frac{1}{2}R \Delta z + j\frac{1}{2}\omega L \Delta z)I_s + (\frac{1}{2}R \Delta z + j\frac{1}{2}\omega L \Delta z)(I_s + \Delta I_s) + V_s + \Delta V_s$$

أو

$$\frac{\Delta V_s}{\Delta z} = -(R + j\omega L)I_s - (\frac{1}{2}R + j\frac{1}{2}\omega L) \Delta I_s$$

بينما ندع Δz تقترب من الصفر ، تقترب ΔI_s أيضا من الصفر ، ويتلاشى الحد الثانى على اليمين . فى النهاية ،

$$(١) \quad \boxed{\frac{dV_s}{dz} = -(R + j\omega L)I_s}$$

باهمال تأثيرات الرتبة الثانية ، نقرب الفولتية عبر الفرع الأوسط باعتبارها V_s ونحصل على معادلة ثانية ،

$$\frac{\Delta I_s}{\Delta z} = -(G + j\omega C)V_s$$

$$(٢) \quad \boxed{\frac{dI_s}{dz} = -(G + j\omega C)V_s} \quad \text{أو}$$

بدلا من حل هذه المعادلات ، دعنا نوفر بعض الوقت بمقارنتها مع المعادلات التى تنتج من معادلات الاتواء لماكسويل لموجه مستوية منتظمة . من

$$\nabla \times \mathbf{E}_s = -j\omega\mu\mathbf{H}_s$$

نضع $\mathbf{E}_s = E_{xs}\mathbf{a}_x$ و $\mathbf{H}_s = H_{ys}\mathbf{a}_y$ ، حيث E_{xs} و H_{ys} دوال فى z فقط ، ونحصل على المعادلة المقياسية المفردة

$$\frac{dE_{xs}}{dz} = -j\omega\mu H_{ys} \quad \left[\frac{dV_s}{dz} = -(R + j\omega L)I_s \quad (1) \right]$$

مع بيان معادلة (١) للمقارنة السهلة . بالمثل ، من

$$\nabla \times \mathbf{H}_z = (\sigma + j\omega\epsilon)\mathbf{E}_z$$

يكون لدينا

$$\frac{dH_{yz}}{dz} = -(\sigma + j\omega\epsilon)\mathbf{E}_{xz} \quad \left[\frac{dI_z}{dz} = -(G + j\omega C)V_z \quad (٧) \right]$$

المقارنة الدقيقة للمعادلتين في السطر الأخيرتين تناظرًا مباشرًا بين أزواج الكميات الآتية : I_z و H_{yz} ، G و σ ، C و ϵ ، و V_z و E_{xz} . استبدال المتغيرات في أحد المعادلات بالكميات المقابلة ينتج المعادلة الأخرى . التناظر يكون قويًا خاصة في هذا الزوج من المعادلات ، لأن الكميات المقابلة تقاس تقريبا بنفس الوحدات .

بإجراء نفس هذا التناظر للزوج الأول من المعادلات ، نرى أنه يستمر في الأداء ويعطى زوج تناظرًا إضافيًا ، L و μ . ومع ذلك هناك أيضًا مفاجأة ، لأن معادلة خط النقل أكثر تعقيدًا من معادلة المجال . ليس هناك تناظر لمقاومة الموصل لكل وحدة طول R . مع أنه قد يكون في بيع جيداً أن نقول أن هذا يبين أن نظرية المجال أبسط من نظرية الدوائر ، دعنا نكون عادلين في تحديد سبب هذا الحذف . مقاومة الموصل يجب أن تحدد بالحصول على حل مستقل لمعادلات ماكسويل داخل الموصلات وإرغام الحلين على تحقيق شروط الحدود الضرورية عند السطح البيني . اعتبرنا من قبل في الفصل الخامس مجالات تيار ثابتة في موصلات ، ولقد اعتبرنا للتو حالة التردد العالي تحت ستار « الظاهرة السطحية » ، مع ذلك ، لقد فحصنا قليلاً فقط مسألة موءمة حلين عند الحد . هكذا يكون الحد الذي حذف في معادلة المجال يمثل مسألة المجالات داخل الموصلات ، وحل هذه المسألة يمكننا من الحصول على قيمة لـ R في معادلة الدائرة . وينقي على التناظر بقبول استبدال $R + j\omega L$ بـ $j\omega\mu$ ^(١) .

شروط الحدود على V_z و E_{xz} هي ذاتها ، كما تكون ، تلك لـ I_z و H_{yz} ، وبالتالي يمكن الحصول على حل معادلتنا دائرتنا من معلوماتنا عن حل معادلتنا المجال ، مثلما حصل عليه في الفصل الأخير . من

$$E_{xz} = E_{x0} e^{-\gamma z}$$

نحصل على موجة الفولتية

$$(٣) \quad V_z = V_0 e^{-\gamma z}$$

(١) عندما تدخل مواد فريت مسألة المجال ، غالباً تستخدم إتفاذية مركبة $\mu' - j\mu''$ ، μ' = μ لتشمل تأثير الفقد غير الأومي في تلك المادة . تحت هذه الظروف الخاصة تكون $\omega\mu''$ متناظرة لـ R .

التي تنتشر في اتجاه z بانتساع $V_s = V_0$ عند $z = 0$ و $V = V_0$ عند $t = 0, z = 0$ ثابت الانتشار للموجة المستوية المنتظمة $(\Psi = 0)$.

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)}$$

يصح

$$(4) \quad \gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}$$

طول الموجة مازال يعرف بالمسافة التي تعطى تغير طور قدره $2\pi \text{ rad}$ ، لذلك

$$(5) \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta}$$

أيضا، سرعة الطور قد عرفت بالصورة

$$(6) \quad v = \frac{\omega}{\beta}$$

وهذا التعبير صحيح لكل من الموجة المستوية المنتظمة، وخطوط النقل. بالنسبة لخط عديم الفقد ($R = G = 0$) نرى أن

$$\gamma = j\beta = j\omega\sqrt{LC}$$

لهذا

$$(7) \quad v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

من تعبير شدة المجال المغناطيسى

$$H_{ys} = \frac{E_{x0}}{\eta} e^{-\gamma z}$$

نرى أن موجة التيار المتحركة في الاتجاه الموجب

$$(8) \quad I_s = \frac{V_0}{Z_0} e^{-\gamma z}$$

مرتبطة بموجة الفولتية المتحركة في الاتجاه الموجب بمعاوقة مميزة Z_0 تناظر η حيث أن

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}}$$

يكون لدينا

$$(٩) \quad Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$$

عندما ترتطم موجة مستوية منتظمة في وسط l بالسطح البيني مع وسط 2 ، الجزء من الموجة الساقطة التي تنعكس يسمى معامل الانعكاس Γ ،

$$\Gamma = \frac{E_{x0}^-}{E_{x0}^+} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

على ذلك يكون الجزء من موجة الفولتية الساقطة الذي ينعكس بخط ذى معاوقة مميزة مختلفة ، مثلا Z_{02} ، هو

$$(١٠) \quad \Gamma = \frac{V_0^-}{V_0^+} = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}}$$

بمعرفة معامل الانعكاس ، يمكننا إيجاد نسبة الموجة الواقة ،

$$(١١) \quad s = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|}$$

أخيرا ، عندما تكون $\eta = \eta_2$ لـ $z > 0$ ، تكون نسبة E_{xz} الى H_{yz} عند $z = -l$ هي

$$\eta_{in} = \eta_1 \frac{\eta_2 + j\eta_1 \tan \beta_1 l}{\eta_1 + j\eta_2 \tan \beta_1 l}$$

ولذلك معاوقة المدخل

$$(١٢) \quad Z_{in} = Z_{01} \frac{Z_{02} + jZ_{01} \tan \beta_1 l}{Z_{01} + jZ_{02} \tan \beta_1 l}$$

هي نسبة V_x الى I_x عند $z = -l$ حيث $Z_0 = Z_{02}$ لـ $z > 0$. غالبا نهي خط نقل عند $z = 0$ مع معاوقة حمل Z_L والتي قد تمثل هوائيا ، دائرة دخل لمستقبل تليفزيون ، أو مضخم على خط تليفون . معاوقة المدخل عند $z = -l$ نكتب حينئذ ببساطة بالصورة

$$(١٣) \quad Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan \beta l}{Z_0 + jZ_L \tan \beta l}$$

سنستخدم هذه المعادلات لنكتسب بعض التعمود مع خطوط النقل بمجرد أن

نستطيع تعيين قيم للبارامترات المتعلقة R ، G ، L ، و C .

ت ١٢ - ١ : خط نقل يعمل عند $\omega = 10^8 \text{ rad/s}$ له قيم للبارامترات هذه :
 $R = 0.1 \Omega/\text{m}$, $L = 0.2 \mu\text{H}/\text{m}$, $G = 10 \mu\text{S}/\text{m}$, and $C = 100 \text{ pF}/\text{m}$.

أوجد : (أ) α ، (ب) β ، (ج) λ ، (د) ν ، (هـ) Z_0 .

ت ١٢ - ١ : خط نقل يعمل عند $\omega = 10^8 \text{ rad/s}$ له قيم للبارامترات هذه :
 $R = 0.1 \Omega/\text{m}$, $L = 0.2 \mu\text{H}/\text{m}$, $G = 10 \mu\text{S}/\text{m}$, and $C = 100 \text{ pF}/\text{m}$.
 أوجد : (أ) α ، (ب) β ، (ج) λ ، (د) ν ، (هـ) Z_0 .

الإجابة :

44.7° , $0.11^\circ \Omega$, $2.24 \times 10^8 \text{ m/s}$, 14.05 m , 0.447 rad/m , 1.345 mNp/m

٢ - ١٢ : بارامترات خط النقل

دعنا نستخدم هذا القسم لنجمع نتائج سابقة ونستنبط أخرى جديدة حيثما يكون ضروريا ، لكي تكون قيما لـ R , G , L , و C متاحة للأنواع الأبسط من خطوط النقل .
 نبدأ برؤية كم من التعبيرات موجودة لدينا من قبل لكابلات محورية ذو نصف قطر داخلي a ونصف قطر خارجي b (شكل ١٢ - ١٢) . السعة لكل وحدة طول ، محصول عليها في الفصل الخامس ، هي

$$(١٤) \quad C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(b/a)}$$

قيمة السماحية المستخدمة يجب أن تكون مناسبة لمدى الترددات العاملة المعنية .
 المواصلة لكل وحدة طول يمكن أن تعين بسهولة باستخدام تناظر التيار الموصوف في قسم ٦ - ٣ . على ذلك ،

$$(١٥) \quad G = \frac{2\pi\sigma}{\ln(b/a)}$$

حيث σ هي موصلية العازل بين الموصلين عند التردد العامل . المحاثية لكل وحدة طول حسبت للكابلات المحورية في الفصل السابق ،

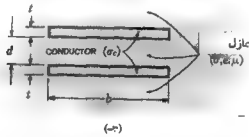
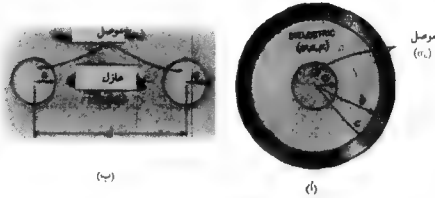
$$(١٦) \quad L_{\text{ext}} = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

وهي محاثية خارجية ، لأن حسابها لم يأخذ في الاعتبار أى تدفق داخل أى الموصلين .
 على أن هذه تكون عادة تقريبا ممتازا للمحاثية الكلية لحظ نقل عالي التردد ، لأن عند ترددات راديو نموذجية عاملة ، يكون العمق السطحي صغيرا لدرجة أن يوجد هناك تدفقا مهملا داخل أى الموصلين ومحاثية داخلية مهملة . لاحظ أن $L_{\text{ext}}C = \mu\epsilon$ ، ونكون

لذلك قادرين على ايجاد قيمة المحاطة الخارجية لأى خط نقل الذى نعرف له السعة وخصائص العازل .

لكى نعطي صورة معقولة الاكتمال ، مع ذلك ، دعنا نصرف فقرات قليلة للحصول على تعبيرات للمحاطة الداخلية . للترددات المنخفضة جدا حيث يكون توزيع التيار منتظما ، تعطى المحاطة الداخلية للموصل الداخلى فى الفصل التاسع بالصورة

$$(١٧) \quad L_{e, \text{int}} = \frac{\mu}{8\pi} \quad \text{H/m}$$



شكل ١٢-٢ : هندسة شكل خط النقل : (أ) المحورى ، (ب) ذو السلكين و (ج) المستوى . مفترض عوازل متجانسة .

هذا التعبير مفيد عند ترددات نقل القدرة ، وليس لخطوط نقل ترددات عالية .
تعيين المحاطة الداخلية للقشرة الخارجية هو مسألة أكثر صعوبة ، ومعظم العمل المطلوب فى مسألة ٧ . ومن تلك المسألة ، الطاقة المخزنة لكل وحدة طول فى قشرة اسطوانية خارجية نصف قطرها الداخلى b ونصف قطرها الخارجى c مع توزيع تيار منتظم هى

$$W_H = \frac{\mu I^2}{16\pi(c^2 - b^2)} \left(b^2 - 3c^2 + \frac{4c^4}{c^2 - b^2} \ln \frac{c}{b} \right)$$

على ذلك تكون المحاطة الداخلية للموصل الخارجى عند ترددات منخفضة جدا هي

$$(١٨) \quad L_{\phi c, \text{int}} = \frac{\mu}{8\pi(c^2 - b^2)} \left(b^2 - 3c^2 + \frac{4c^4}{c^2 - b^2} \ln \frac{c}{b} \right)$$

عند ترددات منخفضة يحصل على المحاطة الكلية بضم (١٦) ، (١٧) ، و (١٨) :

$$(١٩) \quad L_{\text{low}} = \frac{\mu}{2\pi} \left[\ln \frac{b}{a} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4(c^2 - b^2)} \left(b^2 - c^2 + \frac{4c^4}{c^2 - b^2} \ln \frac{c}{b} \right) \right]$$

استخدام (١٩) يجب أن يقتصر على تلك الموصلات المحورية ذات توزيع التيار المنتظم بدون أى ظاهرة سطحية ملحوظة .

عندما يزيد التردد ، تنقص المحاطة الداخلية . دعنا نعتبر ترددا متوسطا ، حيث لاتزال المحاطة الداخلية تعطى مساهمة هامة للمحاطة الكلية . نفرض أن العمق السطحي δ أقل بكثير من نصف قطر الموصل الدخلى a ، ويكون لدينا حينئذ طبقة رقيقة من التيار عند سطح الموصل . التيار فى اتجاه z ، وتكون لذلك المركبة المعاسة لـ J_z عند سطح الموصل فى اتجاه z ، لأن $J_z = \sigma_c E_z$ ، حيث σ_c هي موصلية الموصل . تكون شدة المجال المغناطيسى مماسة عند سطح الموصل ، و

$$H_{\phi z} = \frac{J_z}{2\pi a}$$

الان ، يمكن أخذ نسبة E_{zz} الى $H_{\phi z}$ عند السطح بوصفها المعاوقة الذاتية للمادة الموصلة لموجة مستوية منتظمة . مع أننا نعمل مع شكل هندسى اسطوانى ، يكون العمق السطحي أقل كثيرا من نصف القطر ، والطبقة الرقيقة يمكن أن تعامل كمستوى ملفوف ذى عرض $2\pi a$. من قسم ١١ - • ، حيثذ ،

$$\frac{E_{zz}}{H_{\phi z}} \Big|_{\rho=a} = \frac{1+j1}{\sigma_c \delta}$$

أو

$$\frac{E_{zz}}{I_z} \Big|_{\rho=a} = \frac{1+j1}{2\pi a \delta \sigma_c}$$

حيث أن E_{zz} هي الفولتية لكل وحدة طول فى اتجاه تيار التوصيل ، فان خارج القسمة هذا يجب أن يكون المعاوقة لكل وحدة طول ، أى أن ،

$$Z = R + j\omega L_{\text{int}} = \frac{1}{2\pi a \delta \sigma_c} + j \frac{1}{2\pi a \delta \sigma_c}$$

المحانة هي من النوع الداخلى ، لأنها تعتمد على الموصلية σ للمادة الموصلية وليس على الالتواءات واللفافات التى يعملها السلك فى مساره خلال الفراغ . لاحظ أن هذه المعاوقة تكون صفرا لموصل تام . على ذلك نحصل على المحانة الداخلية عند الترددات العالية للموصل الداخلى ،

$$(٧٠) \quad L_{a, \text{int}} = \frac{1}{2\pi a \delta \sigma_c \omega} = \frac{\mu \delta}{4\pi a} \quad (\delta \ll a)$$

وللموصل الخارجى

$$(٧١) \quad L_{bc, \text{int}} = \frac{1}{2\pi b \delta \sigma_c \omega} = \frac{\mu \delta}{4\pi b} \quad (\delta \ll c - b)$$

لذلك تكون محانة الترددات العالية الكلية هي

$$(٧٢) \quad L_{\text{high}} = \frac{\mu}{2\pi} \left[\ln \frac{b}{a} + \frac{\delta}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \right] \quad (\delta \ll a, \delta \ll c - b)$$

تعبيرنا للمعاوقة انفا يعطينا أيضا قيمة للمقاومة لكل وحدة طول ،

$$(٧٣) \quad R = \frac{1}{2\pi \delta \sigma_c} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \quad (\delta \ll a, \delta \ll c - b)$$

عندما توجد الظاهرة السطحية . هذه مقاومة داخلية ، لأن المقاومة الخارجية تمثلها المواصلة لكل وحدة طول . فقد آخر والذي قد يساهم بحد مقاومة اضافى هو الاشعاع من خط نقل غير مدرع أو من الطرف المفتوح لكابل محورى .

مازال هناك فترة تردد قد أهملناها ، تلك التى يوجد لها بعض الظاهرة السطحية ، لكن العمق السطحي مقارن بنصف القطر . توزيع التيار محكوم بدوال بسل ، ولكل من المقاومة والمحانة الداخلية تعبيرات معقدة . قيم مجدولة فى الكتيبات ، ومن الضروري استخدامها لأحجام موصل أصغر جدا عند ترددات عالية ، ولأحجام موصل أكبر المستخدمة فى نقل قدرة عند ترددات منخفضة .

المعاوقة المميزة يعبر عنها عادة بدلالة L_{ext} والسعة ،

$$(٧٤) \quad Z_0 = \sqrt{\frac{L_{\text{ext}}}{C}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ln \frac{b}{a}$$

لخط النقل ذي السلكين في شكل ١٢ - ٢ ب مع موصلات ذات نصف قطر a وموصلية σ_c مع فاصل d بين المركزين في وسط ذي انفاذية μ ، سماحية ϵ ، وموصلية σ ، وجد أن السعة تكون

$$(٢٥) \quad C = \frac{\pi\epsilon}{\cosh^{-1}(d/2a)}$$

$$C \approx \frac{\pi\epsilon}{\ln(d/a)} \quad (a \ll d) \quad \text{أو}$$

المحاثة الخارجية هي

$$(٢٦) \quad L_{ext} = \frac{\mu}{\pi} \cosh^{-1} \frac{d}{2a}$$

أو

$$L_{ext} \approx \frac{\mu}{\pi} \ln \frac{d}{a} \quad (a \ll d)$$

بينما المحاثة الكلية عند الترددات العالية هي

$$(٢٧) \quad L_{high} = \frac{\mu}{\pi} \left(\frac{\delta}{2a} + \cosh^{-1} \frac{d}{2a} \right) \quad (\delta \ll a)$$

المقاومة لكل متر طول هي

$$(٢٨) \quad R = \frac{1}{\pi a \delta \sigma_c} \quad (\delta \ll a)$$

والمواصلة يحصل عليها مرة أخرى من السعة ،

$$(٢٩) \quad G = \frac{\pi\sigma}{\cosh^{-1}(d/2a)}$$

باستخدام تعبيرات المحاثة الخارجية والسعة ، نحصل على قيمة للمعاوقة المميزة

$$(٣٠) \quad Z_0 = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cosh^{-1} \frac{d}{2a}$$

إذا كان لدينا خط النقل ذو المستويين المتوازيين أو خط النقل المستوي في شكل ١٢-٢، ذو مستويين موصلين لهما موصلية σ_c ، وفاصل d ، وعازل ذو بارامترات ϵ ، μ ، و σ ، حينئذ يمكننا بسهولة تعيين بارامترات الدائرة لكل وحدة طول لعرض b . من الضروري افتراض اما أن $d \gg b$ أو أننا نعتبر عرض b من نظام دليلى أعرض بكثير. يكون لدينا

$$(٣١) \quad C = \frac{\epsilon b}{d}$$

$$(٣٢) \quad L_{ext} = \mu \frac{d}{b}$$

$$(٣٣) \quad L_{total} = \mu \frac{d}{b} + \frac{2}{\sigma_c \delta b \omega} = \frac{\mu}{b} (d + \delta) \quad (\delta \ll t)$$

هنا قد فرضنا ظاهرة سطحية متسعة جدا بحيث أن $t \ll \delta$ ، t هي سمك أى من المستويين. أيضا،

$$(٣٤) \quad R = \frac{2}{\sigma_c \delta b} \quad (\delta \ll t)$$

$$(٣٥) \quad G = \frac{\sigma b}{d}$$

$$(٣٦) \quad Z_0 = \sqrt{\frac{L_{ext}}{C}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{d}{b}$$

ت ١٢-٢: كل من خطوط النقل عديمة الفقد التالية تعمل عند 400MHz مع معاوقة حمل مقدارها 100Ω. حدد λ و Γ لكل خط: محوري:
 $\mu_R = 1$ ، $\epsilon_R = 3.1$ ، $b = 2.8\text{mm}$ ، $a = 0.5\text{mm}$
 (ب) ذو سلكين $\mu_R = 1$ ، $\epsilon_R = 5$ ، $d = 9\text{mm}$ ، $a = 0.5\text{mm}$
 (ج) مستوى $\mu_R = 1$ ، $\epsilon_R = 2.2$ ، $b = 5\text{mm}$.
 الاجابة: 0.816، 50.6cm، - 0.215، 33.5cm، 0.260، 42.6cm.

ت ١٢-٣: خط نقل محوري يعمل عند 400MHz له $\sigma_c = 3 \times 10^7 \text{ U/m}$ ، $\mu_R = 1$

(أ) $\sigma = 10^{-5} \text{ V/m}$ و $\epsilon_R = 3.1$, $b = 2.8 \text{ mm}$, $a = 0.5 \text{ mm}$
المحثة لكل متر طول ؛ (ب) ثابت التوهين .

الاجابة : 24.2 mNp/m , $0.346 \mu\text{H/m}$.

١٢ - ٣ : بعض أمثلة خط النقل

فى هذا القسم سنتطرق كثيرا من النتائج التى قد حصلنا عليها فى القسمين السابقين على عدة مسائل خط نقل نموذجية . سنبتسط عملنا بقصر اهتمامنا على الخط عديم الفقد .

دعنا نبدأ بفرض خط ذى سلكتين ذو 300Ω ($Z_0 = 300\Omega$) ، مثل سلك التوصيل من الهوائى لتليفزيون أو مستقبل FM . الدائرة مبينة فى شكل ١٢ - ٣ . الخط طوله 2m وثابت العازل يكون بحيث السرعة على الخط هى $2.5 \times 10^8 \text{ m/s}$. سننهى الخط بمستقبل ذى مقاومة دخل مقدارها 300Ω ونمثل الهوائى بمكافئة تبعا لنظرية ثفنان ، 300Ω على التوالى مع 60V عند 100MHz . فولتية الهوائى هذه أكبر بعامل 10^5 تقريبا عما تكون عليه فى حالة عملية ، ولكنها أيضا تعطى قيما أبسط للعمل بها ؛ لكى نفكر أفكارا عملية ، اقسم التيارات أو الفولتيات على 10^5 ، اقسم القدرة على 10^{10} ، واترك المعاوقات كما هى .

حيث أن معاوقة الحمل تساوى المعاوقة المميزة ، فإن الخط يكون موافقا ، معامل الانعكاس يساوى صفرا ، ونسبة الموجة الواقفة هى الوحدة . للسرعة والتردد المعطيين ، يكون طول الموجة على الخط 2.5m وثابت الطور $0.8\pi\text{rad/m}$ ، ثابت التوهين صفرا . الطول الكهربي للخط l هو $2 \times 0.8\pi$ ، أو $1.6\pi\text{rad}$. هذا الطول يمكن أن يعبر عنه كـ 288° ، أو 0.8 طول موجة .

معاوقة الدخل المقدمة لمنبع الفولتية هى 300Ω ، وحيث أن المعاوقة الداخلية للمنبرع هى 300Ω ، تكون الفولتية عند المدخل للخط هى نصف 60V أو 30V . المنبرع متراكم مع الخط ويعطى القدرة العظمى المتاحة للخط . حيث أنه ليس هناك انعكاس ولا توهين ، تكون الفولتية عند الحمل هى 30V ، ولكنها تتأخر فى الطور بـ $1.6\pi\text{rad}$. على ذلك

$$V_{in} = 30 \cos 2\pi 10^8 t \quad V$$

بينما

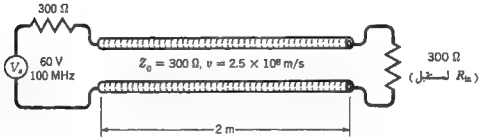
$$V_L = 30 \cos (2\pi 10^8 t - 1.6\pi) \quad V$$

تيار الدخل هو

$$I_{in} = \frac{V_{in}}{300} = 0.1 \cos 2\pi 10^8 t \quad A$$

بينما تيار الحمل هو

$$I_L = 0.1 \cos (2\pi 10^8 t - 1.6\pi) \quad A$$



شكل ٣-١٢ خط نقل متوازم عند كلا النهايتين لإنتاج انعكاسات وعلى ذلك يعطى قدرة عظمى للحمل .

متوسط القدرة المعطاة لمدخل الخط بالمنع يجب أن تعطى كلها للحمل بواسطة الخط ،

$$P_{in} = P_L = \frac{1}{2} \times 30 \times 0.1 = 1.5 \text{ W}$$

الآن دعنا نوصل مستقبلاً ثانياً ، أيضاً له مقاومة دخل 300Ω ، عبر الخط على التوازي مع المستقبل الأول . معاوقة الحمل الآن هي 150Ω ، معامل الانعكاس هو

$$\Gamma = \frac{150 - 300}{150 + 300} = -\frac{1}{3}$$

ونسبة الموجة الواقعة على الخط هي

$$s = \frac{1 + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = 2$$

معاوقة الدخل لم تعد 300Ω ، ولكن الآن

$$\begin{aligned} Z_{in} &= Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan \beta l}{Z_0 + jZ_L \tan \beta l} = 300 \frac{150 + j300 \tan 288^\circ}{300 + j150 \tan 288^\circ} \\ &= 510 / -23.8^\circ = 466 - j206 \quad \Omega \end{aligned}$$

التي هي معاوقة سمية . فزيائياً ، هذا يعنى أن هذا الطول من الخط يخترن طاقة في

٤٤٩

مجاله الكهربى أكثر منها فى مجاله المغناطيسى . على ذلك يكون مطاور تيار الدخول هو

$$I_{s, in} = \frac{60}{300 + 466 - j206} = 0.0756 / 15.0^\circ$$

والقدرة المعطاة للخط بالمنبع هى

$$P_{in} = \frac{1}{2} \times (0.0756)^2 \times 466 = 1.333 \text{ W}$$

حيث أنه لا يوجد هناك فقد فى الخط ، فإن 1.333 W يجب أيضا أن تزود للحمل . لاحظ أن هذا أقل من الـ 1.50 W التى كنا قادرين على تزويدها للحمل موثمة ، علاوة على ذلك ، هذه القدرة يجب أن تقسم بالتساوى بين مستقبلين ، وعلى ذلك فكل مستقبل يتلقى الآن 0.667 W فقط . حيث أن معاوقة الدخول لكل مستقبل هى 300Ω ، فإن الفولتية عبر المستقبل يوجد بسهولة كما يلى

$$0.667 = \frac{1}{2} \frac{|V_{s, L}|^2}{300}$$

$$|V_{s, L}| = 20 \text{ V}$$

بالمقارنة بالـ 30 V التى يحصل عليها عبر الحمل المفرد .

قبل أن نترك هذا المثال ، دعنا نسأل أنفسنا عدة أسئلة عن الفولتيات على خط النقل . أين تكون الفولتية قيمة عظمى وقيمة صغرى ، وماهى تلك القيم ؟ هل مازال طور فولتية الحمل يختلف عن فولتية المدخل بـ 288° ؟ افترضنا ، إذا كنا نستطيع اجابة على هذه الأسئلة للفولتية ، فيمكننا عمل المثل للتيار .

أجبنا على أسئلة من هذه الطبيعة للموجة المستوية المنتظمة فى الفصل الأخير ولذلك يجب أن يمدنا تناظرنا بالمعلومات المقابلة لخط النقل . فى قسم ١١ - ٧ ، معادلة (V_0) تخدم فى تحديد مواقع قيم الفولتية العظمى عند

$$-\beta z_{\max} = \frac{\phi}{2} + n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

على ذلك ، مع $\beta = 0.8\pi$ و $\phi = \pi$ ، نجد

$$z_{\max} = -0.625 \text{ and } -1.875 \text{ m}$$

بينما القيم الصغرى تكون على بعد $\lambda/4$ من القيم العظمى ،

$$z_{\min} = 0 \text{ and } -1.25 \text{ m}$$

ونجد أن فولتية الحمل (عند $z = 0$) هي قيمة فولتية صفري . هذا ، طبعاً ، يحقق النتيجة العامة التي وصلنا إليها في الفصل الأخير : تحدث قيمة فولتية صفري عند الحمل إذا كان $Z_L < Z_0$ ، وتحدث قيمة فولتية عظمى إذا كان $Z_L > Z_0$ ، حيث أن لكلتا المعاوقتين مقاومات خالصة .

قيمة الفولتية الصفري على الخط هي على ذلك فولتية الحمل ، $20V$ ، قيمة الفولتية العظمى يجب أن تكون $40V$ ، حيث أن نسبة الموجة الواقعة هي . الفولتية عند طرف المدخل للخط هي

$$V_{s, in} = I_{s, in} Z_{in} = (0.0756 / \underline{15.0^\circ}) (510 / \underline{-23.8^\circ}) = 38.5 / \underline{-8.8^\circ}$$

فولتية المدخل تقريبا في مثل كبر الفولتية العظمى عند أي مكان على الخط لأن طول الخط هو حوالي ثلاثة أرباع طول الموجة ، وهو طول سيضع الفولتية العظمى عند المدخل عندما $Z_L < Z_0$.

السؤال الأخير الذي وضعناه بأنفسنا يتعلق بالطور النسبي لفولتيات المدخل والحمل . مع أننا قد وجدنا كلا من هاتين الفولتيتين ، لانعلم زاوية الطور لفولتية الحمل . من قسم ١١ - ٧ ، معادلة (٦٨) ، الفولتية عند أي نقطة على الخط هي

$$V_z = (e^{-j\beta z} + \Gamma e^{j\beta z}) V_0^+$$

يمكننا استخدام هذا التعبير لتحديد الفولتية عند أي نقطة على الخط بدلالة الفولتية عند أي نقطة أخرى . حيث أننا نعرف الفولتية عند المدخل للخط ، ندع $z = -l$ ،

$$V_{s, in} = (e^{j\beta l} + \Gamma e^{-j\beta l}) V_0^+$$

ونحل لـ V_0^+ ،

$$V_0^+ = \frac{V_{s, in}}{e^{j\beta l} + \Gamma e^{-j\beta l}} = \frac{38.5 / \underline{-8.8^\circ}}{e^{j0.8\pi} + \Gamma e^{-j0.8\pi}} = 30.0 / \underline{72.0^\circ} V$$

يمكننا الآن إيجاد فولتية الحمل عند $z = 0$ ،

$$V_{s, L} = (1 + \Gamma) V_0^+ = 20 / \underline{72^\circ} = 20 / \underline{-288^\circ}$$

الانواع يتفق مع قيمتنا السابقة . وجود الموجة المنعكسة يتسبب في أن تختلف $V_{s, in}$ و $V_{s, L}$ في الطور بحوالي $279^\circ -$ بدلا من $288^\circ -$.

كمثال أخير دعنا نهي خطنا بمعاوقة سعوية $Z_L = -j300\Omega$. من الواضح ، أننا لانستطيع مد أي قدرة متوسطة للحمل . كنتيجة ، يكون معامل الانعكاس

$$\Gamma = \frac{-j300 - 300}{-j300 + 300} = -j1 = 1 \angle -90^\circ$$

والموجة المنعكسة تساوى فى الاتساع الموجة الساقطة . لهذا لا يجب أن يدهشنا أن نرى أن نسبة الموجة الواقفة هى

$$s = \frac{1 + |-j1|}{1 - |-j1|} = \infty$$

ومعاوقة المدخل تكون مفاعلة خالصة ،

$$Z_{in} = 300 \frac{-j300 + j300 \tan 288^\circ}{300 + j(-j300) \tan 288^\circ} = j589$$

التي لا يمكن أن يعطى لها متوسط قدرة

مع أننا نستطيع الاستمرار لنجد عددا من حقائق واشكال هندسية أخرى لهذا المثال ، معظم العمل يمكن أن يعمل بسهولة أكثر لمسائل من هذا النوع باستخدام طرق تقنية تخطيطية . سنلاقي هذه فى القسم التالى .

ت ١٢ - ٤ : خيط عديم الفقد ذو 50Ω طوله 1.5λ منهى بمقاومة خالصة مقدارها 60Ω ، فولتية الحمل هى $20 \angle 40^\circ V$. أوجد : (أ) القدرة المتوسطة المعطاة للحمل ، (ب) مقدار الفولتية الصغرى على الخيط ، (ج) مقدار التيار الأعظم على الخيط .
الاجابة : $3.33W$ ، $16.67V$ ، $0.400A$.

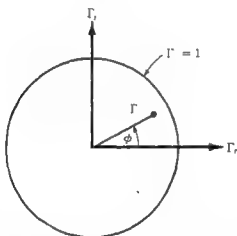
ت ١٢ - ٥ : خط نقل ذو 300Ω عديم الفقد ، طوله 0.25λ ، وينهى فى : $Z_L = 500\Omega$. الخيط له مولد ذو $90 \angle 0^\circ V$ على التوالى مع 100Ω موصلة للمدخل . (أ) أوجد فولتية الحمل . (ب) أوجد الفولتية عند نقطة منتصف الخيط .
الاجابة : $96.4 \angle 90^\circ V$ ، $79.5 \angle -59.0^\circ V$.

١٢ - ٤ : طرق تخطيطية

مسائل خط النقل غالبا تشتمل على تعامل مع أعداد مركبة ، مما يجعل الوقت والجهد المطلوبين لايجاد حل أكبر عدة مرات من تلك التى يحتاج اليها لتتابع مماثل من العمليات على أعداد حقيقية . أحد طرق تقليل الجهد بدون تأثير خطير على الدقة تكون باستخدام مخططات خط نقل . ربما يكون الأكثر اتساعا فى الاستخدام هو مخطط سميث^(١) .

(١) P.H. Smith, TRANSMISSION - Line Calculator, Electronics, Vol. 12, pp. 29 - 31 January 1939.

يبين هذا الرسم البياني أساسا ، منحنيات تخصص مقاومة ثابتة ومفاعلة ثابتة ، هذه يمكن أن تمثل إما معاوقة دخل أو معاوقة حمل . الأخيرة ، طبعاً ، هي معاوقة الدخل لخط طوله صفر . استدلال على الموضع على طول الخط معطى أيضاً . عادة بدلالة أجزاء طول موجة من موضع فولتية عظمى أو صغرى . مع أنها ليست مبنية بالتخصيص على المخطط ، نسبة الموجة الواقفة ومقدار وزاوية معامل الانعكاس تعين بسرعة جدا . كحقيقة واقعة ، الرسم البياني منشأ داخل دائرة نصف قطرها الوحدة ، باستخدام إحداثيات قطبية ، بنصف قطر متغير $|\Gamma|$ وزاوية متغيرة ϕ مقدرة في عكس دوران عقرب الساعة ، حيث $\Gamma = |\Gamma|e^{j\phi}$ شكل ١٢ - ٤ يبين هذه الدائرة . حيث أن $|\Gamma| \leq 1$ ، كل معلوماتنا يجب أن تقع على أو داخل دائرة الوحدة .



شكل ١٢ - ٤ الاحداثيات القطبية لمخطط سميث هي مقدار وزاوية طور معامل الانعكاس ، الاحداثيات الكرتيزية هي الأجزاء الحقيقية والتخيلية لمعامل الانعكاس . المخطط بأكمله يقع داخل دائرة الوحدة : $|\Gamma| = 1$.

من الغريب فعلاً أن ، معامل الانعكاس نفسه سوف لا يرسم على المخطط النهائي ، لأن هذه الكنتوريات الإضافية سوف يصعب جداً قراءة المخطط .

العلاقة الأساسية التي ينشأ عليها المخطط هي

$$(37) \quad \Gamma = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

المعاوقات التي نرسمها على المخطط ستكون معايرة بالنسبة للمعاوقة المميزة . دعنا نجازف بخلط محتمل مع الاحداثيات الكرتيزية ونستخدم z لنصف معاوقة الحمل المعايرة .

$$z = r + jx = \frac{Z_L}{Z_0} = \frac{R_L + jX_L}{Z_0}$$

$$\Gamma = \frac{z - 1}{z + 1}$$

وعلى ذلك

$$(٣٨) \quad z = \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma}$$

أو

في الصورة القطبية ، قد استخدمنا $|\Gamma|$ و ϕ كمقدار وزاوية Γ ، دعنا الآن نختار Γ_r و Γ_i كالأجزاء الحقيقية والتخيلية من Γ ،

$$(٣٩) \quad \Gamma = \Gamma_r + j\Gamma_i$$

على ذلك

$$(٤٠) \quad r + jx = \frac{1 + \Gamma_r + j\Gamma_i}{1 - \Gamma_r - j\Gamma_i}$$

الأجزاء الحقيقية والتخيلية لهذه المعادلة هي

$$(٤١) \quad r = \frac{1 - \Gamma_r^2 - \Gamma_i^2}{(1 - \Gamma_r)^2 + \Gamma_i^2}$$

$$(٤٢) \quad x = \frac{2\Gamma_i}{(1 - \Gamma_r)^2 + \Gamma_i^2}$$

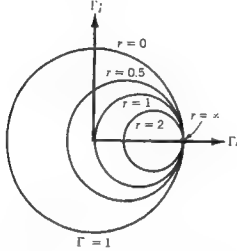
بعد عدة مسطور من عمليات جبر أولية ، يمكننا كتابة (٤١) و (٤٢) في صور تظهر بجلاء طبيعة المنحنيات على محاور Γ_r و Γ_i ،

$$(٤٣) \quad \left(\Gamma_r - \frac{r}{1+r} \right)^2 + \Gamma_i^2 = \left(\frac{1}{1+r} \right)^2$$

$$(٤٤) \quad (\Gamma_r - 1)^2 + \left(\Gamma_i - \frac{1}{x} \right)^2 = \left(\frac{1}{x} \right)^2$$

المعادلة الأولى تصف عائلة من دوائر ، حيث كل دائرة ترتبط مع قيمة معينة لمقاومة r . مثلاً ، إذا كانت $r = 0$ نصف قطر هذه الدائرة ذات المقاومة الصفرية يرى أنه الوحدة ، وهي تتمركز عند $\Gamma_r = 0$ ، $\Gamma_i = 0$ ، نقطة الأصل . هذا يحقق ، لأن نهاية ذات مفاعلة خالصة تؤدي إلى معامل انعكاس مقداره الوحدة لكن ، إذا كانت $r = \infty$ ،

فان $Z_L = \infty$ ، ويجب أن يكون لدينا $\Gamma = 1$. الدائرة الموصوفة بـ (٤٣) مركزية عند $\Gamma_i = 0$ ، ولها نصف قطر صفري . فهي لذلك النقطة $\Gamma = 1$ ، حسب ماقورنا وجوب حدوثه . كمثال آخر ، الدائرة لـ $r = 1$ مركزية عند $\Gamma_r = 0.5$ ، ولها نصف قطر مقداره 0.5 .



شكل ١٢ • دوائر ذات r ثابتة مبنية على المستوى Γ_r ، نصف قطر أي دائرة هو $(1 + r)/2$.

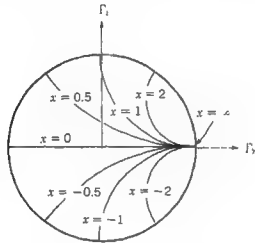
هذه الدائرة مبنية على شكل ١٢ • بالإضافة الى دوائر لـ $r = 0.5$ و $r = 2$. كل الدوائر مركزية على المحور Γ_r وتمر خلال النقطة $\Gamma_r = 1$ ، $\Gamma_i = 0$.

معادلة (٤٤) تمثل أيضا عائلة دوائر ، ولكن كلا من هذه الدوائر تعرف بقيمة خاصة لـ x ، بدلا من r . اذا كانت $x = \infty$ ، فان $Z_L = \infty$ و Γ يجب أن تكون $I + j0$ مرة أخرى . الدائرة الموصوفة - (٤٤) مركزية عند $\Gamma_r = 1$ ، $\Gamma_i = 0$ ، ولها نصف قطر صفري ، فهي لذلك النقطة $\Gamma = 1$. اذا كانت $x = +1$ ، فان الدائرة تتمركز عند $\Gamma_r = \Gamma_i = 1$ ، ولها نصف قطر يساوي الوحدة . ربع هذه الدائرة فقط يقع داخل منحنى الحدود $|I| = 1$ ، كما هو مبين في شكل ١٢-٦ . ربع دائرة مماثلة تظهر تحت المحور Γ_r .

لـ $x = -1$. الأجزاء من دوائر أخرى لـ -2 ، -0.5 ، 0.5 ، $x = 0.5$ مبنية أيضا . « الدائرة » الممثلة لـ $x = 0$ هي المحور Γ_r ، هذه أيضا مكتوبة على شكل ١٢-٦ .

كلا عائلتي الدوائر يظهر على مخطط سميث ، كما هو مبين في شكل ١٢-٧ . من الواضح الآن أنه اذا أعطينا Z_L ، يمكننا قسمتها على Z_0 لنحصل على z ، نحدد مواقع دوائر r و x الخاصة بالمسألة (مستكملين من الداخل حسب الضرورة) ، ونعين Γ بتقاطع الدائرتين . حيث أن المخطط ليس به دوائر متحدة المركز مبنية قيم $|I|$ ، فمن

الضروري قياس المسافة نصف القطرية من نقطة الأصل الى التقاطع بفرجار ونستخدم مقياس مساعد لنوجد $|\Gamma|$. أجزاء الخط المدرجة تحت المخطط في شكل ١٢ - ٧ تخدم هذا الغرض . زاوية Γ هي الزاوية المقطرة في ضد عقرب دوران الساعة من المحور Γ_r . مرة أخرى ، خطوط نصف قطرية مبنية الزاوية قد يزحم المخطط بطريقة سيئة ، ولذلك فان الزاوية مبنية على محيط الدائرة . خط مستقيم من نقطة الأصل مارا بالتقاطع يمكن أن يمتد الى محيط المخطط كمثال ، اذا كانت $Z_L = 25 + j50\Omega$ على خط ذي $z = 0.5 + j1$ ، ونقطة A على شكل ١٢ - ٧ تبين تقاطع الدوائر $r = 0.5$ و $x = 1$. معامل الانعكاس هو تقريبا 0.65 عند زاوية ϕ مقدارها 83° .



شكل ١٢ - ٦ أجزاء الدوائر ذات x ثابتة الواقعة داخل $|\Gamma| = 1$ مبنية حل محاور Γ_r و Γ_i نصف قطر دائرة ما معطاة هو $1/x$.

يكتمل مخطط سميث بإضافة تدريج ثان على المحيط يمكن بواسطته حساب المسافة على طول الخط . هذا التدريج يكون في وحدات طول موجة ، ولكن القيم الموضوعة عليه ليست واضحة . لكي نحصل عليها ، نقسم أولا الفولتية عند أى نقطة على الخط ،

$$V_s = V_0^+ (e^{-j\beta z} + \Gamma e^{j\beta z})$$

على التيار

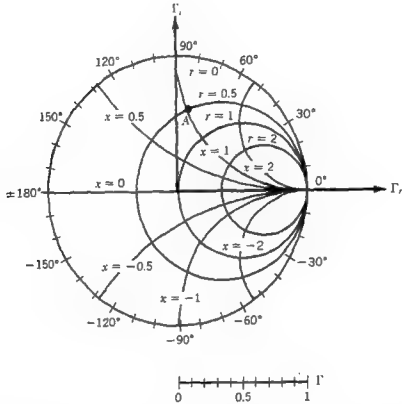
$$I_s = \frac{V_0^+}{Z_0} (e^{-j\beta z} - \Gamma e^{j\beta z})$$

حاصلين على معاوقة الدخل المعيارية

$$z_{in} = \frac{V_s}{I_s} = \frac{e^{-j\beta z} + \Gamma e^{j\beta z}}{e^{-j\beta z} - \Gamma e^{j\beta z}}$$

باستبدال $l - z$ ، يكون لدينا المعادلة العامة التي تربط معاوقة الدخل المعيارية ،
معامل الانعكاس ، وطول الخط ،

$$(45) \quad z_{in} = \frac{1 + \Gamma e^{-j2\beta l}}{1 - \Gamma e^{-j2\beta l}}$$



شكل ١٢ . مخطط سميث يخترى على دوائر ذات ثباتية وفوائذ ذات ثباتية ، تدريج نصف نظري مساعد لتحديد $|\Gamma|$ وتدريج زاوي على المحيط لقياس ϕ .

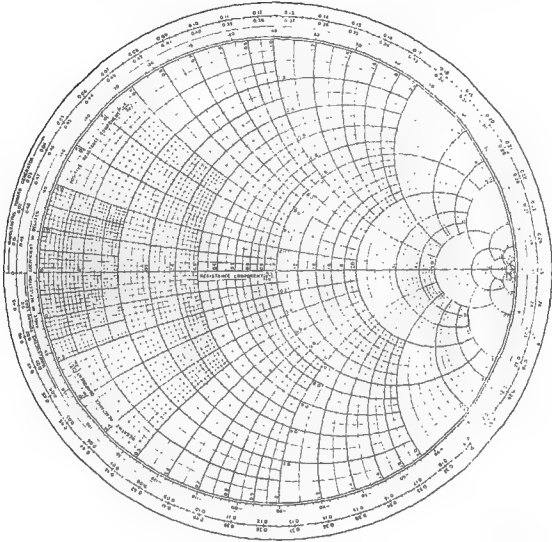
لاحظ أنه عندما $l = 0$ ، تقع عند الحمل ، و $z_{in} = z$.

نستخدم (45) لتوجد معاوقة الدخل عند مسافة l من معاوقة حمل ما معطى (فى اتجاه المنبع) . بإيجاد موقع معاوقة الحمل z على مخطط سميث ، يمكننا إيجاد النقطة المحددة لـ z_{in} بإضافة زاوية $2\beta l$ إلى Γ . أى أن ،

$$\Gamma e^{-j2\beta l} = |\Gamma| e^{j(\phi - 2\beta l)}$$

على ذلك ، بينما نتقدم من الحمل z إلى معاوقة الدخل z_{in} ، نتحرك فى اتجاه المولد مسافة l على خط النقل ، ولكننا نتحرك خلال زاوية $2\beta l$ فى اتجاه دوران عقرب

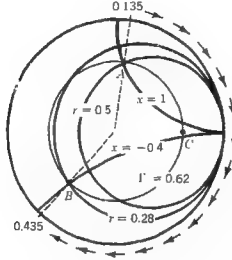
الساعة على مخطط سميت . ولذلك تستكمل دورة واحدة حول المخطط كلما تتغير βl بـ $\pi \text{ rad}$ ، أو عندما تتغير l بنصف طول موجة . هذا يتفق مع اكتشافنا السابق ان معاوقة الدخل لخط عديم الفقد طوله نصف طول موجة تساوى معاوقة الحمل .



شكل ١٢ - ٨ تصوير فوتوغرافى لنسخة من مخطط سميت مفيد:
(باذن من (the Emeloid company, Hillside, N.J.) . للعمل الدقيق ، مخططات اكبر متاحة
حيثما تباع كتب تكنولوجيا راقية .

على ذلك يستكمل مخطط سميت باضافة تدريج يبين تغير 0.5λ لكل ملاحظة محيطية لدائرة الوحدة . للتيسير ، عادة يعطى تدريجين ، واحدا يبين زيادة فى المسافة لحركة فى اتجاه دوران عقرب الساعة ، والاخر زيادة لانتقال عكس دوران عقرب الساعة . هذان التدريجان مبينان فى شكل ١٢ - ٨ . لاحظ أن الواحد المعلم بـ λ طول

موجة نحو المولد Wavelength toward generator (Wtg) ، يبين قيمة متزايدة لـ l/λ لانقزال مع دوران عقرب الساعة ، كما هو موصوف آنفا .



شكل ١٢ - ٩ معاوقة الدخل المعيارية الناتجة من معاوقة دخل معيارية $z = 0.5 + j1$ على خط طوله 0.3λ هي $z_{in} = 0.28 - j0.40$.

نقطة الصفر على تدريج الـ wtg فضل تحديد موقعها اختياريًا إلى اليسار . هذا يقابل معاوقات دخل لها زوايا طور مقدارها 0° و $r_L < Z_0$. قد رأينا أيضًا أن قيم فولتية صغرى دائما تقع هنا .

الأفضل بيان استخدام مخطط خط النقل بمثال . دعنا مرة أخرى نعتبر معاوقة الحمل $Z_L = 25 + j50\Omega$ ، التي تنهى خطًا ذا 50Ω . على ذلك $z = 0.5 + j1$ ، كما هو معلم عند A على شكل ١٢ - ٩ ، $\Gamma = 0.62 \angle 83^\circ = 0.62 e^{j1.45}$. برسم خط مستقيم من نقطة الأصل مارًا إلى المحيط ، نلاحظ قراءة مقدارها 0.135 على تدريج الـ Wtg . إذا كان طول الخط 60cm ويكون تردد التشغيل بحيث أن طول الموجة على الخط هو 2m ، فإن $l/\lambda = 0.3$ ، وهو لذلك 0.3λ من الحمل إلى المدخل . ولذلك نجد $z_{in} = 0.62$ على الدائرة $|\Gamma| = 0.62$ مقابل قراءة wtg مقدارها $0.435 + 0.135 = 0.57$. هذا الانشاء مبين في شكل ١٢ - ٩ ، والنقطة التي تحدد موقع معاوقة الدخل معلمة بـ B . معاوقة الدخل المعيارية تقرأ $0.28 - j0.40$ ، وعلى ذلك $Z_{in} = 14 - j20$. حساب تحليلى أكثر دقة يعطى $Z_{in} = 13.7 - j20.2$.

المعلومات المتعلقة بموضع الفولتيات العظمى والصغرى يحصل عليها بسهولة أيضًا على مخطط سميث . نحن نعرف مسبقًا أن قيمة عظمى أو صغرى يجب أن تحدث عند الحمل عندما تكون Z_L مقاومة خالصة ، إذا كانت $R_L > Z_0$ يكون هناك قيمة

عظمى عند الحمل ، وإذا كانت $R_L < Z_0$ يكون هناك قيمة صغرى . يمكننا مد هذه النتيجة الآن بملاحظة أننا نستطيع فصل طرف الحمل لخط نقل عند نقطة حيث تكون معاوقة الدخل مقاومة خالصة ونستبدل ذلك الجزء بمقاومة R_{in} ، سوف لا يكون هناك تغييرات على جزء المولد من الخط . ينبع ، حيث أن موقع الفولتيات عظمى وصغرى يجب أن يكون عند تلك النقط حيث تكون Z_{in} مقاومة خالصة . معاوقات الدخل المقاومة الخالصة يجب أن تحدث على الخط $x = 0$ (المحور Γ_r) لمخطط سميث . الفولتيات العظمى أو التيارات الصغرى تحدث عندما $r > 1$ ، أو عند $\text{wtg} = 0.25$ ، وتحدث الفولتيات الصغرى أو التيارات العظمى عندما $r < 1$ ، أو عند $\text{wtg} = 0$. إذن في المثال أنفا يجب أن تحدث القيمة العظمى عند $\text{wtg} = 0.250$ على مسافة $0.115 = 0.135 - 0.250$ من طول الموجة في اتجاه المولد من الحمل . هذه هي مسافة 0.115×200 ، أو 23cm من الحمل .

يجب أن نلاحظ أيضا أنه حيث أن نسبة الموجة الواقة المنتجة بحمل مقاومى R_L هي إما R_L/R_0 أو R_0/R_L أيهما تكون أكبر من الوحدة ، قيمة s يمكن أن تقرأ مباشرة كقيمة r عند تقاطع دائرة $|\Gamma|$ والمحور r ، $r > 1$. فى مثالنا هذا التقاطع معلم بنقطة C ، و $r = 4.2$ ، على ذلك $s = 4.2$.

مخططات خط النقل يمكن أيضا أن تستخدم مسامحة معايرة ، مع أن هناك عدة فروق طيفية فى مثل هذا الاستخدام . ندع $y = Y_1/Y_0 = g + jb$ ونستخدم دوائر r كدوائر g ودوائر x كدوائر b . الفرقان ، إذن ، هما أن $g > 1$ ، $b = 0$ ، b تقابل فولتية صغرى ، ويجب إضافة 180° لزاوية Γ كما تقرأ من محيط الخطط . سنستخدم مخطط سميث بهذه الطريقة فى القسم التالى .

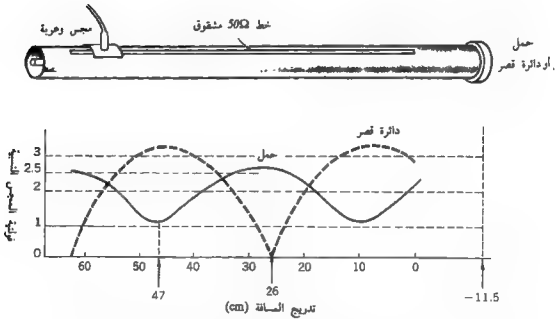
مخططات خاصة متاحة أيضا لخطوط غير معايرة ، خاصة مخططات 50Ω ومخططات $20m$.

ت ١٢-٦ : حمل معاير ، $z = 2 - j0.5$ ، موضوع عند 0.6λ من مدخل خط نقل عديم الفقد . (أ) أوجد z_{in} ، (ب) ما البعد (فى λ) من المدخل لأقرب فولتية عظمى ؟ (ج) ما البعد من الحمل لأقرب فولتية صغرى ؟ (د) ما هي نسبة الموجة الواقة ؟
الاجابة : $0.65 - j0.77$ ، 0.12λ ، 0.23λ ، 2.2 .

١٢-٥ : عدة مسائل عملية

فى هذا القسم سنوجه اهتمامنا لمثالين من مسائل خط نقل عملية . الأول هو تحديد معاوقة حمل من نتائج تجريبية ، والثانى هو تصميم شبكة موازنة لمقرب مفرد .

دعنا نفرض أننا قد عملنا قياسات تجريبية على خط هوائي ذي 50Ω التي تبين أن هناك نسبة موجة واقفة مقدارها 2.5 . هذه قد حدثت بتحريك عربة انزلاق جيتة وذهابا على طول المخط لتعيين القراءات العظمى والصغرى . ويبين تدرج مجهز على المسلك الذي تتحرك العربة عليه أن قيمة صغرى تحدث عند قراءة تدرج مقدارها 47.0cm ، كما هو مبين في شكل ١٢ - ١٠ . نقطة الصفر للتدرج اختيارية ولا تقابل موقع الحمل . موقع القيمة الصغرى تحدد عادة بدلا من القيمة العظمى لأنها يمكن أن تحدد بدقة أعلى من تلك التي للقيمة العظمى ؛ ففكر في القيم الصغرى الأكثر حدة على موجة جيبية مقومة .



شكل ١٢ - ١٠ رسم تخطيطي لخط محوري مشقوق . تدرج المسافة هو على الخط المشقوق . مع الحمل في مكانه ، $\Gamma = 2.5$ ، والقيمة الصغرى تحدث عند قراءة تدرج مقدارها 47cm ، لدائرة قصر تقع القيمة الصغرى عند قراءة تدرج مقدارها 26cm . طول الموجة هو 75cm .

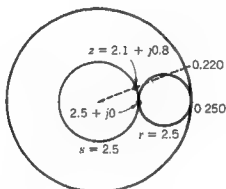
تردد التشغيل هو 400MHz ، لذلك يكون طول الموجة 75cm . لكي نحدد بدقة موقع الحمل ، ننزعه ونستبدله دائرة قصر به حيثل يمين موضع القيمة الصغرى 26.0cms .

نعرف أن دائرة القصر يجب أن تقع على بعد عدد صحيح من أنصاف طول موجة من القيمة الصغرى ، دعنا اختاريا نصفها على بعد نصف طول موجة عند : $37.5 - 26.0 = 11.5\text{cm}$ على التدرج . حيث أن دائرة القصر قد حلت محل الحمل ، يكون الحمل أيضا موضوعا عند 11.5cm - . على ذلك تبين نتائجنا أن القيمة الصغرى على بعد $58.5 = 47.2 - 11.5$ من الحمل ، أو بطرح نصف طول

موجة ، تكون قيمة صفري على بعد 21.0cm من الحمل . على ذلك تكون الفولتية العظمى على بعد :

$2.25 \text{ cm} = (37.5/2) - 21.5$ من الحمل ، أو $0.030 = 2.25/75$ من طول الموجة من الحمل .

بهذه المعلومات ، يمكننا الآن أن نتجه لمخطط سميث . عند فولتية عظمى تكون معاوقة الدخل مقاومة خالصة تساوي sR_0 ، على أساس معايير ، $z_{in} = 2.5$. لذلك ندخل المخطط عند $z_{in} = 2.5$ ونقرأ 0.250 على المقياس wtg . بطرح 0.030 طول موجة لنصل الى الحمل ، نجد أن تقاطع الدائرة $s = 2.5$ (أو $|T| = 0.429$) والخط نصف القطري الى 0.220 طول موجة هو عند $z = 2.1 + j0.8$. الانشاء مرسوم تخطيطيا على مخطط سميث لشكل ١٢ - ١١ .



شكل ١٢ - ١١ إذا كانت $z_{in} = 2.5 + j0$ على خط طوله 0.03 طول موجة ، فإن $z = 2.1 + j0.8$.

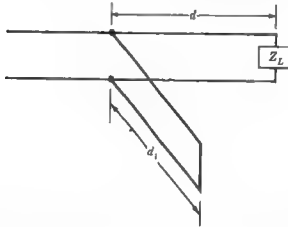
على ذلك $Z_L = 105 + j40$ ، وهي قيمة تتخذ موضعها عند قراءة تدريج مقدارها 11.5 cm ، أو عدد صحيح من نصف طول موجة من ذلك الموضع . طبعاً ، يمكننا اختيار « موضع » حملنا كما نشاء بوضع دائرة القصر عند تلك النقطة التي نود اعتبارها كموضع الحمل . حيث أن مواضع الحمل ليست معرفة جيداً ، من الضروري تحديد النقطة (أو المستوى) التي تعين عندها معاوقة الحمل .

كمثال أخير ، دعنا نحاول موازنة هذا الحمل لخط 50Ω بوضع عقب مقصر الدائرة طوله d_1 على مسافة d من الحمل (انظر شكل ١٢ - ١٢) . خط العقب له نفس المعاوقة المميزة مثل الخط الرئيسى . يجب أن نحدد الأطوال d و d_1 .

معاوقة الدخل للعقب هي مفاعلة خالصة ، عندما تضم على التوازي مع معاوقة الدخل للطول d المحتوى على الحمل ، يجب أن تكون معاوقة الدخل المحصلة $1 + j0$. حيث أنه أسهل جداً ضم مسامحات على التوازي عن معاوقات ، دعنا نعد صياغة هدفنا بلفظ المسامحة (admittance) : مسامحة الدخل للطول d المحتوى على

الحمل يجب أن تكون $I + j b_{in}$ لأن إضافة مسامحة الدخل للعقب $j b_{sub}$ تُنتج مسامحة كلية مقدارها $I + j 0$. لهذا تكون مسامحة العقب $j b_{in}$ — . لذلك سنستخدم مخطط سميث كمخطط مسامحة بدلا من مخطط معاوقة .

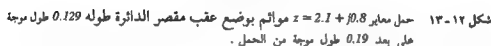
معاوقة الحمل هي $2.1 + j 0.8$ ، وموقعها عند 11.5° . مسامحة الحمل هي لذلك $1/(2.1 + j 0.8)$ ، وهذه القيمة يمكن أن تحدد بإضافة ربع طول موجة على مخطط سميث ، حيث أن Z_{in} لخط ربع طول موجة هي R^2/Z_L ، أو $z_{in} = 1/z$ ، أو $y_{in} = z$. بدخول المخطط (شكل ١٢ - ١٣) عند $z = 2.1 + j 0.08$ ، نقرا 0.220 على تدرج الـ $w t g$ ، نضيف (أو نطرح) 0.250 ونجد المسامحة $0.41 - j 0.16$ المقابلة لهذه المعاوقة . هذه النقطة لارتفاع تقع على الدائرة $s = 2.5$. الآن ، عند أي نقطة أو نقط على هذه الدائرة يكون الجزء الحقيقي للمسامحة مساويا للوحدة ؟ .



شكل ١٢ - ١٣ . عقب مقصر الدائرة طوله d ، يقع على بعد d من حمل Z_L ، مستخدم لجهاز حملا مواثنا على مسار العقب .

هناك إجابتان ، $1 + j 0.95$ عند $w t g = 0.16$ ، و $1 - j 0.95$ عند $w t g = 0.34$ ، كما هو مبين في شكل ١٢ - ١٣ . دعنا نختار القيمة الأولى حيث أن هذا يؤدي إلى العقب الأقصر . لهذا $y_{sub} = j 0.95$ ، وموضع العقب يقابل $w t g = 0.16$. حيث أن مسامحة الحمل وجدت عند $w t g = 0.470$ حيث يجب أن نتحرك $0.19 = 0.16 + (0.47 - 0.5)$ من طول الموجة لتحصل على موضع العقب .

أخيرا ، يمكننا استخدام المخطط لتحديد الطول الضروري للعقب المقصر الدائرة . مواصلة المنخل صفر لأي طول للعقب المقصر الدائرة ، لذلك فنحن مقصرون على محيط المخطط . عند دائرة القصر ، $y = \infty$ و $w t g = 0.250$. نجد أن $b_{in} = -0.95$ يتم عند $w t g = 0.379$ ، كما هو مبين في شكل ١٢ - ١٣ .



مع أننا سنستخدم تقديمنا لمخطوط النقل عند هذه النقطة ، فهناك مسائل عديدة هامة وحيوية لم نناقشها . ربما الأعمى أهمية تشمل تأثيرات الفقد التي لا يمكن تجنبها . وأخرى تشمل استخدام خطوط النقل كمناصر دائرية ، دوائر رانة ، خطوط تأخير ، التصرف العابر للمخطوط ، الدوائر المكافئة لمخطوط النقل ، المخطوط غير المنتظمة ، طرق موازنة أخرى ، وتقريبات خاصة تفيد في معالجة خطوط النقل منخفضة التردد عالية الفولتية . معظم هذه المواضيع مناقشة في معظم المراجع المدرجة الآتية بعد .

ت ١٢ - ٧ : عندما وضعت دائرة قصر على خط في الهواء ذي 50Ω عديم الفقد ، وجدت قيم صفري مجاورة عند قراءات تدريج مقدارها 12cm و 27cm . عندما تستبدل دائرة القصر بالحمل ، تكون القيم الصفري $0.4V$ في الاتساع ، وأحدها وجد عند 9 cm ، كل القيم العظمى هي $0.72V$. أوجد : (أ) λ ، (ب) f ، (ج) S للحمل ، (د) Γ للحمل ، (هـ) Z_L .

الإجابة : $36.5 + j 21.6 \Omega$; $0.286/108^\circ$, 1.8 , 1GHz , 0.3m

ت ١٢-٨ : خط نقل 50Ω عديم الفقد منتهى بحمل $Z_L = 100 + j100\Omega$. الخط متوازي بوضع عقب مقصر الدائرة طوله d_2 عبر الخط على مسافة d من الحمل . اذا كانت $v = 2c/3$ على الخط و $f = 10 \text{ MHz}$ ، أوجد : (أ) λ ، (ب) d ، اذا كانت d_2 لها أقل قيمة ممكنة ، (ج) d_2 .

الاجابة : 1.8m , 4.4m , 20m

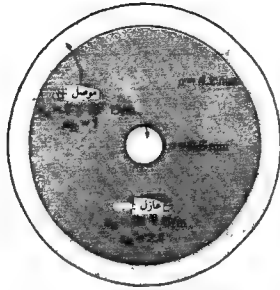
مراجع مقترحة :

- 1 Adler, R. B., L. J. Chu, and R. M. Fano: "Electromagnetic Energy Transmission and Radiation," John Wiley & Sons, Inc., New York, 1960.
خطوط النقل معالجة كاملة فى الفصول من الثالث الى السادس .
- 2 Brown, R. G., R. A. Sharpe, W. L. Hughes, and R. E. Post: "Lines, Waves, and Antennas," 2d ed., The Ronald Press Company, New York, 1973.
خطوط النقل مغطاة فى الفصول الستة الأولى ، مع عديد من الأمثلة .
- 3 Moore, R. K.: "Traveling-Wave Engineering," McGraw-Hill Book Company, New York, 1960.
هذا الكتاب يقدم الموجات المستوية وخطوط النقل جنباً الى جنب . أنواع أخرى من الموجات مناقشة أيضاً باختصار .
- 4 Paris, D. T., and F. K. Hurd: "Basic Electromagnetic Theory," McGraw-Hill Book Company, New York, 1969.
الموجات المستوية مغطاة فى الفصلين السابع والثامن ، وفى الفصل التاسع تناقش خطوط النقل وأدلة الموجات .
- 5 - Seshadri, S.R.:
(انظر المراجع المقترحة للفصل الحادى عشر)
- 6 Weeks, W. L.: "Electromagnetic Theory for Engineering Applications," John Wiley & Sons, Inc., New York, 1964.
عدة تجارب توضيحية على خطوط نقل موضوفة ابتداء من p.72 .

مسائل :

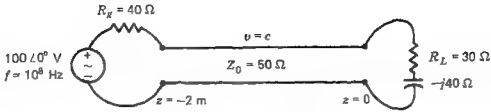
- ١ - بارامترات خط نقل معين هي :
 $C = 50 \text{ pF/m}$, $G = 100 \mu \text{ S/m}$, $L = 0.5 \text{ H/m}$, $R = 25 \Omega/\text{m}$
 الخط يعمل عند $\omega = 10^7 \text{ rad/s}$ (أ) احسب α , β , λ , Z_0 والسرعة على الخط .
 (ب) ما الطول من الخط الذى سيسبب أن تكون موجة متقلة لها عشرة فى المائة من اتساع مدخلها ؟
- ٢ - خط نقل عديم الفقد له $L = 0.25 \mu \text{ H/m}$ ، والسرعة على الخط هي $220 \text{ m}/\mu\text{s}$.
 أوجد : (أ) C ، (ب) Z_0 . الخط الآن منهى فى $R_L = 100 \Omega$. (ج) أوجد Γ .
 (د) أوجد معامل الشاذ .

- ٣ - خط عديم الفقد يعمل عند 1Grad/s له $z_0 = 60\Omega$ و $\beta = 5\text{rad/m}$. الخط منتهي بمجموعة على التوازي من مقاومة 100Ω ومكثف 12.5pF . حدد : (أ) L ب $\mu\text{H/m}$ ، (ب) C ب pF/m ، (ج) معامل الانعكاس للحمل .
- ٤ - خط عديم الفقد له $Z_0 = 50\Omega$ و $\lambda = 50\text{cm}$ يعمل عند 600MHz . إذا كانت $Z_L = 50 + j75\Omega$ ، أوجد معاوقة الدخول للخط عند z تساوي : (أ) 0 ، (ب) -5cm ، (ج) -30cm .
- ٥ - دع $\gamma = 0 + j0.2\text{m}^{-1}$ لخط نقل معين عند 10^8rad/s ، بينما $Z_0 = 72\Omega$ الخط يعمل مع حمل 100Ω . (أ) أوجد Γ . (ب) احسب S . (ج) حدد Z_{in} عند نقطة 6m من Z_L .
- ٦ - خط نقل 50Ω عديم الفقد يعمل عند $f = 25\text{MHz}$ مع سرعة تساوي 80% في المائة من سرعة الضوء . إذا كانت معاوقة الدخول مقاومة خالصة تساوي $0.4Z_0$ عند نقطة 1.5m من الحمل ، حدد : (أ) Z_L ، (ب) Γ ، (ج) S .
- ٧ - بعدى الموصل الخارجى لكابل محوري هما b و c ، $c > b$. افرض موصلية σ_c ودع $\mu = \mu_0$. أوجد الطاقة المغناطيسية المخزنة في المنطقة $c > b > p < b$ لتيار كل I منتظم التوزيع يمر في اتجاهين متضادين في الموصلين الخارجى والداخلى .
- ٨ - أوجد G ، C ، L ، R و α ، β للكابل المحوري المبين في شكل ١٢ - ١٤ إذا كانت $f = 100\text{MHz}$.
- ٩ - (أ) خط محوري :
- $a = 0.5\text{ mm}$, $b = 3\text{ mm}$, $c = 3.5\text{ mm}$, $\epsilon_R = 1.44$, $\mu_R = 1$, $\sigma_c = \infty$, and $\sigma = 0$ احسب L و C . (ب) أعد إذا تضاعف كل بعد و ϵ_R لم تتغير . (ج) غير الحقيقة أن أحد الخططين أكبر ، أقل ، وأعلى ثلثا من الآخر ، ما الفرق بينهما ؟
- ١٠ - (أ) حدد المعاوقة المميزة لخط ذى سلكتين في هواء إذا كان الموصلان قطرها Z_{in} وعلى بعد 5ft بين المركزين . (ب) ما المعاوقة المميزة لموصل مفرد قطره Z_{in} مركزه على بعد 5ft من مستوى أرض تامة التوصيل ؟ (أقترح : قد يساعد القسم الأخير من الفصل الخامس) .
- ١١ - كابل محوري قليل الفقد معين طوله 10m ومفتوح الدائرة عند كلا النهايتين . سعة مقدارها 600pF مقاسة بين الموصلين الداخلى والخارجى . إذا قصرت دائرة احد النهايتين ووصل مولد نبضات ومرسمة تذبذبات الى النهاية الأخرى ، وجد أن نبضة تحتاج $0.1\mu\text{s}$ لتكمل رحلة الذهاب والعودة . ما هي المعاوقة المميزة للكابل ؟
- ١٢ - خط النقل المستوى في شكل ١٢ - ٢ له الأبعاد $b = 5\text{mm}$ و $d = 0.4\text{mm}$ مادة العازل له $I = \mu_R$. (أ) بفرض أن العازل له فقد قليل ، عين ϵ_R إذا كانت : $Z_0 = 20\Omega$. (ب) إذا كانت الموصلات نحاسا و $\omega = 6\text{rad/s}$ ، عين ظل الفقد للعازل بحيث أن $RC = GL$.



شكل ١٢ - ١٤ انظر مسألة ٨ .

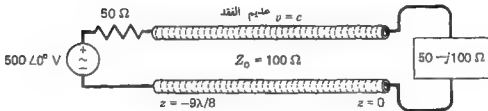
- ١٣ - خط نقل عديم الفقد ذي $Z_0 = 60\Omega$ طول 400m . متتهى بحمل ،
 $Z_L = 40 + j80\Omega$ ، ويعمل عند تردد 1MHz . دع $v = 0.8c$ على الخط .
 أوجد (أ) معامل الانعكاس ، (ب) نسبة الموجة الواقة على الخط ، (ج) معاوقة المدخل .
- ١٤ - خط نقل عديم الفقد ، طول 3m ، يعمل مع الطول موجة 4m وحمل ،
 $Z_L = 100 - j200\Omega$. إذا كانت فولتية الحمل $80/30^\circ\text{V}$ ، عين الفولتية : (أ) عند المدخل ، (ب) عند موضع الفولتية العظمى .
- ١٥ - خط نقل عديم الفقد ذو $L = 2 \times 10^{-7}\text{H/m}$ و $C = 8 \times 10^{-11}\text{F/m}$ طول c
 40m ومنهى به $Z_L = 20 + j0\Omega$ ، إذا وصل منبع فولتية مثالي ، $100/0^\circ\text{V}$ عند $f = 5\text{MHz}$ ، للمدخل ، فعين : (أ) مقدار تيار المدخل ، (ب) مقدار تيار الحمل ، (ج) القدرة المعطاة للحمل .
- ١٦ - خط نقل عديم الفقد ذي $L = 400\text{ nH/m}$ و $C = 40\text{pF/m}$ طول 75cm ومنهى فى دائرة قصر . تردد التشغيل هو 100MHz . إذا كان اتساع فولتية الخط هو 25V عند نقطة على بعد 20cm من دائرة القصر : (أ) ما هو اتساع الفولتية عند مدخل الخط ، (ب) ما هو اتساع التيار عند مدخل الخط ؟
- ١٧ - للخط عديم الفقد المبين فى شكل ١٢ - ١٥ ، أوجد : (أ) s ، (ب) Z_{in} عند $z = -2$ ، (ج) $V_{s,in}$ عند $z = -2$. أوجد القدرة المتوسطة المستفيدة فى :
 (د) R_g ، (هـ) R_L ، (و) X_L (المكثف) ، (ز) خط النقل نفسه .
- ١٨ - موجة فولتية ساقطة ، $100 e^{-j0.1\pi z}\text{V}$ ، ترتطم على حمل $Z_0 = (0.5 - j2)$ ، $Z_L =$



شكل ١٢ - ١٥ أنظر مسألة ١٧ .

- (أ) ما نسبة الموجة الواقفة التي توجد على الخط ؟ (ب) ما هو اتساع الفولتية العظمى على الخط ؟ (ج) على أى مسافة من الحمل تقع أول فولتية عظمى ؟
 ١٩ - لخط النقل البين في شكل ١٢ - ١٦ ، احسب : (أ) Γ ، (ب) S ، (ج) Z_{in} عند $z = -9\lambda/8$ ، (د) V_s عند $z = -9\lambda/8$ ، (هـ) I_s عند $z = -9\lambda/8$ ، (و) القدرة المتوسطة الموزونة لخط النقل عند $z = -9\lambda/8$ ، (ز) V_s عند $z = 0$ ، (ك) I_s عند $z = 0$ ، (ل) P_L ، باستخدام نتائج (ز) ، (ك) .
 ٢٠ - حمل $Z_L = 200 + j300 \Omega$ ، ينهى خط عديم الفقد طوله 6.125λ مع $Z_0 = 100 \Omega$ و $\lambda = 1 \text{ m}$. منبع فولتية له معاوقة داخلية مقدارها 100Ω وفولتية دائرية مفتوحة مقدارها $500 \angle 0^\circ \text{ V}$ موصل بالمدخل . احسب : (أ) V_{sin} ، (ب) $P_{L,av}$ ، (ج) $V_{s,L}$.

- ٢١ - حمل ، $Z_L = 110 - j65 \Omega$ ، ينهى خط في الهواء 72Ω عديم الفقد . استخدم مخطط سميث لتحديد : (أ) Z_{in} لخط طوله 0.1λ ، (ب) نسبة الموجة الواقفة ، (ج) المسافة من الحمل للفولتية العظمى الأولى .
 ٢٢ - ارسم تخطيطيا مخطط سميث بتقريب كبير ثم بين البيانات أو العمليات الآتية عليه . (أ) $Z_L = 75 - j100 \Omega$ عند $z = 0$ على خط عديم الفقد ذي $Z_0 = 500 \Omega$. (ب) عين Γ . (ج) طول الخط 40 cm و $\beta = 5\pi/3 \text{ rad/m}$. (د) عين Z_{in} ، (هـ) أوجد نسبة الموجة الواقفة على الخط .



شكل ١٢ - ١٦ أنظر مسألة ١٩ .

٢٣ - دع $Z_0 = 50\Omega$ و $\lambda = 80\text{cm}$, $Z_L = 80 - j30\Omega$ ، استخدم مخطط سميث لايجاد : (أ) s ، (ب) المسافة من الحمل لأقرب فولتية صغرى ، (ج) قيمة X_{in} عند النقطة حيث $Z_{in} = 50 + jX_{in}$, $X_{in} > 0$.

٢٤ - خط نقل 75Ω مملوء بالهواء عديم الفقد طوله 20m ويعمل عند 32MHz . وجد أن معاوقة الدخل $Z_{in} = 30 + j0.5\Omega$. استخدم مخطط سميث لتجيب على الأسئلة الآتية : (أ) ما هي s على الخط ؟ (ب) ما هي Z_L ؟ (ج) ما هو أقل قدر من الخط يمكن فصله من طرف المدخل لتحصل على معاوقة دخل $Z_{in} = 75 + jX_{in}$ ، حيث X_{in} موجبة ، ما هي القيمة العددية لـ X_{in} ؟

٢٥ - خط نقل عديم الفقد له $Z_0 = 50\Omega$, $Z_L = 23 - j48\Omega$ و $\lambda = 2.5\text{m}$. استخدم مخطط سميث لايجاد : (أ) Γ ، (ب) s ، (ج) المسافة من الحمل لأقرب فولتية عظمى ، (د) مساحه الدخل اذا كان طول الخط 3.45m .

٢٦ - حمل معابر ، $z = 2 - j0.8$ ، وصل بخط نقل 50Ω عديم الفقد . استخدم مخطط سميث لمساعد في ايجاد : (أ) نسبة موجة الفولتية الواقعة على الخط ، (ب) المسافة مقدرة بأطوال الموجة من الحمل الى النقطة الاولى التي عندها Z_{in} حقيقيه ، (ج) قيمة Z_{in} هناك ، (د) مساحه الدخل عند نقطة على بعد 0.1λ من الحمل .

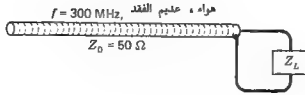
٢٧ - اذا كانت $Y_L = 1.2 + j1.4$ على خط 50Ω عديم الفقد مع $\lambda = 80\text{cm}$ ، عين اقصر مسافة من الحمل الى نقطة عندها : (أ) $|Y_{in}|$ قيمة صغرى ، (ب) $Y_{in} = Y_0$ ، R_0 ، (ج) زاوية Y_{in} هي 45° .

٢٨ - خط نقل 120cm ومنهى بـ $2Z_0$. خط 2 طوله 20cm ومنهى بـ $Z_0 (1 + j1)$. وصل الخطين على التوازي عند مدخلهما وغذيا بخط 3 . اذا كانت كلها خطوط 50Ω عديمه الفقد و $\lambda = 80\text{cm}$ ، عين s على كل خط .

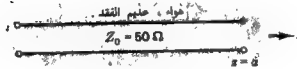
٢٩ - تبين قياسات على خط نقل عديم الفقد أن $s = 1.8$ مع فولتية صغرى تقع عند $z = -1$. اذا قصرت دائرة الحمل ، تغير موضع القيمة الصغرى الى : $z = -1 - j8\text{cm}$. بفرض خط 50Ω مع $\lambda = 80\text{cm}$ ، ما هي Z_L ؟

٣٠ - خط النقل المبين في شكل ١٢ - ١٧ له نسبة موجة واقفة مقدارها 2.5 مع اقرب قيمة صغرى واقعة على بعد 15cm من Z_L . أوجد Z_L .

٣١ - عندما قصرت دائرة حمل خط نقل ، وجدت قيم الفولتية الصغرى القريبة على أبعاد 23.6cm و 35.4cm من الحمل . عندما أزيلت دائرة المقصر ، انتقلت القيم الصغرى الى نقط 27.5cm و 39.3 من الحمل مع $s = 1.6$ ، بفرض خط 50Ω عديم الفقد مع $c = v$ ، عين تردد التشغيل و Z_L .



شكل ١٢ - ١٧ انظر مسألة ٣٠ .



شكل ١٢ - ١٨ انظر مسألة ٣٢ .

٣٢ - عندما وصلت دائرة قصر للخط المبين في شكل ١٢ - ١٨ عند $z = a$ ، وجدت فولتيات صغرى عند $z = -21\text{cm}$ و $z = -46\text{cm}$. عندما وصل حمل مجهول Z_L عند $z = a$ ، وقعت القيم الصغرى عند $z = -15\text{cm}$ و $z = -40\text{cm}$ ، و $s = 1.6$. أوجد Z_L .

٣٣ - حمل ، $Z_L = 60 - j80\Omega$ ، على خط 50Ω عديم الفقد يجعل على مواضعه مع عقب مقصر الدائرة طوله d_I يقع على بعد d meters من الحمل .
دع $\lambda = 1\text{m}$ على الخط . (أ) عين d_I و d . (ب) أوجد s على كل من أجزاء الخط الثلاثة .

٣٤ - عقب مقصر الدائرة طوله 12cm ويقع على بعد 20cm من حمل Z_L . دع $Z_0 = 50\Omega$ ، $f = 500\text{MHz}$ ، و $v = c$ ، ودع كل المخطوط تكون عديمة الفقد . عين Z_L .

٣٥ - تبين قياسات على خط عديم الفقد نسبة موجة واقفة $I : 2$ مع القيمة العظمى واقعة على بعد نصف طول موجة من الحمل . على بعد كم من أطوال الموجة من الحمل يجب أن يقع عقب مقصر الدائرة ، وكم من أطوال الموجة يجب أن يكون طوله ؟

٣٦ - دعنا نفترض أنه يمكن تمثيل إشارة مستقبلة بهوائي TV بواسطة مكافئ ثنائي 40mV عند $\omega = 5 \times 10^8 \text{ rad/m}$ و 300Ω . (أ) ما قدر القدرة المتوسطة يمكن مدنها إلى مستقبل TV ذي 300Ω باستخدام خط 300Ω عديم الفقد ؟ (ب) هل يمكن مد نفس هذه القدرة المتوسطة لكل من مستقبلين 300Ω بهذا الهوائي الواحد ؟ إذا كانت الإجابة لا ، برهنها . وإذا كانت الإجابة نعم ، فصمم نظاما تنفذ به .

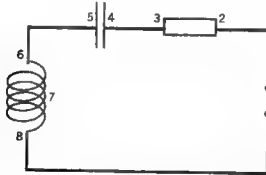
الفصل الثالث عشر

عدة تطبيقات أخرى لمعادلات ماكسويل

سنستخدم تقديمنا للنظرية الكهرومغناطيسية باعتبار عدة تطبيقات هامة أخرى لمعادلات ماكسويل - نظرية الدوائر ، الفجوة الرنانة ، والاشعاع من هوائي . تغطية هذه المواضيع لاثبتين فقط تطبيق وفائدة المعادلات الأساسية المقدمة في الفصول السابقة ، ولكنها أيضا يجب أن تمدنا ببعض المفاهيم الهامة عن التقريبات المتأصلة في نظرية الدوائر ، ظاهرة الرنين عند الترددات العالية ، والآلية التي يمكن بها إطلاق الطاقة في خط نقل الى الفراغ . المراجع المدرجة عند نهاية الفصل يجب ان تكون جميعها الآن ممكنة القراءة جدا ، وأولئك الذين لهم اهتمامات خاصة في أى من هذه التطبيقات يجب أن يستطيعوا الاستمرار في دراساتهم بمتعة .

١٣ - ١ : قوانين نظرية الدوائر

لنبين كيف أن معادلات ماكسويل ، تعريفات الجهد ، ومفاهيم المقاومة ، السعة ، والمحاثة تجتمع لتعطي التعميمات العامة لتحليل الدوائر ، اعتبر التشكل المبين في شكل ١٣ - ١ . مؤثر بمجال كهربي خارجي بين النقطتين 0 و 1 . هذان الطرفان قريبان من بعضهما جدا ، ويمكن فرض مجال كهربي جيبي .



شكل ١٣ - ١ ترجمة المجال لدائرة RLC . التشكل والمواد مرتبة بحيث يمكن التعرف على مقاومة ، مكث ، عضو حث ، ومنتج فولتية .

ربما يمكننا تصور مذبذب ترانزستور ميكروميكوي ، آلة دوارة بحجم رأس دبوس (كامل مع محرك أساسي) أو حتى برغوث متعاون محركا فما مليئا بالشحنة بالتناوب نحو نقطة

I ونقطة 0 . مهما تكن طبيعة المنبع ، فهو يستمر في انتاج مجال كهربي بين هذين الطرفين يكون غير معتمد على اى تيارات قد تمر بالتبعية . بين النقطتين 2 و 3 هناك منطقة من مادة ذات فقد مساحة مقطوعها العرضى S_R ، طول d_R ، وموصلية σ . عند نقطتى 4 و 5 موضوع لوحا مكثف ذاتا مساحة S_c ، بفواصل d_c وعازل ذى سماحية ϵ . هذه النقط العديدة متصلة كما هو مبين بموصل تام فتيل ذى مقطع عرضى مهمل . بين نقطتى 6 و 8 الفتيلة ملفوفة على شكل لولب ذى N من اللفات له خطوة دقيقة جدا . محتمل أنه واضح أننا نتيجة لاستنباط معادلة الدائرة المألوفة .

$$(١) \quad V_{10} = IR + L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{\infty} I dt$$

من معادلات ماكسويل . عندما نعمل هذا ، من المهم مراقبة كيف تنشأ كل من هذه الحدود وماهى الفروض التى تضطر لعملها أثناء العملية . نقطة بدايتنا هى الصورة التكاملية لقانون فاراداي ،

$$(٢) \quad \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

سنرى أن الطرف الأيمن من هذه المعادلة يمدنا بحد واحد فقط فى (١) ، ذاك الذى يشتمل على المحاطة . الحدود الثلاثة الأخرى كلها تنشأ عن التكامل الخطى المغلق .

دعنا نعتبر التكامل السطحي فى الطرف الأيمن لـ (٢) . حيث أن شكل الدائرة لايتغير مع الزمن ، يمكن استبدال مشتقة عادية بالمشتقة الجزئية . أيضا ، الفتيلة بين نقطتى 6 و 8 ، هى لولب ذو N من اللفات ، تحدم فى انتاج مجال مغناطيسى داخل اللولب أكبر بكثير من المجال فى أى منطقة أخرى على طول الفتيلة . إذا فرضنا تدفقا مغناطيسيا كليا Φ يرتبط بجميع اللفات N ، يصبح التكامل السطحي $-d\Phi/dt$ او $L (dI/dt)$ من تعريف المحاطة ، و

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -L \frac{dI}{dt}$$

حيث I هو التيار الفتيل فى كل لفة من اللولب .

التكامل الخطى المغلق مأخوذ على طول الفتيلة ، مباشرة بين لوحى المكثف ونقطتى 0 و I ، كما هو مبين بخط الشرط . المساهمة من الفتيلة التامة التوصيل هى صفر ، لأن \mathbf{E} المماسية يجب أن تكون صفرا هناك ، هذا يشمل اللولب ، رغم ما قد يحمله من غرابة . لذلك يكون لدينا

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = \int_0^1 + \int_2^3 + \int_4^5$$

التكامل الأول على اليمين هو السالب للفولتية I ونقطتي 0 ،

$$\int_0^1 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -V_{10}$$

هذا التكامل هو دالة فقط في المنبع الخارجى ولا يعتمد على التشكل الممين في شكل ١٣ - ١ . ويكون المسار مباشرة بين الطرفين المتجاورين ، وحيث أننا معتادون أكثر على اعتبار منبع خارجى على أنه فولتية عن أنه شدة مجال كهربي ، عادة نسمى V_{10} فولتية مسطحة .

التكامل الثانى مأخوذ عبر المادة ذات الفقد ، ونطبق قانون أوم في صورة تعيلية وتعريف المقاومة الكلية R ،

$$\int_2^3 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = \int_2^3 \frac{\mathbf{J}}{\sigma} \cdot d\mathbf{L} = \int_2^3 \frac{J}{\sigma} dL = \frac{J d_R}{\sigma} = \frac{I d_R}{\sigma S_R} = IR$$

مفروض نفس التيار الكلى I ، وهذا مبرر فقط عندما يستوفى شرطان . لا يمكن أن يكون هناك تيارات ازاحة سارية من جزء ما من الفتيلا الى آخر (مثل من نقطة 3 الى نقطة 8) ، لأننا نطلب استمرارية كثافة تيار التوصيل بالإضافة الى الازاحة أن يكون متحققا بواسطة تيار توصيل بمفرده . بتعبير آخر نحن مفترضون أن السعات الشاردة مهملة . أيضا يجب أن تكون أبعاد المسار الفتيلى صغيرة بالنسبة لطول الموجة . هذا سيظهر جدا فى القسم الأخير من هذا الفصل ، ولكن دراستنا للحركة الموجبة وخطوط النقل يجب أن تبين الانعكاس الكامل الذى يمكن حدوثه فى مجال على مسافة نصف طول موجة . هنا نود أن نتجنب الاشعاع ، ولكنه سيمدنا بموضوع اهتمامنا الرئيسى مؤخرًا فى الفصل .

التكامل الثالث تقدر قيمته عبر المنطقة بين لوحى المكثف حيث يكون تيار التوصيل صفرا ، ولكن تيار الازاحة يساوى التيار I ، كما أخذنا سابقا . هنا يمكن تمثيل التكامل بـ

$$\int_4^5 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = \int_4^5 \frac{D}{\epsilon} dL = \frac{D d_C}{\epsilon} = \frac{Q d_C}{\epsilon S_C} = \frac{Q}{C}$$

أو

$$\int_4^5 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t I dt$$

حيث نفرض أنه لا يوجد هناك شحنة على المكثف عند $t = -\infty$.
بضم هذه النتائج ، يكون لدينا

$$-V_{10} + IR + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t I dt = -L \frac{dI}{dt}$$

أو

$$V_{10} = IR + L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t I dt$$

- التي هي المعادلة المألوفة لدائرة التوال RLC التي آملنا أن نحصل عليها .
- الفروض التي بنى عليها هذا التساوى . المفروضة ضمينا فى معظم مسائل الدوائر ، هي كمايلي :
- ١ - موصل فتيلي يحدد المسار المغلق أو الدائرة .
 - ٢ - الأبعاد العظمى للدائرة صغيرة بالنسبة لطول موجة .
 - ٣ - تيار الازاحة مقصور على المكثفات .
 - ٤ - التدفق المغناطيسى مقصور على أعضاء الحث .
 - ٥ - التوصيلية غير التامة مقصورة على المقاومات .

الفرض الأول يعرف ببساطة ما نعنيه « بدائرة » . والثاني يقتضى ضمينا أن أى دائرة تكف عن إطاعة قوانين نظرية الدوائر إذا كان التردد عاليا بالقدر الكافى . الفروض الثلاثة الأخيرة تقصر علاقات الدوائر على العناصر المثالية . اذا كانت لمكثفاتنا مقاومات ، أو أعضائنا للحث لها سعات ، لا نستطيع تطبيق معادلات الدائرة حتي نستبدل بالمكثف ذا الفقد أو بعضو الحث بالإضافة الى السعات الشاردة بعض الشبكات المحتوية على عناصر مثالية فقط . اختيار تجميع مناسب لعناصر مثالية يصير ممكنا بمعلوماتنا عن تصرف المجالات الكهرومغناطيسية فى وحول الأجهزة ، وتدخل الخبرة أيضا ميسرة الأمور .

من الممكن أيضا استخدام « المعالجة بطريقة دائرة » لكثير من الأجهزة التي لانحقق الشروط آنفا ، مثل خطوط النقل . أدلة الموجات ، الفجوات الرنانة وكثير من مسائل الهوائيات يمكن أيضا أن تعامل كدوائر فى بعض النواحي . عندما يعمل هذا ، يجب أن يكون الوصف التفصيلي للمجالات الكهربائية والمغناطيسية ثانوى الأهمية ؛ ويوصف الجهاز بدلالة فولتية و تيار مكافئين عند كل مدخل أو مخرج . الفجوة الرنانة المناقشة فى القسم التالى هي إحدى هذه الأمثلة .

ت ١٣ - ١ : عبر عن كل من الأبعاد الآتية بدلالة طول موجة : (أ) خط قوى 60Hz طوله 100mi ، (ب) سلك طوله 10m يحمل إشارة 20kHz من مضخم قدرة الى مجهر ، (ج) مرحلة مضخم RF ، طولها 3cm ، تعمل عند $1,500\text{kHz}$ (د) مرحلة مواف TV

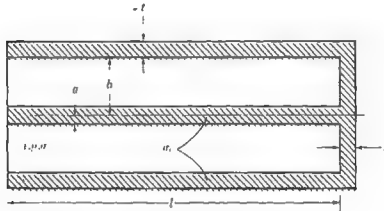
تعمل عند 200MHz قطرها 2cm ، (هـ) مكشاف موجات دقيقة 30GHz إبعاده العظمى هي 1cm .

الاجابة : 0.0322λ , 0.000667λ , 0.000150λ , 0.0133λ , 1.000λ .

١٣ - ٢ : الفجوة المحورية (متحدة المركز) الرنانة

وجدنا فى القسم الأخير أن أساسيات نظرية الدوائر مؤسسة على معادلات ماكسويل ، ولكننا يجب أيضا أن يكون لدينا مسار مغلق (ليس بالضرورة كونه مسارا موصلا) ، أبعاد دائرة تكون صغيرة بالنسبة لطول موجة ، وعناصر دائرة ممكنة التحديد . الآن دعنا نعتبر جهازا لا تتحقق فيه معظم هذه المتطلبات ، ولكن مع ذلك يعطى نتائج تحليلية عديدة يمكن تفسيرها بدلالة نظرية الدوائر .

يمكننا التفكير فى معمل مغلق يمر داخله موصل محورى مفرد . داخل المعمل هناك دائرة موزعة ، أى أن ، دائرة لها أبعاد مقارنة بطول موجة مع خواصها المقاومة ، الحثية والسعوية موزعة خلال كل هذه المنطقة . لذلك علاقات الدائرة غير قابلة للتطبيق فى المعمل . مع ذلك نستطيع عند النقطة التى يدخل عندها الموصل المحورى المعمل تعريف فولتية بين الموصلين الخارجى والداخلى والتيار فى كل .



شكل ١٣ - ٢ : فجوة محورية لها $b \ll \lambda$. هذا الجهاز يمكن أن يمثل بدائرة توافر رنانة بالقرب من التردد الرنان .

هذا ممكن لأن الأبعاد نصف القطرية للموصل المحورى مفروض أنها جزء صغير من طول موجة برغم أن طوله ليس كذلك . المسألة التى نرغب فى اعتبارها هى وصف الجهاز فى المعمل بدلالة دائرة مكافئة . إذا نجحنا ، فحينئذ سوف يكون مستحيلا تعيين ما إذا كان المعمل يحتوى على دائرة مكافئة تستوفى كل متطلبات نظرية الدوائر ، أو دائرة موزعة لا تستوفىها . سرى أنه خلال نطاق تردد ضيق بالقدر الكافى ، تكون هذه هى الحالة بالفعل .

الجهاز الذى سنستخدمه كمثال فى استنباط دائرة مكافئة هو فجوة رنانة محورية . مثل هذه المرئانات انتقائية جدا بالنسبة للتردد ، وعلى ذلك نجد استخداما فى مقاييس التردد ، مضخمات موائفة ، ومذبذبات ، ويمكن أيضا استخدامها لتمييز الموصلية والسماحية لمواد عازلة ، ربما للتحكم فى بعض عمليات التصنيع أو لتحديد خصائص تربة .

دعنا نعتبر الفجوة المحورية المبينة فى شكل ١٣ - ٢ . نفرض أن a ، b ، t أقل كثيرا من طول موجة λ ؛ يمكن أن يكون أى طول ، مع أننا سنختار بالتحديد ربع طول موجة . حيث أن ثوابت العازل والموصل معروفة ، نستطيع حساب C و L ، G ، R ، ومن هذه Z_0 و γ . نستطيع حينئذ قضاء بضع دقائق فى الحصول على تعبير لمعاوقة المدخل لخط نقل ذى فقد ، وعلى ذلك نعين معاوقة المدخل للخط المنهى بحمل قليل للمعاوقة ، اللوح المقصر للدائرة . وقد حصلنا على معاوقة المدخل ، سوف نكون حينئذ قادرين على تحديد شكل دائرة مكافئة تعطى نفس معاوقة المدخل ، على الأقل خلال مدى ما ، مرغوب من التردد حول التردد الرنان .

مع ذلك دعنا نختار طريقة عامة أكثر تبين الأسس المتضمنة فى تعيين دائرة مكافئة لأى فجوة ذات موجة دقيقة قريبة من الرنين . سنبدأ بايجاد المجالات التى سوف توجد فى فجوة عديمة الفقد . عندئذ نوجد قيم هذه المجالات عند حدود الموصل ونحسب الفقد التى سوف تحدث اذا كانت هذه المجالات موجودة . مع أننا عند ذلك نستطيع استخدام النتائج الخاصة بتحليل الفقد فى اعادة حساب مجالات الفجوة ونستخدم هذه القيم لتحسين حساباتنا للفقد ، فهذه الطريقة التكرارية ليست ضرورية فى الفجوات ذات الفقد القليل ، التقريب الأول يعطى دقة ممتازة .

بالنسبة للخط المحورى عديم الفقد المنهى بدائرة قصر عند $z = 0$ ، حيث يوجه المحور z الى اليمين ، مطاور الفولتية عند أى نقطة على طول الخط هى مجموع الموجتين الساقطة والمنعكسة ،

$$(٣) \quad V_g = V_0 e^{-j\beta z} - V_0 e^{j\beta z}$$

أو

$$V_g = -j2V_0 \sin \beta z$$

والتيار هو

$$I_z = \frac{V_0}{Z_0} e^{-j\beta z} + \frac{V_0}{Z_0} e^{j\beta z}$$

أو

$$(٤) \quad I_s = \frac{2V_0}{Z_0} \cos \beta z$$

حيث

$$\beta = \omega \sqrt{LC} = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$$

و

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ln \frac{b}{a}$$

شدة المجال المغناطيسى مرتبطة مباشرة بالتيار ،

$$H_{\phi s} = \frac{I_s}{2\pi \rho}$$

وعلى ذلك

$$(٥) \quad H_{\phi s} = \frac{V_0}{\pi \rho Z_0} \cos \beta z$$

حيثما نذكر^(١) أن علاقة شدة المجال الكهربى بالفولتية بين موصلى خط محورى هى

$$(٦) \quad E_{\rho s} = \frac{V_s}{\rho \ln (b/a)} = \frac{-j2V_0}{\rho \ln (b/a)} \sin \beta z$$

حيث فولتية الموصل الخارجى صفر ، وتلك للداخلى V_s .

هاتان المعادلتان الأخيرتان تعطيان المجالات للمفجوة عديمة الفقد .

ينشأ فقدان القدرة فى المفجوة فى مواطن مختلفة عديدة : فى عازل غير تام الذى قد يحلأ المفجوة ، وفى الموصلات المكونة للموصل المركزى ، والموصل الخارجى ، ولوح النهاية المفرد . دعنا أولاً نفرض أن فقد القدرة فى العازل أكبر بكثير منه فى الحوائط ، كما ستكون الحالة إذا كانت المفجوة مملوءة بالبيرة ، الدقيق ، أو بعض الأطعمة الصحية التى يراقب انتاجها كهربياً . الفقد فى العازل يحدد بتكامل كثافة القدرة الأومية خلال كل أنحاء المفجوة . نبدأ بإيجاد كثافة تيار التوصيل ،

$$J_{\rho s} = \sigma E_{\rho s} = \frac{-j2\sigma V_0}{\rho \ln (b/a)} \sin \beta z$$

أو ككمية حقيقية ،

$$J_{\rho} = \frac{2\sigma V_0}{\rho \ln (b/a)} \sin \beta z \sin \omega t$$

(١) القراء الذين ليس لديهم تذكر تام يمكنهم الرجوع لمثال ٧ فى قسم ٧-٣ .

القدرة اللحظية المبذولة في العازل هي

$$P_d = \int_{\text{vol}} \frac{1}{\sigma} J_p^2 dv$$

$$= \int_{-l}^0 \int_0^{2\pi} \int_a^b \frac{4\sigma V_0^2}{\rho [\ln(b/a)]^2} \sin^2 \beta z \sin^2 \omega t \rho d\rho d\phi dz$$

or

أو

$$P_d = \frac{4\pi\sigma V_0^2}{\ln(b/a)} \left(l - \frac{\sin 2\beta l}{2\beta} \right) \sin^2 \omega t$$

والمتوسط الزمني لفقد القدرة هو

$$P_{d,av} = \frac{2\pi\sigma V_0^2}{\ln(b/a)} \left(l - \frac{\sin 2\beta l}{2\beta} \right)$$

لكي نجهز فجوة رنانة ، دعنا الآن نختر الطول l مساويا ربع طول موجة . إذا كانت الفجوة حقا عديمة الفقد ، سيكون التيار عند المدخل صفرا ، وتكون معاوقة المدخل لانهاية . بدلا من ذلك ، سنجد أن القدرة المفقودة في العازل والحوامل الموصلة تسبب تيار مدخل صغير ومعاوقة مدخل التي تكون مقاومة عالية عند الرنين . إذا رمزنا للتردد الرنان f_0 فإن

$$l = \frac{\lambda_0}{4} = \frac{1}{4f_0 \sqrt{\mu\epsilon}}$$

و

$$\beta_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{\pi}{2l}$$

على ذلك يكون متوسط فقد القدرة في العازل عند التردد الرنان هو

$$(V) \quad P_{d0,av} = \frac{2\pi\sigma V_0^2 l}{\ln(b/a)}$$

نحاول الآن نوفق نتائجنا مع دائرة مكافئة ذات الشكل المبين في شكل ١٣-٣ ، دائرة توازن رنانة . عند الرنين تكون معاوقة المدخل مقاومة خالصة R_e (من تعريف الرنين) . من (٣) لدينا الفولتية عند أى نقطة وعند أى زمن ،

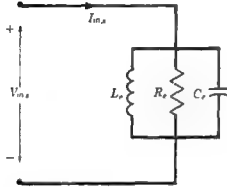
$$V = 2V_0 \sin \beta z \sin \omega t$$

وعلى ذلك تكون فولتية المدخل ($z = -l$) هي

$$V_{in} = -2V_0 \sin \beta l \sin \omega t$$

عند الرنين ، $\beta\omega l = \pi/2$ و

$$V_{0, in} = -2V_0 \sin \omega t$$



شكل ١٣- ٣ اختيارات مناسبة لـ C_s و L_s و R_s تسبب أن تكون هذه الدائرة مكافئة للفتحة المحورية الرنانة في شكل ١٣- ٢ بالقرب من $f_0 = 1/2\pi\sqrt{L_s C_s} = 1/4l\sqrt{\mu\epsilon}$ حيث l هو طول الفتحة .

حيث أن اتساع القمة هي $2V_0$ ، يمكننا متوسط فقد القدرة

$$P_{av, av} = \frac{1}{2} \frac{(-2V_0)^2}{R_s} = \frac{2\pi\sigma V_0^2 l}{\ln(b/a)}$$

أن نجد المقاومة المكافئة

$$(A) \quad R_s = \frac{\ln(b/a)}{\pi\sigma l}$$

هذا التعبير ، بالطبع ، لايفرض فقدا في حدود الموصل .

لكي نجد تعبيرات لـ C_s و L_s في شكل ١٣- ٣ ، يمكننا إيجاد قيمة للطاقة المخزنة في المرنان عند الرنين . نستطيع حينئذ استخدام التعريف العام لـ Q ،

$$Q = 2\pi \frac{\text{الطاقة المخزنة}}{\text{الطاقة المفقودة في دوره}}$$

أو

$$(٩) \quad Q = \omega \frac{\text{الطاقة المخزنة}}{\text{متوسط القدرة المفقودة}}$$

لتعيين Q . إذا عرفنا Q ، ستمكنا معادلات الدائرة المألوفة من إيجاد L_s و C_s .

الطاقة المخزنة في الفجوة هي مجموع الطاقات المخزنة في المجالين الكهربى والمغناطيسى . ومع ذلك يمكن بيان أن هذه الطاقة الكلية هي نفسها مثل الطاقة العظمى المخزنة في أى من المجالين الكهربى أو المغناطيسى . أى أن ، الطاقة الكلية ثابتة ، وعندما تكون الطاقة المغناطيسية صفرا ، تكون الطاقة في المجال الكهربى قيمة عظمى ، والعكس بالعكس . دعنا نختار القيمة العظمى للمجال المغناطيسى (٥) ،

$$H_{\phi, \max} = \frac{V_0}{\pi \rho Z_0} \cos \beta z$$

وعلى ذلك

$$\begin{aligned} W_{H, \max} &= \int_{\text{vol}} \frac{1}{2} \mu H_{\max}^2 dv \\ &= \frac{\mu V_0^2}{2\pi^2 Z_0^2} \int_{-1}^0 \int_0^{2\pi} \int_a^b \frac{1}{\rho} \cos^2 \beta z d\rho d\phi dz \\ &= \frac{\mu V_0^2 \ln(b/a)}{2\pi Z_0^2} \left(1 + \frac{\sin 2\beta l}{2\beta} \right) \end{aligned}$$

عند الرنين

$$(١٠) \quad W_{H0, \max} = W_{0, \max} = \frac{\mu V_0^2 \ln(b/a)}{2\pi Z_0^2} = \frac{2\pi \epsilon V_0^2}{\ln(b/a)}$$

تعيين الطاقة المخزنة العظمى في المجال الكهربى يؤدى الى نفس النتيجة .

بجميع تعبيراتنا لمتوسط القدرة المفقودة في العازل (٧) ، والتعريف الخاص بـ Q (٩) ، والطاقة الكلية (١٠) ، جميعها مقدرة عند التردد الرنان ، نجد Q المنتجة بالعازل عند الرنين ،

$$Q_{d0} = \omega_0 \frac{2\pi \epsilon V_0^2 / \ln(b/a)}{2\pi \sigma V_0^2 / \ln(b/a)}$$

أو

$$Q_{d0} = \frac{\omega_0 \epsilon}{\sigma}$$

التي تعطى أنها مقلوب ظل الفقد ، القيمة التي تأخذها مع مكثف محورى عند ترددات أدنى ، وهذه كثيرة الأهمية .

السعة المكافئة C_e يمكن أن توجد اما من تعبير الطاقة في مكثف ،

$$W_{0, \max} = \frac{1}{2} C_e (2V_0)^2$$

أو Q لدائرة توازن رنانة ،

$$Q_{d0} = \omega_0 C_e R_e$$

أنها

$$(١١) \quad C_e = \frac{\pi l}{\ln(b/a)} \quad (١١)$$

بمعرفه السعة ، نوجد المحاثه من

$$\omega_0^2 = \frac{1}{L_e C_e}$$

أو من Q

$$Q_{d0} = \frac{R_e}{\omega_0 L_e}$$

أنها

$$(١٢) \quad L_e = \frac{4\mu l}{\pi^3} \ln \frac{b}{a} \quad (١٢)$$

لفجوة فيها $b/a = 2.72$ ، أو

$$\epsilon_r = 4 , \sigma / \omega \epsilon = 0.001 , f_0 = 100 \text{ MHz} , a = 1 \text{ cm} , \ln(b/a) \approx 1$$

و $\mu_r = 1$ ، يكون لدينا

$$l = 37.5 \text{ cm}$$

$$Q_{d0} = 1,000$$

$$R_e = 38,100 \Omega$$

$$C_e = 41.7 \text{ pF}$$

$$L_e = 0.0607 \mu\text{H}$$

لذلك يكون عرض النطاق الترددي للفجوة هو $f_0/Q_{d0} = 0.1 \text{ MHz}$. أيضا ، نقص ثابت العازل للمادة التي تملأ الفجوة بـ 0.25 في المائة من 4 الى 3.99 ، سوف يزيد التردد الرنان بـ 0.125 في المائة أو 125 kHz . مثل هذا التغيير يمكن أن يتعرف عليه بسهولة ، وعلى ذلك يمكن استخدام قياس التردد الرنان لعينة في الفجوة للتحكم في جفاف الدقيق ، مثلا .

الآن دعنا نعتبر الفقد في حوائط الفجوة . قيمة H_ϕ عند الاسطوانة الخارجية

$\rho = b$ هي

$$H_{\phi b} = \frac{V_0}{\pi b Z_0} \cos \beta z \cos \omega t$$

إذا كان الموصل تاماً ، سيوجد تيار سطحي

$$K_z = -H_{\phi b} = \frac{-V_0}{\pi b Z_0} \cos \beta z \cos \omega t$$

مع توصيلية محدودة ، هذا التيار الكلى لكل وحدة عرض يوزع خلال طبقة رقيقة بالقرب من السطح . كما رأينا فى الفصل الحادى عشر ، يمكن ايجاد فقد القدرة الكلى بفرض كثافة تيار منتظمة خلال منطقة سمكها عمق سطحي واحد . لذلك تكون كثافة التيار المنتظمة هذه

$$J_z = \frac{K_z}{\delta} = \frac{-V_0}{\pi b \delta Z_0} \cos \beta z \cos \omega t$$

فقد القدرة الأومى فى الاسطوانة الخارجية (ذات التوصيلية σ_c) هو لذلك

$$\begin{aligned} P_b &= \int_{vol} \frac{1}{\sigma_c} J_z^2 dv \\ &= \int_{-l}^0 \frac{1}{\sigma_c} J_z^2 \delta 2\pi b dz \\ &= \frac{V_0^2}{\sigma_c \pi b \delta Z_0^2} \left(l + \frac{\sin 2\beta l}{2\beta} \right) \cos^2 \omega t \end{aligned}$$

لذلك متوسط فقد القدرة عند الرنين هو

$$(١٣) \quad P_{b0,av} = \frac{V_0^2 l}{2\pi \sigma_c b \delta Z_0^2}$$

يعطى حساباً مماثلاً بالنسبة للموصل الداخلى

$$(١٤) \quad P_{a0,av} = \frac{V_0^2 l}{2\pi \sigma_c a \delta Z_0^2}$$

السطح المتبقى الوحيد هو لوح النهاية عند $z = 0$. شدة المجال المغناطيسى عند

$z = 0$ هى

$$H_{\phi} \Big|_{z=0} = \frac{V_0}{\pi \rho Z_0} \cos \omega t$$

مؤدية الى تيار سطحي

$$K_{\rho} = \frac{V_0}{\pi \rho Z_0} \cos \omega t$$

وكثافة تيار لا تعتمد على z في العمق السطحي الأول ،

$$J_p = \frac{K_p}{\delta} = \frac{V_0}{\pi \rho \delta Z_0} \cos \omega t$$

على ذلك يكون فقد القدرة في لوح النهاية

$$\begin{aligned} P_{\text{end}} &= \int_0^b \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sigma_c \pi^2 \rho^2 \delta^2 Z_0^2} \delta \cos^2 \omega t \rho \, d\phi \, d\rho \\ &= \frac{2V_0^2}{\pi \sigma_c \delta Z_0^2} \ln \frac{b}{a} \cos^2 \omega t \end{aligned}$$

ولذلك

$$(١٥) \quad P_{\text{end, o, av}} = \frac{V_0^2}{\pi \sigma_c \delta Z_0^2} \ln \frac{b}{a}$$

بضم (١٣) ، و (١٤) ، و (١٥) يكون فقد القدرة الكلى في الحوائط الموصلة عند الرنين هو

$$P_{\text{av}} = \frac{V_0^2 l}{2\pi \sigma_c \delta Z_0^2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{2}{l} \ln \frac{b}{a} \right)$$

حيث أننا نعرف الطاقة المخزنة الكلية ، يمكننا حساب Q للفجوة الرنانة ذات فقد حائط ، فقط ،

$$Q_{w0} = \frac{(2/\delta) \ln (b/a)}{(1/a) + (1/b) + (2/l) \ln (b/a)}$$

الآن يحصل على عناصر الدائرة المكافئة بسهولة . حيث أن الطاقة المخزنة الكلية لم تتغير فإن Ce لا تتغير . Le يمكن مرة أخرى إيجادها من Ce والتردد الرنان ω_0 ، على ذلك ، فهي أيضا لم تتغير . من ثم فإن Q المتغير تؤثر فقط على المقاومة المكافئة R_e ،

$$(١٦) \quad R_e = \frac{Q_{w0}}{\omega_0 C_e} = \frac{4\eta [\ln (b/a)]^2}{\pi^2 \delta [(1/a) + (1/b) + (2/l) \ln (b/a)]}$$

حيث

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

باستخدام نفس الفجوة كمثال ، دعنا نفرض أنها مطلية بالفضة

$$(\sigma_c = 6.18 \times 10^7 \text{ U/m})$$

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma_c}} = 6.40 \mu m$$

وعلى ذلك

$$Q_{w0} = 2,200$$

بينما

$$R_p = 83,900 \Omega$$

عندما يوجد كلا الفقدين ، يكون فقد القدرة الكلى هو مجموعهما ، وثبتت المقاومة المكافئة أنها تجمع على التوازي للمقاومتين المحصول عليهما باعتبار كل صورة من فقد على انفراد Q للفجوة عند الرنين هي

$$Q_0 = \frac{1}{(1/Q_{d0}) + (1/Q_{w0})}$$

مختمين مثلنا ، Q عند الرنين للفجوة المبطنة بالقضبة المملوءة بمازل ذى فقد هي

$$Q_0 = \frac{1}{1/1,000 + 1/2,200} = 687$$

وتقل المقاومة المكافئة الى $26,200 \Omega$

إذا كانت $V_0 = 1V$ ($|V_{in,r}| = 2V$) ، يكون فقد القدرة الكلى $76.3 \mu W$ يوزع هذا بين أجزاء الفجوة المختلفة كما يلي : العازل $52.4 \mu W$ ، الموصل المركزى ، $16.8 \mu W$ ، الموصل الخارجى ، $6.2 \mu W$ ، ولوح النهاية ، $0.9 \mu W$.

باستخدام قيم العناصر للدائرة المكافئة ، يمكن تعيين معاوقة المدخل للفجوة المحورية عند ترددات بالقرب من الرنين . هذه مسألة دوائر نموذجية ، وسوف لانحاول استنتاج أو استخدام هذه الصيغ . مع ذلك ، إنه جدير بالاهتمام أن نسال على أى بعد من الرنين ينطبق التكافؤ . يجب إبقاء حقيقتين فى الذاكرة . أولاً ، ستظهر الفجوة المحورية رنيناً توالياً عندما يكون طولها نصف طول الموجة ، أو عند $200 MHz$ ، الدائرة المكافئة لاتعطى رنيناً آخر . ثانياً ، بارامترات الفجوة ، مثل موصلية وسماحية العازل ، تتغير مع التردد ، بينما لم يعمل تزويد يتعلق بهذه الظاهرة فى الدائرة المكافئة .

هذه الخصائص المختلفة تسبب أن التناظر بين الدائرة والفجوة يصبح مقصوراً على مدى تردد ربما 20 فى المائة من التردد الرنان ، حيث أن اهتمامنا فى تصرف الفجوة يحتمل أن يكون مقصوراً على نطاق تردد ضيق بالقرب من الرنين ، وهو واحد يحتوى كل النطاقات الجانبية ذات اتساع محسوس لاشارة معدلة ، مثلاً ، فإن دائرتنا المكافئة تثبت أنها مفيدة جداً .

ت ١٣ - ٢ : لكل من التعديلات الآتية للفجوة الرنانة المستخدمة كمثال في هذا القسم ، اعط التردد الرنان الجديد : (أ) l تنقص من 37.5cm الى 30cm (ب) ϵ_R تنقص من 4 الى 3 ، (ج) μ_R تزيد من 1 الى 1.2 ، (د) a تنقص من 1cm الى 0.8cm .

الاجابة : 100MHz , 91.3MHz , 115.5MHz , 125MHz .

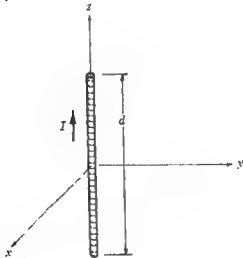
ت ١٣ - ٣ : الفجوة الرنانة ذات ربع طول الموجة المبينة في شكل ١٣ - ٢ لها قيم البارامترات الآتية :

$l = 30\text{cm}$, $b = 5\text{cm}$, $a = 2\text{cm}$, $\sigma = 2 \times 10^{-5}\text{U/m}$, $\epsilon_R = 2.225$, $\mu_R = 1$, $m\sigma_c = 5 \times 10^7\text{U/m}$. إذا كان اتساع الفولتية عبر المدخل الى الفجوة هو 20V عند $\omega = \omega_0$ ، حدد متوسط فقد القدرة في : (أ) العازل ؛ (ب) الموصل المركزي ؛ (ج) الموصل الخارجى ؛ (د) لوح النهاية .

الاجابة : 0.08mW , 0.26mW , 0.64mW , 4.11mW .

٣ - ١٣ : الاشعاع

في هذا المثال الأخير لتطبيق معادلات ماكسويل سنوجد المجال الكهرومغناطيسى الذى ينتج من توزيع معطى لتيار . لذلك ، سيكون لدينا للمرة الأولى المجال المعين الذى ينتج من منبع معين متغير مع الزمن . فى مناقشة الموجة المستوية المنتظمة استقصيت فقط الحركة الموجية فى فضاء حر ، ولم يعتبر منبع المجال . توزيع التيار فى موصل كان مسألة مماثلة ، رغم أننا قمنا على الأقل بربط التيار بشدة مجال كهربي مفترض عند سطح الموصل . هذا يمكن أن يعتبر كمنبع ، ولكنه ليس عمليا جدا لكونه لانهايا فى الامتداد .



شكل ١٣ - ٤ : تتيمة تيار
تفاضلية طولها d تحمل
تيارا $I = I_0 \cos \omega t$

نفرض الآن فتيلة تيار على أنها المنبع . وهي مأخوذة كطول تفاضلى ، ولكننا سيمكننا مد النتائج بسهولة لفتيلة قصيرة بالنسبة لطول موجة ، بالتحديد أقل من ربع طول موجة تقريبا ككل . الفتيلة التفاضلية مبنية عند نقطة الأصل وموجهة فى اتجاه المحور z فى شكل ١٣ - ٤ . الاتجاه الموجب للتيار مأخوذ فى اتجاه z . نفرض تيارا منتظما $I_0 \cos \omega t$ فى هذا الطول القصير d ولا نشغل أنفسنا حاليا بعدم الاتصال الظاهرى عند كل طرف .

وسوف لانحاول حالياً اكتشاف « منبع المنبع » ، ولكننا فقط سنفرض أن توزيع التيار لا يمكن تغييره بأى مجال ينتجه .

الخطوة الأولى هى تطبيق تعبير الجهد المغناطيسى المتجه المؤخر ، قسم

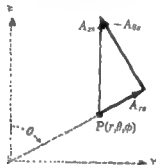
٥ - ١٠ ،

$$A = \int \frac{\mu[I] dL}{4\pi R}$$

حيث $[I]$ دالة فى الزمن المؤخر $t - R/v$. حيث أنه لا يحتاج الى تكامل بالنسبة للفتيلة القصيرة جدا المفترضة ، يكون لدينا

$$A = \frac{\mu[I]d}{4\pi R} z$$

توجد فقط المركبة فى اتجاه z لـ A ، لأن التيار يكون فقط فى اتجاه z . عند أى نقطة P ، على مسافة R من نقطة الأصل ، يؤخر التيار بـ R/v و



شكل ١٣ - ٥ : تحليل المركبتين الكرويتين A_{θ} و A_{ϕ} . الرسم التخطيطى مرسوم اختياريًا فى المستوى $\phi = 90^\circ$.

$$I = I_0 \cos \omega t$$

تصبح

$$[I] = I_0 \cos \left[\omega \left(t - \frac{R}{v} \right) \right]$$

$$[I_s] = I_0 e^{-j\omega R/v}$$

على ذلك

$$A_{zz} = \frac{\mu I_0 d}{4\pi R} e^{-j\omega R/c}$$

باستخدام نظامى إحداثى مختلط مؤقتا ، دعنا نستبدل R بـ r الصغيرة فى نظام الاحداثيات الكروى ثم نحدد أى المركبات الكروية تمثل بـ A_{zz} . شكل ١٣ - ٥

يساعدنا فى تحديد أن

$$A_{rs} = A_{zz} \cos \theta$$

$$A_{\theta s} = -A_{zz} \sin \theta$$

ولذلك

$$A_{rs} = \frac{\mu I_0 d}{4\pi r} \cos \theta e^{-j\omega r/c}$$

$$A_{\theta s} = -\frac{\mu I_0 d}{4\pi r} \sin \theta e^{-j\omega r/c}$$

من هاتين المركبتين للجهد المغناطيسى المتجه عند P ، يمكننا إيجاد B_s أو H_s من تعريف A_s ،

$$B_s = \mu H_s = \nabla \times A_s$$

بمجرد أخذ المشتقات الجزئية الميئة . هكذا

$$H_{\phi s} = \frac{1}{\mu r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_{\theta s}) - \frac{1}{\mu r} \frac{\partial A_{rs}}{\partial \theta}$$

$$H_{rs} = H_{\theta s} = 0$$

و

$$H_{\phi s} = \frac{I_0 d}{4\pi} \sin \theta e^{-j\omega r/c} \left(j \frac{\omega}{vr} + \frac{1}{r^2} \right)$$

مركبات المجال الكهربى التى يجب أن تقترن بهذا المجال المغناطيسى توجد من الصورة النقطية لقانون أمبير الدائرى عندما تطبق على منطقة يغيب فيها تيار التوصيل والحمل ،

$$\nabla \times H = \frac{\partial D}{\partial t}$$

أو فى التلوين المركب ،

$$\nabla \times H_s = j\omega \epsilon E_s$$

فك الالتواء في احداثيات كروية يؤدي الى

$$E_{rs} = \frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} (H_{\phi s} \sin \theta)$$

$$E_{\theta s} = \frac{1}{j\omega\epsilon} \left(-\frac{1}{r} \right) \frac{\partial}{\partial r} (r H_{\phi s})$$

أو

$$E_{rs} = \frac{I_0 d}{2\pi} \cos \theta e^{-j\omega r/v} \left(\frac{1}{\epsilon v r^3} + \frac{1}{j\omega \epsilon r^3} \right)$$

$$E_{\theta s} = \frac{I_0 d}{4\pi} \sin \theta e^{-j\omega r/v} \left(\frac{j\epsilon \omega}{\epsilon v^3 r} + \frac{1}{\epsilon v r^3} + \frac{1}{j\omega \epsilon r^3} \right)$$

لكي نبسط شرح الحدود المحتواة في الأقواس آنفاً ، نعمل التعويضات
متجة $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$ و $v = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$, $f\lambda = v$, $\omega = 2\pi f$

$$(17) \quad H_{\phi s} = \frac{I_0 d}{4\pi} \sin \theta e^{-j2\pi r/\lambda} \left(j \frac{2\pi}{\lambda r} + \frac{1}{r^2} \right)$$

$$(18) \quad E_{rs} = \frac{I_0 d \eta}{2\pi} \cos \theta e^{-j2\pi r/\lambda} \left(\frac{1}{r^3} + \frac{\lambda}{j2\pi r^3} \right)$$

$$(19) \quad E_{\theta s} = \frac{I_0 d \eta}{4\pi} \sin \theta e^{-j2\pi r/\lambda} \left(j \frac{2\pi}{\lambda r} + \frac{1}{r^3} + \frac{\lambda}{j2\pi r^3} \right)$$

هذه المعادلات الثلاث تبين أن السبب في أن مسائل عديدة جداً تشمل هوائيات
تحل بطرق تجريبية أفضل منها بطرق نظرية . لقد نتجت عن ثلاث خطوات عامة :
تكاميل (ناهه لانموزجى) وتفاضلان . هذه الخطوات كافية أن تجعل عنصر التيار البسيط
وتعبير تياره البسيط أن « ينفجر » الى المجال المعقد ، الموصف بـ (17) الى (19) .
بالرغم من هذا التعقيد يمكن الحصول على عدة ملاحظات هامة .

يمكننا ملاحظة : أولاً العامل $e^{-j2\pi r/\lambda}$ الظاهر مع كل مركبة . هذا يبين انتشاراً
للخارج من نقطة الأصل في اتجاه r الموجب بطول موجة λ وسرعة $v = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$ نستخدم
المصطلح « طول موجة » الآن بمعنى أوسع الى حد ما عن التعريف الأصلي ، الذى يرمز
لطول الموجة ، لموجة مستوية منتظمة بالمسافة بين نقطتين ، مقاسة في اتجاه الانتشار ،
التيين عندهما يكون للموجة قيم لحظية متطابقة . هنا يوجد تعقيدات إضافية ناشئة عن

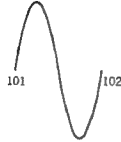
الحدود المحتواة فى الأقواس ، التى هى دوال مركبة فى r . هذه التغيرات يجب أن تهمل الآن فى تحديد طول الموجة . هذا مكافئ لتحديد طول الموجة عند مسافة كبيرة من نقطة الأصل ، ويمكننا توضيح هذا برسم المركبة H_ϕ تخطيطياً كدالة فى r تحت الشروط الآتية :

$$I_0 d = 4\pi \quad \theta = 90^\circ \quad t = 0 \quad f = 300 \text{ MHz}$$

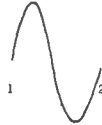
$$t = 3 \times 10^8 \text{ m/s (free space)} \quad \lambda = 1 \text{ m}$$

لذلك

$$H_{\phi s} = \left(j \frac{2\pi}{r} + \frac{1}{r^2} \right) e^{-j2\pi r}$$



(ب)



(ا)

شكل ١٣ - ٦ : الاتساع اللحظى لـ H_ϕ فى الحالة الخاصة المتصر تيار له $I_0 d = 4\pi$.
و $\lambda = 1$ مرسوم عند $\theta = 90^\circ$ و $t = 0$ فى المنطقة $2 \leq r \leq 1$ بالقرب من الهوائى ، و
(ب) فى المنطقة $102 \leq r \leq 101$ بعيداً عن الهوائى . المنحنى الأيمن غير جيبى بقدر ملحوظ .

والجزء الحقيقى يمكن تعيينه عند $t = 0$ ،

$$H_\phi = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{r} \right)^2 + \frac{1}{r^4}} \cos(\tan^{-1} 2\pi r - 2\pi r)$$

بمعرفه أن $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ ، وأن

$$\cos(\tan^{-1} x) = 1/\sqrt{1+x^2}$$

$$H_\phi = \frac{1}{r^2} (\cos 2\pi r + 2\pi r \sin 2\pi r)$$

القيم المحصول عليها من هذه المعادلة الأخيرة مرسومة ضد r في المدى $2 \leq r \leq 1$ في شكل ١٣ - ١٦ ، المنحنى غير جيبي بقدر ملحوظ . عند $r=1$ ، $H_{\phi} = 1$ ، بينما عند $r=2$ ، أكبر بطول موجة ، $H_{\phi} = 0.25$. علاوة على ذلك ، يقطع المنحنى المحور (بميل موجب) عند $r = 1 - 0.0258$ و $r = 2 - 0.0127$ ، مرة أخرى على مسافة لاتساوى طول موجة . إذا عمل رسم تخطيطى مشابه في المدى : $102 \leq r \leq 10$ مبين في شكل ١٣ - ١٦ على مقياس رسم مختلف الاتساع ، يحصل على موجة جيبيه أساسا والقيم اللحظية لـ H_{ϕ} عند $r = 101$ و $r = 102$ هي : 0.0000998 و 0.0000996 . الاتساعات العظمى للأجزاء الموجبة والسالبة لشكل الموجة تختلف بأقل من واحد في المائة ، ويمكننا القول أنه لكل الأغراض العملية تكون الموجة في هذه المنطقة موجة مستوية منتظمة ذات تغير جيبي مع المسافة (والزمن ، بالطبع) وطول موجة محدد تماما . واضح ان هذه الموجة تحمل طاقة بعيدا عن الهوائى التفاضلى ، وسنحسب هذه القدرة بعد قليل .

باستمرار استقصاء (١٧) الى (١٩) ، دعنا الآن نلقى نظرة اهتمام أكثر على التعبيرات المحتوية على حدود متغيرة بالصورة $1/r^3$ ، $1/r^2$ ، و $1/r$ عند نقط قريبة جدا من عنصر التيار يجب أن يكون الحد $1/r^3$ هو الغالب .

في المثال العددي الذى قد استخدمناه ، القيم النسبية للحدود في $1/r^3$ ، $1/r^2$ و $1/r$ في تعبير E_{θ} هي حوالى 16 ، 250 ، و 1 بالترتيب ، عندما تكون r هي 1 cm . تغير مجال كهربي بصورة $1/r^3$ يجب أن يذكرنا بالمجال الكهروستاتيكي لثنائي القطب (الفصل الرابع . هذا الحد يمثل طاقة مخزنة في مجال مفاعل (سعوى) ، ولا يساهم في القدرة المشعة . حد التربيع العكسي في تعبير H_{ϕ} هو بالمثل هام فقط في المنطقة القريبة جدا من عنصر التيار ويقابل المجال العنصر لعنصر التيار المستمر المعطى بقانون بيو - سافار . عند مسافات تقابل عشرة اطوال الموجة أو أكثر من عنصر التيار المتذبذب ، كل الحدود عدا حد مقلوب المسافة ($1/r$) يمكن أن تهمل والمجالات البعيدة أو مجالات الاشعاع تصبح .

$$E_{rs} = 0$$

$$(٢٠) \quad E_{\theta s} = j \frac{I_0 d \eta}{2 \lambda r} \sin \theta e^{-j 2 \pi r / \lambda}$$

$$(٢١) \quad H_{\phi s} = j \frac{I_0 d}{2 \lambda r} \sin \theta e^{-j 2 \pi r / \lambda}$$

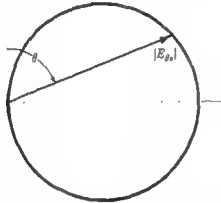
أو

$$E_{\theta s} = \eta H_{\phi s}$$

على ذلك يرى أن العلاقة بين $E_{\theta s}$ و $H_{\phi s}$ هي تلك بين المجالين الكهربى والمغناطيسى للموجة المستوية المنتظمة ، على ذلك تؤكد النتيجة التى وصلنا اليها عند استقصاء طول الموجة .

تغير كلا مجالى الاشعاع مع الزاوية القطبية θ هو نفسه ؛ المجالات لها قيم عظمى فى المستوى الاستوائى لعنصر التيار وتتعلم على طول أى من امتدادى العنصر التغير مع الزاوية يمكن أن يبين برسم نمط رأسى (يفرض توجيه رأسى لعنصر التيار) الذى فيه يرسم المقدار النسبى لـ $E_{\theta s}$ مع θ مع ثبات r . عادة يبين النمط على إحداثيات قطبية ، كما فى شكل ١٣ - ٧ . يمكن أيضا رسم نمط أفقى لنظم هوائيات أكثر تعقيدا وتبين تغير شدة المجال مع ϕ . النمط الأفقى لعنصر التيار هو دائرة مركزية عند نقطة الأصل حيث أن المجال ليس دالة فى زاوية السم .

لكى نحصل على تعبير كمى . للقوة المشعة ، نحتاج تطبيق متجه بوينتج $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ المستخلص فى قسم ١١ - ٤ .



شكل ١٣ - ٧ الرسم القطبى للنمط الرأسى لعنصر تيار رأسى . اتساع القمة لـ $E_{\theta s}$ مرسوم كدالة للزاوية القطبية عند مسافة r ثابتة . المحل الهندسى هو دائرة .

التعبيرات اللحظية لمركبتى الاشعاع الخاصتين بشدتى المجال الكهربى والمغناطيسى هي

$$E_{\theta} = \eta H_{\phi}$$

$$H_{\phi} = -\frac{I_0 d}{2\lambda r} \sin \theta \sin \left(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda} \right)$$

وعلى ذلك

$$\mathcal{P}_r = E_\theta H_\phi = \left(\frac{I_0 d}{2\lambda r} \right)^2 \eta \sin^2 \theta \sin^2 \left(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda} \right)$$

إذن القدرة الكلية (فى الفراغ) اللحظية (فى الزمن) العابرة لسطح كرة نصف قطرها r_0 هى

$$P = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \mathcal{P}_r r_0^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

$$= \left(\frac{I_0 d}{\lambda} \right)^2 \eta \frac{2\pi}{3} \sin^2 \left(\omega t - \frac{2\pi r_0}{\lambda} \right)$$

والموسط الزمنى للقدرة يعطى بنصف الاتساع الأقصى ،

$$P_{av} = \left(\frac{I_0 d}{\lambda} \right)^2 \eta \frac{\pi}{3} = 40\pi^2 \left(\frac{I_0 d}{\lambda} \right)^2$$

حيث $\eta = 120\pi \Omega$ فى فضاء حر .

هذه هى نفس القدرة كتلك التى ستبدل فى مقاومة R_{rad} بالتيار I_0 فى غياب أى

اشعاع ، حيث

$$P_{av} = \frac{1}{2} I_0^2 R_{rad}$$

$$(٢٢) \quad R_{rad} = \frac{2P_{av}}{I_0^2} = 80\pi^2 \left(\frac{d}{\lambda} \right)^2$$

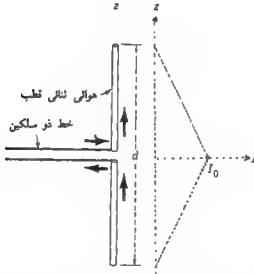
إذا فرضنا الطول التفاضلى 0.01λ ، حيثئذ تكون R_{rad} هى 0.08Ω هذه المقاومة الصغيرة ربما تكون مقارنة بالمقاومة الأومية لهوائى عملى ، وعلى ذلك قد تكون كفاءة الهوائى صغيرة بدرجة غير مرضية . أيضا مواعة فعالة مع المنبع تصبح صعبة التحقيق جدا ، لأن مفاعلة الدخلى لهوائى قصير أكبر كثيرا فى المقدار عن مقاومة المدخلى R_{rad} . هذا هو أساس التصريح بأن هوائيا فعالا يجب أن يكون طوله جزءا ملموسا من طول موجة .

توزيع التيار الفعلى على هوائى خطى رفيع هو تقريبا جدا جيبي ، حتى بالنسبة لهوائيات قد تكون طولها عدة أطوال موجية . لاحظ أنه إذا طوى موصلا خط نقل ذى سلكين مفتوح الدائرة الى الخلف بـ 90° ، يكون توزيع الموجة الواقعة على الخط هى نفسها مثل التوزيع المفروض على الهوائى . التيار صفر عند كلا النهايتين وقيمة عظمى على بعد ربع طول موجة من كلا النهايتين ، ويستمر التيار فى التغيير بهذه الطريقة فى

اتجاه المركز . التيار عند المركز ، لذلك ، سيكون صغيرا جدا بالنسبة لهوائى طوله عدد صحيح من أطوال الموجة ، ولكنه يساوى القيمة العظمى الموجودة عند أى نقطة على الهوائى إذا كان طول الهوائى $\lambda/2$ ، $3\lambda/2$ ، $5\lambda/2$. . الخ .

حيثذ على هوائى قصير نرى فقط الجزء الأول من موجة الجيب ، اتساع التيار يكون صفرا عند كلا النهايتين وتزيد تقريبا بطريقة خطية الى قيمة عظمى I_0 عند المركز . هذا مقترح فى الرسم التخطيطى فى شكل ١٣ - ٨ . لاحظ أن هذا الهوائى له تيارات متطابقة فى النصفين ويمكن أن تغذى بيسر بخط ذى سلكين ، حيث يكون التياران فى الموصلين متساويى الاتساع ولكن متضادى الاتجاه . الثغرة عند نقطة التغذية صغيرة ولها تأثيرات مهمة يسمى هوائى مماثل من هذا النوع ثنائى قطب . تغير التيار الخطى مع المسافة هو فرض معقول لهوائيات ذات طول كلى أقل من ربع طول موجة تقريبا .

من الممكن مد تحليل عنصر التيار التفاضلى الى ثنائى القطب القصير إذا فرضنا ان الطول قصير بالقدر الكافى بحيث يمكن اهمال تأثيرات التأخير . أى أننا نعتبر الاشارتين اللتين تصلان عند أى نقطة مجال P من نهايتى الهوائى تكونان فى نفس الطور .



شكل ١٣ - ٨ هوائى قصير ($d < \lambda/4$) له توزيع خطى للتيار ويمكن أن يغذى بخط ذى سلكين .

التيار المتوسط على طول الهوائى هو $I_0/2$ ، حيث I_0 هو تيار مدخل عند طرفى المركز . على ذلك ، شدتنا المجال الكهربى والمغناطيسى ستكونا نصفى القيمتين المعطيتين فى (٢٠) و (٢١) ، وليس هناك تغيرات فى الانماط الرأسية والأفقية . القدرة ستكون ربع قيمتها السابقة ، وعلى ذلك ستكون مقاومة الاشعاع ايضا ربع القيمة المعطاة بـ (٢٢) .

إذا حاولنا تحسين نتائجنا بفرض تغير جيبي لاتساع التيار مع المسافة على طول الهوائي ، وإذا ضمنت تأثيرات التأخير في التحليل ، فحينئذ تصبح التكاملات المطلوبة لاجداد A والقدرة المشعة أكثر صعوبة بشكل هائل حيث أننا نريد أن نسرّع نحو الصفحة الأخيرة ، دعنا فقط ندون أنه بالنسبة للهوائى الأكثر شيوعا فى العالم ، ثنائى القطب النصف موجى ($d = \lambda/2$) ، يحصل فى آخر الأمر على النتائج الآتية :

$$(٧٣) \quad E_{\theta s} = \frac{I_0 \eta \cos \left[\left(\frac{\pi}{2} \right) \cos \theta \right]}{2\pi r \sin \theta}$$

$$(٧٤) \quad H_{\phi s} = \frac{E_{\theta s}}{\eta}$$

$$(٧٥) \quad R_{rad} = 30 \left[\frac{(2\pi)^2}{2 \cdot 2!} - \frac{(2\pi)^4}{4 \cdot 4!} + \frac{(2\pi)^6}{6 \cdot 6!} - \frac{(2\pi)^8}{8 \cdot 8!} + \dots \right] = 73.1 \Omega$$

دعنا نقارن هذه القيمة الدقيقة مع نتائج محصول عليها بوسائل تقريبية أكثر . افترض أننا حاولنا أولاً أن نجد مقاومة الاشعاع بفرض توزيع تيار منتظم وإهمال تأثيرات التأخير . النتيجة يحصل عليها من (٧٧) ب $d/\lambda = 1/2$ ، $R_{rad} = 20\pi^2 = 197.45\Omega$ ، ولكننا أيضاً قد فرضنا تياراً أعلى بكثير على الهوائى عما هو موجود بالفعل .

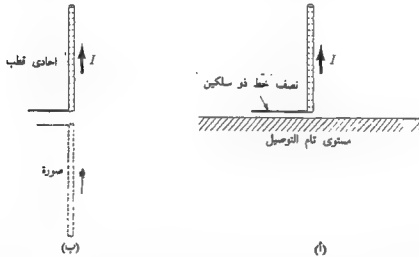
يمكن تحسين النتيجة باعتبار توزيع خطى للتيار بينما ما نزال نتجاهل التأخير . التيار المتوسط هو نصف القيمة العظمى ، القدرة تكون ربع واحد ، وتنقص مقاومة الاشعاع الى $5\pi^2$ أو 49.3Ω الآن تكون النتيجة صغيرة كثيراً ، أساساً لأن القيمة المتوسطة لموجة مثلثية أقل من القيمة المتوسطة لموجة جيبيه .

أخيراً ، إذا فرضنا توزيع تيار جيبي ، يكون لدينا قيمة متوسطة $2/\pi$ مضروبة فى القيمة العظمى ، وتصل مقاومة الاشعاع الى $(2/\pi)^2 (20\pi^2)$ أو 80Ω . هذه قريبة بقدر معقول من القيمة الحقيقية ، والاختلاف يكمن فى إهمال التأخير . فى هوائى خطى ، تأثير التأخير يكون دائماً تأثير حذف ، ولذلك فاعتباره يجب أن يؤدى دائماً الى قيم أصغر لمقاومة الاشعاع . هذا النقص ذو مقدار صغير نسبياً هنا (من 80 الى 73.1Ω) لأن عناصر التيار المتجه الى أن تلتشى بعضها البعض هى تلك عند نهايتى ثنائى القطب ، وهذه ذات اتساع صغير ، علاوة على ذلك ، يكون التلاشى أعظم فى اتجاه طول محور الهوائى حيث كل مجالات الاشعاع أصغار بالنسبة لهوائى خطى .

هوائيات مألوفة والتي تقع ضمن تصنيف ثنائى القطب هى العناصر المستخدمة فى هوائيات استقبال الـ TV و FM الشائعة .

كمثال أخير على هوائى عملى ، دعنا نجمع قليلا من الحقائق عن الهوائى أحادى القطب هذا نصف ثنائى قطب بالإضافة الى مستوى تام التوصيل ، كما هو مبين فى شكل ١٣ - ٩ . مبدأ الصور المناقش فى قسم ٥ - ٥ يعطى الصورة المبينة فى شكل ١٣ - ٩ ب ويؤكد لنا أن المجالات فوق المستوى هى نفسها بالنسبة لأحادى القطب وثنائى القطب . لهذا ، فالتعبيران (٢٠) و (٢١) صحيحان بحد سواء بالنسبة لأحادى القطب . لذلك يكون متجه بوينتج أيضا نفسه فوق المستوى ، ولكن التكامل لايجاد القدرة الكلية المشعة يمتد خلال نصف الحجم فقط . على ذلك تكون القدرة المشعة ومقاومة الاشعاع بالنسبة لأحادى القطب نصف القيم المقابلة بالنسبة لثنائى القطب . كمثال ، احادى قطب بتوزيع تيار منتظم مفترض يكون له $R_{rad} = 40\pi^2 (d/\lambda)^2$ ، تيار مثلى يؤدى الى $R_{rad} = 10\pi^2 (d/\lambda)^2$ وتوزيع التيار الجيبى لأحادى قطب طوله $\lambda/4$ يؤدى الى : $R_{rad} = 36.5$.

يمكن أن نغذى هوائيات أحادية القطب بواسطة كابل محورى تحت المستوى ، وموصله المركزى موصل بالهوائى خلال فتحة صغيرة ، وموصله الخارجى موصل بالمستوى . اذا كانت المنطقة تحت المستوى لايمكن الوصول اليها أو غير ملائمة ، يمكن وضع الكبل المحورى فوق المستوى وموصله الخارجى موصل به .



شكل ١٣ - ٩ : (أ) هوائى احادى القطب المثالى يرتفع دائما بمستوى تام التوصيل . (ب) احادى القطب بالإضافة الى صورته يكونان ثنائى قطب .

أمثلة على هذا النوع من الهوائيات تشمل أبراج إذاعة AM وهوائيات CB .
ت ١٣ - ٤ : بالنسبة لهوائى قصير مع توزيع تيار منتظم فى الهواء ، د $I_{0d} = 0.3A.m$
٤٩٥

و $\lambda = 10\text{cm}$ ، وأوجد عند نقطة ($\theta = 90^\circ$ ، $\phi = 0^\circ$) اتساع P الحد $1/r$ (أ) الحد $1/r^2$ (ب) الحد $1/r^3$ (ج) الحد $E_{\theta\phi}$ (د) الحد $H_{\phi\theta}$.
 الإجابة : 143V/m ، 900V/m ، $5,660\text{V/m}$.

ت ١٣ - هوائي ثنائي قطب قصير بـ $d = 4\text{m}$ ، $\lambda = 100\text{m}$ ، و $I_0 = 40\text{A}$ ومع اتساع تيار متزايد خطياً على طول الهوائي ، يعمل في الهواء . إذا أعطيت نقطة بعيدة ($\theta = 75^\circ$ ، $\phi = 55^\circ$) ، $P(5\text{km})$ ، حدد : (أ) $E_{\theta\phi}$ عند P ، (ب) $H_{\phi\theta}$ عند P ، (ج) متوسط القدرة المشعة الكلية .
 الإجابة : 253W ، $j77.3\mu\text{A/m}$ ، $j29.1\text{mV/m}$.

مراجع مقترحة

1 - American Radio Relay League: "The A.R.R.L. Antenna Book", The American Radio Relay League, Inc., Newington, Conn., 1970.

هذا المنشور يحتوى على ثروة من معلومات عملية ووصفية عن الهوائيات وخطوط النقل وهو أيضا يكلف قليلا جدا .

(انظر المراجع المقترحة للفصل الثامن) :

2 - Jordan, E.C., and K.G. Balmain

كل من المواضيع المغطاة في هذا الفصل نوقش بعمق .

3 - Marcuvitz, N.: "Waveguide Handbook". M.I.T. Radiation Laboratory Series, vol. 10, McGraw-Hill Book Company, New York, 1951.

هذا المرجع القياسى عن خطوط النقل ، أدلة الموجات ، والفجوات الرنانة يعطى كلا النظرية وبيانات عديدة .

(انظر المراجع المقترحة للفصل السادس) :

4 - Ramo, S., J. R. Whinnery, and T. Van Duzer :

كل من المواضيع المناقشة في هذا الفصل معالج بتفصيل أكثر .

5 - Weeks, W.L.: "Antenna Engineering", McGraw-Hill Book Company, New York, 1968.

هذا المرجع الممتاز ربما يحتوي على الهوائيات أكثر مما تريد معرفته .

مسائل :

١ - جزء من كابل محوري 50Ω عديم الفقد طوله 40cm . يستخدم عازل له $\epsilon_R = 3$ و $\mu_R = 1$. الكابل مقصر الدائرة عند إحدى النهايات ويستخدم كمحاثة فعالة . (أ) احسب L_{eq} عند f تساوي 10^6 , 10^8 و 10^{10} Hz (ب) ارسم L_{eq} ضد f ؟ $0 \leq f \leq 108\text{MHz}$.

٢ - ملف لولبي ذو طبقة واحدة ملفوف على قلب اسطواني ذو قطر خارجي 6mm وطول 3.2cm . السلك النحاسي المستخدم ذو نصف قطر 0.4mm ، شاملا 0.02mm من العزل . (أ) كم طول قطعة من سلك مطلوبة لإنشاء ملف لولبي محزوم بإحكام ذو طبقة واحدة ، (ب) عند أي تردد يساوي هذا الطول 0.1λ في هواء ؟ (ج) ما هي محاثة التردد المنخفض لهذا الملف اللولبي ؟ (د) ما هي مقاومة التوالي التي يجب أن تضمن مع نموذج التردد المنخفض ؟

٣ - المحاثة الخارجية لقطعة مستقيمة من سلك غير مغناطيسي ذي نصف قطر a وطول d في هواء معطلة في Jordan and Balmain^(١) بالصورة :

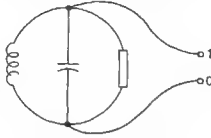
$$L_{ext} = (\mu_0 d / 2\pi) \ln(3 \times 10^9 / \omega a)$$

العالية . إذا كان لمكثف 10pF أطراف طول كل منها 5cm ومصنوعة من سلك صغبر القطر نسبيا ،

٤ - $a = 10^{-4}\text{m}$ ، كم سيكون تردد التوالي الرنان لتجمع $C - L_{ext}$ ؟
 ٤ - مكثف دائرة مكاملة يستخدم الكتروليد الوينيوم له مساحة $1\text{mm} \times 1\text{mm}$ ، طبقة عازل ثاني أكسيد السيليكون سمكها $0.1\mu\text{m}$ ، وقاعدة سيليكون تعمل بصفتها الالكتروليد الثاني . إذا كان SiO_2 له ثابت عازل ذو 3.8 وموصلية $2 \times 10^{-6} / \text{m}$ عند 100MHz ، احسب : (أ) C (ب) المقاومة على التوازي مع C عند : 100 MHz (ج) النسبة Q للمقاومة إلى المفاعلة للمكثف عند 100MHz .
 ٥ - طول 2m من كابل محوري ذو 50Ω مفتوح الدائرة عند إحدى النهايتين بينما النهاية الأخرى موصلة بقطرة مسامحة تعمل عند 1KHz . يبين الجهاز سعة مقدارها 160pF مع ظل فقد مقداره 4.5×10^{-4} (أ) حدد ϵ_R و σ للمعازل عند 1KHz ، (ب) ما هي سعة المدخل التي سوف تقاس عند 10MHz ، بفرض أن الفقد يمكن أن يهمل ؟

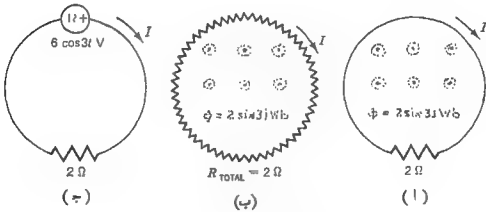
(١) انظر المراجع المقترحه للفصل الثامن.

٦ - دائرة RLC متصلة على التوازي محاطة بسطح مغلق ، كما يوحى به شكل ١٣ - ١٠ . طبق نظرية بويتنيج ، معادلة (٣٨) فى قسم ١١ - ٤ ، على السطح المغلق وبين أنها تؤدي الى نتيجة نظرية الدوائر أن القدرة اللحظية التى تمتد بواسطة المولد بين نقطتي 0 و 1 تساوى مجموع القدرات المعطاة لعناصر الدوائر الثلاثة .



شكل ١٣ - ١٠ : انظر مسألة ٦ .

٧ - ثلاثة مسارات موصلة مبنية فى شكل ١٣ - ١١ . مجالات مغناطيسية خارجية مسلطة فى أ و ب تحقق تدفقات كلية مقدارها $2\sin 3t \text{ Wb}$ داخل العروتين . لا يوجد مجال مغناطيسى خارجى مسلط فى جـ . تحتوى العروة (أ) على مقاومة 2Ω مجمعة ، والعروة (ب) لها مقاومة كلية مقدارها 2Ω موزعة بانتظام والعروة (جـ) تحتوى على مقاومة 2Ω مجمعة ومنبع فولتية تيار متردد $6\cos 3t \text{ V(ac)}$ جميع أسلاك التوصيل تامة التوصيل . (أ) احسب I لكل عروة ، مهملاً أى تدفق قد ينتج عن I نفسها . (ب) احسب قيمة التكامل الخطى المغلق فى عكس اتجاه دوران عقرب الساعة لشدة المجال الكهربى حول كل عروة ، معطياً النتيجة الكلية والمساهمة من كل جزء من المسار .



شكل ١٣ - ١١ : انظر مسألة ٧ .

٨ - الأسطح x تساوى 0 ، 10cm ، y تساوى 0 ، 10cm ، z تساوى 0 ، 10cm جميعها موصلات معدنية لها $\sigma_c = \infty$. داخل هذا الحيز المكعبى هواء ، ويحتوى المجال الكهربى

$$E = 1,000 \sin 10\pi x \sin 10\pi y \cos 3\sqrt{2} \pi 10^9 t \text{ a}_z \text{ V/m}$$

(أ) أوجد H . (ب) احسب H_y عند السطح $x = 0$. (ج) احسب K_z عند هذا السطح . (د) اذا كانت $\sigma_c = 5 \times 10^7 \text{ V/m}$ ، ماهى قدرة الفقد المتوسطة فى المساحة المربعة ، $x = 0$ ، $0 < y < 10\text{cm}$ ، $0 < z < 10\text{cm}$ ؟

$$9 - \text{المجال } E_z = 1,000 \sin 10\pi x \sin 10\pi y \cos 15 \times 10^8 \pi t \text{ V/m}$$

موجود فى المنطقة $0 < x < 0.1\text{m}$ ، $0 < y < 0.1\text{m}$ ، $0 < z < 0.1\text{m}$ ، اذا كان للوسط المتجانس $\epsilon_R = 2$ ، $\mu_R = 1$ ، $\sigma = 5 \times 10^{-6} \text{ V/m}$ عند هذا التردد ، ما المقدرة المتوسطة التى تفقد فى العازل ؟

١٠ - فجوة محورية لها الأبعاد $a = 0.8\text{cm}$ ، $b = 4\text{cm}$ ، $l = 12\text{cm}$ الداخل مفرغ . حدد التردد الرنان اذا كانت : (أ) احدى النهايتين مفتوحة الدائرة والأخرى مقصورة الدائرة ، (ب) كلا النهايتين مقصورتى الدائرة ، (ج) كانت احدى النهايتين مفتوحة واحدى النهايتين مقصر الدائرة ، وربع الطول (أى النهايتين تفضل) مملوء تماماً بعازل له $\epsilon_R = 9$ ، $\mu_R = 1$ ، $\sigma = 0$.

١١ - للفجوة الربيع موجبة المبينة فى شكل ١٣ - ٢ ،

دع $\epsilon_R = 6.25$ ، $\mu_R = 1$ ، $l = 15\text{cm}$ ، $b = 4\text{cm}$ ، $a = 0.8\text{cm}$.
(أ) احسب C_e و L_e . احسب Q_0 و R_e اذا كانت : (ب) $\sigma = 10^{-4} \text{ V/m}$ و $\sigma_c = \infty$ ، (ج) $\sigma = 0$ و $\sigma_c = 5 \times 10^7 \text{ V/m}$ ، (د) $\sigma = 10^{-4} \text{ V/m}$ و $\sigma_c = 5 \times 10^7 \text{ V/m}$.

١٢ - الدائرة المكافئة لفجوة معينة ربع طول موجة طولاً تتركب من $L_e = 10^{-7} \text{ H}$ ، $C_e = 10^{-11} \text{ F}$ و $R_e = 50\text{k}\Omega$. فولتية ، $2\cos\omega t \text{ V}$ ، أثرت عند مدخل الفجوة . حدد مقدار تيار المدخل اذا كانت ω تساوى :
(أ) ω_0 (ب) $1.01\omega_0$.

١٣ - أبعاد الفجوة المبينة فى شكل ١٣ - ٢ هى $a = 5\text{mm}$ ، $b = 3\text{mm}$ و $l = 40\text{cm}$.
(أ) افرض أن الفجوة مملوءة بالهواء ومصنوعة من مادة لها $\sigma_c = 4 \times 10^7 \text{ V/m}$.
اذا كان $l = \lambda/4$ ، حدد L_e ، C_e ، R_e و Q_0 . (ب) اذا كان $l = 3\lambda/4$ ، حدد L_e و C_e .

١٤ - فجوة محورية طولها 75cm ، مملوءة بالهواء ، مقصرة عند كلا النهايتين ، ومعدن - من مادة لها $\delta = 10\mu\text{m}$ عند التردد العامل ، ولها $2 = \ln(b/a)$ مع $a = 0.4\text{cm}$. عملت توصيلات خارجية للموصل الداخلى والخارجى عند نقطة منتصف الفجوة . عين قيما لـ C_e ، L_e و R_e .

١٥ - فجوة محورية ربع طول موجية لها فقود حوائط الموصل مقسمة بحيث ينشأ 80 في المائة في الموصل المركزي ، 15 في المائة في الموصل الخارجي و 5 في المائة في لوح النهاية المفرد . اذا كان الموصل المركزي ذو قطر 8 mm ، أوجد التردد الرنان لفجوة مفرغة .

١٦ - موجة مستوية منتظمة في الهواء ، $E = E_0 \cos(10^8 t - \beta z) a_x$ ، تسقط عمودياً على سطح صلب مستوى له $\mu_R = 250$ ، $\mu_0 = 2 \times 10^{-6}$ Vs/m . اذا مثلت هذه الموجة الساقطة كثافة قدرة متوسطة مقدارها $1W/m^2$ ، ما هو فقد القدرة المتوسطة في Im^2 من السطح العاكس ؟

١٧ - الهوائي القصير في شكل ١٣ - ٤ له $I = \cos 6\pi 10^8 t A$ و $d = 10cm$.
دع $\epsilon = \epsilon_0$ و $\mu = \mu_0$. حدد H_{ϕ} في صورة قطبية في المستوى $z = 0$ عند r تساوى : (أ) 1cm ، (ب) 10cm ، (ج) 1m .

١٨ - دع $I_0 d\eta/(4\pi\lambda^2) = 2 V/m$ لعنصر تيار تفاضلي في فضاء حر . أوجد النسبة : E_{θ}/H_{ϕ} عند r/λ تساوى (أ) 0.2 ، (ب) 1 ، (ج) 5 .

١٩ - اذا أعطيت عنصر تيار موجه في اتجاه z عند نقطة الأصل في الهواء مع $I_0 d = 1A.m$: (أ) بين أن القدرة المتوسطة الكلية المشعة بالعنصر هي : $40\pi^2/\lambda^2 W$ ، (ب) اوجد الزاوية θ_1 بحيث يشع نصف القدرة المتوسطة الكلية في المنطقة $1/2\pi - \theta_1 < \theta < 1/2\pi + \theta_1$ ، $0 < \phi < 2\pi$.

٢٠ - هوائي عند نقطة الأصل في فضاء حر ينتج المجال البعيد

$$E_{\theta} = (100/r) \sin^2 \theta e^{-j2\pi r/\lambda} V/m .$$

أوجد P_{av} .

٢١ - هوائي أحادي القطب ربع موجي في هواء يعطى شدة مجال كهربي مقدارها $100mV/m$ عند نقطة Imi من قاعدة الهوائي عند سطح المستوى التام التوصيل (أ) ما مقدار التيار الذي يجب أن يغذى به أحادي القطب ؟ (ب) ما مقدار القدرة المتوسطة الى يجب أن تمد للهوائي ؟

٢٢ - هوائي ثنائي قطب نصف - موجي في هواء يعطى شدة مجال كهربي مقدارها $100mV/m$ عند نقطة Imi من مركز الهوائي ومتساوية البعد من النهايتين . (أ) ما مقدار التيار الذي يجب أن يغذى به الهوائي ؟ (ب) ما مقدار القدرة المتوسطة التي يجب أن تمد لثنائي القطب ؟

٢٣ - عناصر تيار تفاضلية موضوعة على المحور z عند $z = \pm \lambda/2$ وتحمل تيارات متساوية مقدارها $I_0 \cos \omega t$ في اتجاه a_z . احسب المسافة بدقة من كل عنصر الى النقطة $(0, \theta, \phi)$ ، $P(r \approx 5\lambda)$ ، حيث θ تساوى : (أ) 0° (ب) 30° ، (ج) 60° ، (د) 90° (هـ) جهز رسماً قطبياً للاتساع النسبي لـ A_{zs} ضد θ لنقطتها . $\phi = 0$ ، $r = 5\lambda$.

الملحق (أ)

تحليل المتجهات

١-١ : إحداثيات الخطوط المنحنية العامة

دعنا نعتبر نظاماً إحداثياً متعامداً عاماً الذى توقع فيه نقطة بتقاطع ثلاثة أسطح متعامدة مع بعضها (ذات هيئة أو شكل غير محدد) ،

$$u = \text{ثابت}$$

$$v = \text{ثابت}$$

$$w = \text{ثابت}$$

حيث u ، v ، و w هى متغيرات فى النظام الإحداثى . إذا أزيد كل متغير بقدر تفاضلى و رسمت ثلاثة أسطح إضافية متعامدة مع بعضها مقابلة لهذه القيم الجديدة ، يتكون حجم تفاضلى هو متوازى سطوح قائم تقريبا . حيث أن u ، v ، و w لا يشترط أن تكون مقاييس لطول ، كما ، على سبيل المثال ، المتغيرات الزاوية لظامى الإحداثيات الاسطوانية والكروية ، فكل يجب أن يضرب بدالة عامة فى u ، v ، و w لكى نحصل على الجوانب التفاضلية لمتوازى السطوح .

على ذلك نعرف عوامل المقياس h_1 ، h_2 ، و h_3 كل بأنه دالة للمتغيرات الثلاثة u ، v ، و w ونكتب أطوال الجوانب للحجم التفاضلى بالصورة

$$dL_1 = h_1 du$$

$$dL_2 = h_2 dv$$

$$dL_3 = h_3 dw$$

$$\text{كارتيزى} : \quad u = x \quad v = y \quad w = z$$

$$h_1 = 1 \quad h_2 = 1 \quad h_3 = 1$$

$$\text{اسطوانى (١)} : \quad u = \rho \quad v = \phi \quad w = z$$

$$h_1 = 1 \quad h_2 = \rho \quad h_3 = 1$$

$$\text{كروى} : \quad u = r \quad v = \theta \quad w = \phi$$

$$h_1 = 1 \quad h_2 = r \quad h_3 = r \sin \theta$$

اختيار u, v, w أنفا قد عمل بحيث $a_u = a_v = a_w$ في جميع الحالات .
يجب توقع تعبيرات أكثر تعقيدا لـ h_1, h_2, h_3 في نظم إحداثيات أخرى أقل
شيعا (١)

١, ٢ : الانفراج ، التدرج والالتواء في احداثيات المخطوط المنحنية العامة

إذا طبقت الطريقة المستخدمة في استنباط الانفراج في قسمي ٣-٤ و
٣-٥ على نظام احداثيات المخطوط المنحنية العامة ، يكون تدفق المتجه D
المار خلال سطح متوازي السطوح الذي وحدة العمود عليه هي a_u

$$D_{u0} dL_2 dL_3 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} (D_u dL_2 dL_3) du$$

أو

$$D_{u0} h_2 h_3 dv dw + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} (D_u h_2 h_3 dv dw) du$$

ويكون للوجه المضاد

$$-D_{u0} h_2 h_3 dv dw + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} (D_u h_2 h_3 dv dw) du$$

معطيا مجموعا كليا لهذين الوجهين مقداره

$$\frac{\partial}{\partial u} (D_u h_2 h_3 dv dw) du$$

حيث أن u, v, w هي متغيرات مستقلة ، يمكن كتابة هذا التعبير الاخير بالصورة

$$\frac{\partial}{\partial u} (h_2 h_3 D_u) du dv dw$$

ويحصل على التعبيرين المقابلين الآخرين بتبديل بسيط للرموز السفلية ولـ u, v, w
على ذلك يكون التدفق الكلي التارك للحجم التفاضلي هو

$$\left[\frac{\partial}{\partial u} (h_2 h_3 D_u) + \frac{\partial}{\partial v} (h_3 h_1 D_v) + \frac{\partial}{\partial w} (h_1 h_2 D_w) \right] du dv dw$$

(١) المتغيرات ومراحل المقياس معطلة لتسعة نظم إحداثيات متعامدة على 59 — pp, 55 في ٥ . أيضا كل
نظام موصوف بايجاز .

ويوجد الانفراج D بالقسمه على الحجم التفاضلى

$$(٧) \quad \nabla \cdot D = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u} (h_2 h_3 D_u) + \frac{\partial}{\partial v} (h_3 h_1 D_v) + \frac{\partial}{\partial w} (h_1 h_2 D_w) \right]$$

مركبات التدرج لمقياسى V يمكن الحصول عليها (باتباع طرق قسم ٤-٦)
بالتغير عن التفاضل الكلى لـ V ،

$$dV = \frac{\partial V}{\partial u} du + \frac{\partial V}{\partial v} dv + \frac{\partial V}{\partial w} dw$$

بدلالة الأطوال التفاضلية المركبة ، $h_3 dw$ ، $h_2 dv$ ، $h_1 du$

$$dV = \frac{1}{h_1} \frac{\partial V}{\partial u} h_1 du + \frac{1}{h_2} \frac{\partial V}{\partial v} h_2 dv + \frac{1}{h_3} \frac{\partial V}{\partial w} h_3 dw$$

حيث أن

$$dL = h_1 du a_u + h_2 dv a_v + h_3 dw a_w \quad \text{and} \quad dV = \nabla V \cdot dL$$

نرى أن

$$(٣) \quad \nabla V = \frac{1}{h_1} \frac{\partial V}{\partial u} a_u + \frac{1}{h_2} \frac{\partial V}{\partial v} a_v + \frac{1}{h_3} \frac{\partial V}{\partial w} a_w$$

مركبات الالتواء لمتجه H يحصل عليها باعتبار مسار تفاضلى أولا فى سطح $u = \text{ثابت}$ ،
وايجاد دوران H حول ذلك المسار ، كما نوقش بالنسبة للاحداثيات الكرتيزية فى
قسم ٨-٣ . المساهمة على طول الجزء فى الاتجاه a_u هى

$$H_{u0} h_2 dv - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial w} (H_u h_2 dv) dw$$

وتلك من الجزء المضاد التوجيه هى

$$-H_{u0} h_2 dv - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial w} (H_u h_2 dv) dw$$

ومجموع هذين الجزئين هو

$$-\frac{\partial}{\partial w} (H_u h_2 dv) dw$$

أو

$$-\frac{\partial}{\partial w}(h_2 H_v) dv dw$$

ومجموع المساهمات من الجانبين الآخرين من المسار هو

$$\frac{\partial}{\partial v}(h_3 H_w) dv dw$$

المركبة في الاتجاه a_u لالتواء H هي لذلك

$$(\nabla \times H)_u = \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial v}(h_3 H_w) - \frac{\partial}{\partial w}(h_2 H_v) \right]$$

والمركبتان الاخرتان يمكن الحصول عليهما بتبديل دورى . النتيجة يمكن التعبير عنها كمحددة .

$$(4) \quad \nabla \times H = \begin{vmatrix} \frac{a_u}{h_2 h_3} & \frac{a_v}{h_3 h_1} & \frac{a_w}{h_1 h_2} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ h_1 H_u & h_2 H_v & h_3 H_w \end{vmatrix}$$

اللابلاسى لمقياسى يوجد باستخدام (٢) و (٣) :

$$(5) \quad \nabla^2 V = \nabla \cdot \nabla V = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial V}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial V}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial V}{\partial w} \right) \right]$$

المعادلات (٢) الى (٥) يمكن أن تستخدم لايجاد الانفرج ، التدرج ، الالتواء واللابلاسى فى أى نظام إحداثيات متعامدة فيه h_1 , h_2 و h_3 معروفة .

٣-١ : متطابقات متجهة :

المتطابقات المتجهة المدرجة فيما بعد يمكن اثباتها بالفك فى احدائيات كرتيزية (أوخطوط منحنية عامة) . المتطابقتان الأولىتان تشتملان على حاصل الضرب الثلاثى المقياسى والاتجاهى ، الثلاث التالية تختص بالعمليات على حواصل جمع ، الثلاث التالية تطبق على عمليات عندما يضرب المتغير المطلق بدالة مقياسية ، الثلاث التالية تطبق على عمليات حواصل ضرب مقياسية أو متجهة ، والأربع الأخيرة تختص بعمليات من الرتبة الثانية .

$$(7) \quad (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} \equiv (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{A} \equiv (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B}$$

$$(V) \quad \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \equiv (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$$

$$(A) \quad \nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \equiv \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B}$$

$$(4) \quad \nabla(V + W) \equiv \nabla V + \nabla W$$

$$(10) \quad \nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \equiv \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B}$$

$$(11) \quad \nabla \cdot (V\mathbf{A}) \equiv \mathbf{A} \cdot \nabla V + V \nabla \cdot \mathbf{A}$$

$$(12) \quad \nabla(VW) \equiv V \nabla W + W \nabla V$$

$$(13) \quad \nabla \times (V\mathbf{A}) \equiv \nabla V \times \mathbf{A} + V \nabla \times \mathbf{A}$$

$$(14) \quad \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \equiv \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B}$$

$$(15) \quad \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \equiv (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A})$$

$$(16) \quad \nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \equiv \mathbf{A} \nabla \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \nabla \cdot \mathbf{A} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$$

$$(17) \quad \nabla \cdot \nabla V \equiv \nabla^2 V$$

$$(18) \quad \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} \equiv 0$$

$$(19) \quad \nabla \times \nabla V \equiv 0$$

$$(20) \quad \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} \equiv \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

الملحق (ب)

الوحدات

مستصف أولاً الوحدات الدولية

(مختصرة SI , Systeme International d'unités) ، المستخدمة في هذا الكتاب والتي هي قياسية الآن في الهندسة الكهربائية ، وكثير من الفيزياء . وقد أُنخذت رسمياً كنظام دولي للوحدات بكثير من الدولة بما فيها الولايات المتحدة ^(١) .

وحدة الطول الأساسية هي المتر ، ومعرف على أنه $1,650,763.73$ مرة من طول موجة الاشعاع في فراغ المتوافقة ع الانتقال غير المضطرب بين المستويين $2p_{10}$ و $5d_5$ للكربتون 86 الخط البرتقالي - الأحمر . الثانية هي الوحدة الأساسية للزمن ، والثانية الدولية معرفة بأنها $9,192,631,770$ من مدد دورات تردد الانتقال بين المستويين الفائقى الدقة $m_F=0, F=3$ و $m_F=0, F=4$ لحالة الهمود $^{25}S^{1/2}$ لذرة سيزيوم ١٣٣ ، غير مضطربة بمجالات خارجية . الكتلة العيارية ذات الكيلوجرام الواحد معرفة بأنها كتلة معيار دولي على هيئة اسطوانة بلاتين - ايريديوم في المكتب الدولي للأوزان والمقاييس في سيفر ، بفرنسا .

وحدة درجة الحرارة هي الكلفن ، معرف بوضع درجة حرارة النقطة الثلاثية للماء عند 273.16 kelvins وحدة خامسة هي الكانديلا ، معرفة بشدة الاضاءة لمشع لجميع الاتجاهات عند درجة حرارة تجمد البلاتين (2042 K) له مساحة $1/600,000$ متر مربع وتحت ضغط $101,325$ نيوتن لكل متر مربع .

(١) النظام الدولي للوحدات أقره المؤتمر العام الحادى عشر من الموازين والمقاييس في باريس في 1960 وتبن روسيا للاستخدام الملحق بالمكتب القومى للمعايير في 1964 وهو نظام مترى ويكفى أن يكون هاما أنه النظام الوحيد الذى لقي تصديقاً خاصاً من الكنجرس . حدث هذا أولاً في 1866 ثم مرة أخرى في 1975 مع قانون التحويل المترى ، الذى ينهض بأعباء «التحويل الاختياري» للنظام المترى . مع ذلك ، لم يحدد وقت معين ، ونستطيع فرض أنه لايزال هناك عدة سنين قبل أن تندرج عدادات المسافات بالكيلومترات ، وقرأ مقياس العمام الكتلة بالكيلوجرامات .

آخر الوحدات الأساسية هو الأمبير . قبل تعريف الأمبير بوضوح ، يجب أولاً أن نعرف النيوتن . وهو معرف بدلالة الوحدات الأساسية الأخرى من قانون نيوتن الثالث بأنه القوة المطلوبة لتنتج عجلة مقدارها متر واحد لكل ثانية على كتلة كيلوجرام واحد . يمكننا الآن تعريف الأمبير بأنه التيار الثابت الموجود في موصلين مستقيمين متوازيين ذوى طول لانهائى ومقطع عرضى مهمل ، يفصلهما متر واحد فى فراغ ، الذى ينتج قوة تنافر مقدارها 2×10^{-7} نيوتن لكل متر طول بين الموصلين . القوة بين الموصلين المتوازيين معروف أنها

$$F = \mu_0 \frac{I^2}{2\pi d}$$

وعلى ذلك

$$2 \times 10^{-7} = \mu_0 \frac{1}{2\pi}$$

أو

$$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \quad (\text{kg} \cdot \text{m/A}^2 \cdot \text{s}^2, \text{ or H/m})$$

على ذلك نجد أن تعريفنا للأمبير قد صيغ بطريقة بحيث نخصص قيمة عددية مضبوطة بسيطة لانفاذية الفضاء الحر .

مع أن المتر ، الثانية ، الكيلوجرام ، الكلفن والكند بلا قد عرفت بمقارنة مباشرة بمعيار دولى أوقياس مباشر ، نرى أن الأمبير معرف بطريقة غير مباشرة . علاوة على ذلك ، واضح أن الخطوة الخامسة فى تتابع التعريف كان تخصيص قيمة مقدارها $4\pi 10^{-7}$ لهلم ، مع أننا لانقول هكذا . هذا التعريف غير المباشر للأمبير يمكن أن يوضح من اعتبار تتابع من تعريفات نعرف فيها أولاً الكتلة العيارية كما سبق ، نختار الزمن كالبعد الأساسى التالى ، ثم نعرف وحدة الزمن الأساسية بأنها «الجيفى» (Jiffy) الزمن المطلوب لانتقال متر واحد بسرعة الضوء فى فضاء حر . سرعة الضوء سيكون لها حيثئذ القيمة البسيطة ، متر واحد لكل جيفى ، لكن قيمة الجيفى العيارى سوف تعتمد على قياس مناظر لقياسنا لسرعة الضوء فى النظام الدولى . العلماء سيجهزون تجارب معقدة ، ليس لتحديد سرعة الضوء (متر واحد لكل جيفى ، كما يعرف كل تلميذ مدرسة) ، ولكن لتحرى عدد فترات انتقال السيزيوم فى جيفى واحد ^(١) .

(١) مطى (بالضبط) فى مجلات Jiffy land العلمية بأنها $(3066.331983 \pm 0.000011)$ فترة انتقال جيفى .

بالرجوع للنظام الدولي ، الوحدات التي تقاس بها الكميات الكهربائية والمغناطيسية الأخرى معطاة في نص المرجع في الوقت الذي تعرف فيه كل كمية ، وجميعها يمكن ربطها بالوحدات الأساسية المعرفة سابقا . مثلا ، تعاملنا مع الموجة المستوية في الفصل الحادى عشر يبين أن السرعة التي تنتشر بها موجة كهرومغناطيسية في فضاء حرى

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

وعلى ذلك

$$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} = \frac{1}{4\pi 10^{-7} c^2}$$

واضح أن القيمة العددية لـ ϵ_0 تعتمد على القيمة المقاسة لسرعة الضوء في الفراغ ، (a)

الوحدات معطاة أيضا في جدول ب- ١ للرجوع إليها بسهولة وهى مدرجة بنفس الترتيب المعرفة به في المرجع .

أخيرا ، قد استخدمت نظم أحداثيات أخرى فى الكهربائية والمغناطيسية . فى نظام الاحداثيات الكهروستاتيكى (esu) يكتب قانون كولوم لفضاء حر ،

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{R^2} \quad (\text{esu})$$

سماحية الفضاء الحر مخصص لها قيمة الوحدة . الجرام والستيمتر هما الوحدتان الأساسيتان للكتلة والمسافة ، ونظام الـ esu هو لذلك نظام cgs الوحدتان الحاملة للبادئة stat- تنتمى لنظام الوحدات الكهروستاتيكى .

بكيفية ماثلة ، نظام الوحدات الكهرومغناطيسى (emu) مؤسس على قانون كولوم لثنائيات قطب مغناطيسية ، وانفاذية الفضاء الحر هى الوحدة . البادئة -ab تميز وحدات emu . عندما يعبر عن كميات كهربية فى وحدات esu . كميات مغناطيسية فى وحدات emu ، وكلاهما يظهر فى نفس المعادلة (مثل معادلات الالتواء لما كسويل) ، تظهر سرعة الضوء صريحة . يتبع هذا من ملاحظة أن فى $\epsilon_0 = 1/\text{esu}$ ، لكن $\mu_0 \epsilon_0 = 1/C^2$ ولذلك $\mu_0 = 1/C^2$ وفى $\mu_0 = 1/\text{emu}$ ولهذا $\epsilon_0 = 1/C^2$ على ذلك ، فى هذا النظام المتمازج المعروف بالنظام الجاوسى .

$$\nabla \times \mathbf{H} = 4\pi \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (\text{gaussian})$$

هو نظام cgs غير مرشد (بنتلما يرشد يعرف بنظام هفيسيد - لورنز) والنظام الدولي الذي قد استعملناه في جميع أقسام هذا الكتاب هو نظام mks مرشد .

الرمز	الاسم	الوحدة	الاختصار
v	سرعة	متر/ثانية	m/s
F	قوة	نيوتن	N
Q	شحنة	كولوم	C
r, R	مسافة	متر	m
ϵ_0	سماحية	فاراد/متر	F/m
E	شدة مجال كهربى	فولت/متر	V/m
ρ, ρ_v	كثافة شحنة حجمية	كولوم/متر ³	C/m ³
v	حجم	متر ³	m ³
ρ_L	كثافة شحنة خطية	كولوم/متر	C/m
ρ_s	كثافة شحنة سطحية	كولوم/متر ²	C/m ²
ψ	تدفق كهربى	كولوم	C
D	كثافة تدفق كهربى	كولوم/متر ²	C/m ²
S	مساحة	متر ²	m ²
W	شغل ، طاقة	جول	J
L	طول	متر	m
V	جهد	فولت	V
p	عزم ثنائى قطب	كولوم - متر	C.m
I	تيار	أمبير	A
J	كثافة تيار	أمبير/متر ²	A/m ²
μ_0, μ_n	حركية	متر/فولت - ثانية	m ² /V.S
σ	موصلية	مهو/متر	Ω/m
R	مقاومة	أوم	Ω
P	استقطاب	كولوم/متر ²	C/m ²
χ, e, m	قابلية التأثر		

الرمز	الاسم	الوحدة	الاختصار
C	سعة	فاراد	F
H	شدة مجال مغناطيسي	أمبير/متر	A/m
K	كثافة تيار سطحي	أمبير/متر	A/m
B	كثافة تدفق مغناطيسي	وير/متر ²	Wb/m ²
μ_0	إنفاذية	(أوتسلا)	(T أو)
Φ	تفق مغناطيسي	هنري/متر	H/m
Vm	جهد مغناطيسي مقياسي	وير	Wb
A	جهد مغناطيسي متجه	أمبير	A
T	عزم تدوير	نيوتن - متر	N.m
m	عزم مغناطيسي	أمبير - متر ²	A.m ²
M	تمغنط	أمبير/متر	A/m
R	ممانعة	أمبير - لف/وير	A.t/Wb
L	محالة	هنري	H
M	محادثة متبادلة	هنري	H
ω	تردد زاوي	زاوية نصف قطرية/ثانية	rad/s
c	سرعة الضوء	متر/ثانية	m/s
λ	طول موجة	متر	m
n	معاوقة ذاتية	أوم	Ω

جدول ب-١ : أسماء ووحدات الكميات الكهربائية والمغناطيسية في النظام الدولي
(بالترتيب التي تظهر به في المرجع)

الرمز	الاسم	الوحدة	الاختصار
γ	ثابت الانتشار	مركب نيبر/متر	m^{-1}
α	ثابت توهين	نيبر/متر	N_p/m
B	ثابت طور	زاوية نصف قطريه/متر	rad/m
f	تردد	هرتز	Hz
Φ	متجه بويمنتج	وات/متر ^٢	W/m^2
P	قدرة	وات	W
δ	عمق سطحي	متر	m
r	معامل انعكاس		
s	نسبة الموجة الواقفة		
G	مواصلة	مهو	\mathcal{G}
Z	معاوقة	أوم	Ω
Y	مسامحة	مهو	\mathcal{Y}
Q	عامل الجودة		

جدول ب-٢ : أسماء ووحدات الكميات الكهربائية والمغناطيسية في النظام الدولي
(بالترتيب التي تظهر به في المرجع)

الكمية	وحدة mks	وحدات جاوسية	وحدات أخرى
d	1 m	10^2 Cm	39.37 In
F	1 N	10^5 Dyne	0.2248 Lb _f
W	1 J	10^7 Erg	0.7376 Ft-lb _f
Q	1 C	10c StatC	0.1 AbC
ρ	1 C/m ³	$10^{-5}c$ StatC/cm ³	10^{-7} AbC/cm ³
D	1 C/m ²	$4\pi 10^{-3}c$ (esu)	$4\pi 10^{-5}$ (emu)
E	1 V/m	$10^6/c$ StatV/cm	10^6 AbV/cm
V	1 V	$10^6/c$ StatV	10^8 AbV
I	1 A	0.1 AbA	10c StatA
H	1 A/m	$4\pi 10^{-3}$ Oersted	$0.4\pi c$ (esu)
V_m	1 A · t	0.4π Gilbert	$40\pi c$ (esu)
B	1 Wb/m ²	10^6 Gauss	$100/c$ (esu)
Φ	1 Wb	10^8 Maxwell	$10^6/c$ (esu)
A	1 Wb/m	10^6 Maxwell/cm	
R	1 Ω	10^9 Ab Ω	$10^5/c^2$ Stat Ω
L	1 H	10^9 AbH	$10^5/c^2$ StatH
C	1 F	$10^{-5}c^2$ StatF	10^{-9} AbF
σ	1 \mathcal{U} /m	10^{-11} Ab \mathcal{U} /cm	$10^{-7}c^2$ Stat \mathcal{U} /cm
μ	1 H/m	$10^7/4\pi$ (emu)	$10^3/4\pi c^2$ (esu)
ϵ	1 F/m	$4\pi 10^{-7}c^2$ (esu)	$4\pi 10^{-11}$ (emu)

جدول ب-٢: تحويل وحدات دولية إلى جاوسية وأخرى (استخدم $c=2.997924574 \times 10^8$)

١- الكمية ٢- وحدة *mks* ٣- وحدات جاوسية ٤- وحدات أخرى

جدول ب-٢ يعطى عوامل التحويل بين وحدات النظام الدولي الأكثر أهمية (أو نظام *mks* المرشد) والنظام الجاوسى ، وعدة وحدات أخرى متنوعة .

جدول ب-٣ يبوب البادئات المستخدمة مع أى من الوحدات *SI* ، اختصاراتها ، وقوة العشرة التى تمثلها كل . وتلك البادئات المعلمة مستخدمة بكثرة .
كلا البادئات واختصاراتها مكتوب بدون وصلات ، لذلك
 $10^{-6} F = 1 \text{ microfarad} = 1 \mu F = 1,000 \text{ nanofarads} = 1,000 nF$. الخ .

جدول ب-٣: بادئات قياسية مستخدمة مع وحدات *SI* .

البادئة	الاختصار	المعنى	البادئة	الاختصار	المعنى
atto—	a—	10^{-18}	deka—	da—	10^1
femto	f—	10^{-15}	hecto—	h—	10^2
pico—	p—	10^{-12}	kilo—	k—	10^3
nano—	n—	10^{-9}	mega—	M—	10^6
micro—	μ —	10^{-6}	giga—	G—	10^9
milli—	m—	10^{-3}	tera—	T—	10^{12}
centi—	c—	10^{-2}	peta—	P—	10^{15}
ceenti—	d—	10^{-1}	exa—	E—	10^{18}
deci—					

الملحق (جـ)

نوايت المواد

جدول جـ- ١ يوب قيم نموذجية للسماحية النسبية ϵ_r أو ثابت العازل لمواد عازلة شائعة ، إلى جانب قيم ممثلة لظل الفقد . القيم يجب أن تعتبر فقط ممثلة لكل مادة ، وهى تنطبق على ظروف معدل درجة الحرارة والرطوبة ، ولترددات سمعية منخفضة جدا . معظمها قد أخذ من "Reference Data for Radi Engineers"^(١) و "The Standard Handbook for Electrical Engineers"^(٢)، Von Hippel^(٣) وهذه الكتب يمكن الرجوع إليها لمزيد من المعلومات عن هذه المواد وغيرها .

جدول جـ- ٢ يعطى الموصلية لعدد من الموصلات المعدنية ، لقليل من المواد العازلة ، ولعديد من مواد أخرى ذات أهمية عامة . قد أخذت القيم من المراجع المدرجة سابقا ، وتنطبق عند التردد صفر ، وعند درجة حرارة الغرفة . التوبيب بترتيب تناقص الموصلية .

بعض قيم ممثلة للانفاذية النسبية لمواد مختلفة دايامغناطيسية ، بارامغناطيسية ، فرى مغناطيسية ، وفرومغناطيسية المدرجة فى جدول جـ- ٣ .

(١) أنظر المراجع المقترحة للفصل الحادى عشر .

(٢) أنظر المراجع المقترحة للفصل الخامس .

(٣) أنظر المراجع المقترحة للفصل الحادى عشر .

جدول ج-١: ϵ_R و $a/w\epsilon$

$a/w\epsilon$	ϵ_R	المادة
	1.0006	هواء
0.1	25	كحول ، ايثيل
0.0006	8.8	أكسيد ألومنيوم
0.002	2.7	كهرمان
0.022	4.74	باكليت
0.013	1,200	تيتانات الباريوم
	1,001	ثاني أكسيد كربون
	16	جرمانيوم
0.001	4.7	زجاج
0.1	4.2	جليد
0.0006	5.4	ميكا
0.011	6.6	نيوبرين
0.02	3.5	نايلون
0.008	3	ورق
0.04	3.45	بلكسيجلاس
0.0002	2.26	بوليثيلين
0.0003	2.25	بوليبروبيلين
0.00005	2.55	بوليستيرين
0.014	6	بورسيلين (صناعة جافة)
0.0005	4.4	بيرانول
0.0006	4	زجاج بيركس
0.00075	3.8	كوارتز (منصهر)
0.002	2.5-3	مطاط
0.00075	3.8	سيليكات أو SiO_2 (منصهر)
	11.8	سيليكون
0.5	3.3	ثلج

تابع جدول جـ - ١ :

$\sigma/w\epsilon$	ϵ_R	المادة
0.0001	5.9	كلوريد صوديوم
0.07	2.8	ترية (جافة)
0.003	5.8	ستيتيت
0.0001	1.03	ستيروفوم
0.0003	2.1	تفلون
0.0015	100	ثاني أكسيد تيتانيوم
0.04	80	ماء (مقطر)
4		ماء (بحر)
0	1	ماء مهيئرج
0.01	1.5—4	خشب (جاف)

جدول جـ - ٢ :

$\sigma T U/m$	المادة	$\sigma, U/m$	المادة
7×10^4	جرافيت	6.17×10^7	فضة
1,200	سيلكون	5.80×10^7	نحاس
100	فيريت (نموذجي)	4.10×10^7	ذهب
5	ماء (بحر)	3.82×10^7	الومنيوم
10^{-2}	حجر جيرى	1.82×10^7	تنجستن
5×10^{-3}	طفل	1.67×10^7	زنك
10^{-3}	ماء (عذب)	1.5×10^7	نحاس أصفر
10^{-4}	ماء (مقطر)	1.45×10^7	نيكل
10^{-5}	ترية (رملية)	1.03×10^7	حديد
10^{-6}	جرانيت	1×10^7	برونز فوسفورى
10^{-8}	رخام	0.7×10^7	سبيكة لحام
10^{-9}	باكليت	0.6×10^7	صلب كربونى
	بورسيلين (صناعة)	0.3×10^7	فضة الماتية
10^{-10}	جافة ()	0.227×10^7	منجنين
2×10^{-13}	ماس	0.226×10^7	كونستانتان
10^{-16}	بوليستيرين	0.22×10^7	جرمانيوم
10^{-17}	كوارتز	0.11×10^7	صلب غير قابل للصدا
		0.1×10^7	نيكروم

جدول ج-۳ : μ_R

μ_R	المادة
0.999 9986	بزموت
0.999 99942	بارافین
0.999 9995	خشب
0.999 99981	فضة
1.000 00065	الومنیوم
1.000 00079	بریلیوم
1.0004	کلورید نیکل
1.0001	سلفات المنجنیز
50	نیکل
60	حديد زهر
60	کویلٹ
100	حديد مسحوق
300	صلب آلة
1,000	فريت (نمودجی)
2,500	برمالوی ۴۵
3,000	حديد محول
3,500	حديد سيليكونى
4,000	حديد (نقى)
20,000	ميومتال
30,000	سیندست
100,000	سوپر برمالوی

وقد استخرجت من المراجع المدرجة آنفا ، والبيانات للمواد الفرومغناطيسية صحيحة فقط لكثافات تدفق مغناطيسية منخفضة جدا . الانفاذيات العظمى يمكن أن تكون أعلى بدرجة أعظم .

معطى فى جدول ج- ٤ قيم للشحنة والكتلة الساكنة للإلكترون ، سماحية وانفاذية الفضاء الحر ، وسرعة الضوء^(١)

جدول ج- ٤ : ثوابت فيزيائية

القيمة	الكمية
$e = (1.6021892 \pm 0.0000046) \times 10^{-19} \text{C}$	شحنة الإلكترون
$m = (9.109534 \pm 0.000047) \times 10^{-31} \text{kg}$	كتلة الإلكترون
$\epsilon_0 = (8.854187818 \pm 0.000000071) \times 10^{-12} \text{F/m}$	سماحية الفضاء الحر
$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{H/m}$	انفاذية الفضاء الحر
$C = (2.997924574 \pm 0.000000011) \times 10^8 \text{m/s}$	سرعة الضوء

(١) Cohen, E. R., and B. N. Taylor: The 1973 Least-Squares Adjustment of the Physical Constants, *J. Phys. Chem. Ref. Data*, vol. 2, no. 3, p. 663, 1973.

الملحق (د) (١)

إجابات المسائل الفردية الرقم

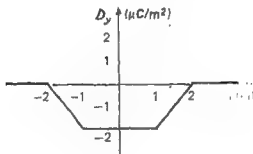
العمل الأول

- 1(a) $0.1741a_x + 0.696a_y - 0.696a_z$; (b) 11.49; (c) $2a_x - 5a_y + 6a_z$.
 3(a) 6.16; (b) $0.596a_x + 0.745a_y - 0.298a_z$; (c) $5.23a_x + 6.54a_y - 2.62a_z$.
 5(a) 1.169; (b) $-0.535a_x + 0.802a_y + 0.267a_z$; (c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ arcs;
 $x^2 + y^2 + z^2 = 0.1922$ and 20.8 . 7(a) $0.1826a_x + 0.913a_y + 0.365a_z$;
 (b) عند $y = 2x/11$, $z = 12x/11$. 9(a) 37.4;
 (b) $0.0601a_x - 0.961a_y + 0.270a_z$; (c) 19.67; (d) 41.6°.
 11(a) 83.7°; (b) 8; (c) 26.0. 13(a) $2a_x + 4a_y + 2a_z$; (b) 0;
 (c) $-28a_x + 4a_y + 20a_z$; (d) 169.3°. 15(a) 6.36; (b) $\pm(0.864a_x$
 $+ 0.314a_y + 0.393a_z)$. 17(a) 37.4; (b) 5.39; (c) 57.7°.
 19(a) $25a_y$; (b) $12a_x - 20a_z$; (c) $25a_x - 20a_z$; (d) $\pm(0.857a_x + 0.514a_z)$.
 21(a) $0.734a_x + 0.267a_y - 0.625a_z$; (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ مطوية $p = 5.46$.
 23(a) $P(8.25, 14.04^\circ, 1)$, $Q(7.28, 105.9^\circ, 4)$; (b) $-8.49a_x + 7.28a_y + 3a_z$;
 (c) $-7.55a_x - 8.24a_y - 3a_z$. 25(a) 20; (b) 1.728; (c) $1.493a_x - 0.448a_y$
 $+ 0.746a_z$; (d) $34a_x + 20a_y - 56a_z$; (e) $\pm(0.496a_x + 0.292a_y - 0.818a_z)$.
 27(a) 11.21; (b) 18.05, 104.0, 19.18, 55.2, 62.3, 62.3; (c) 386.
 29(a) $P(8.06, 60.3^\circ, 3)$; (b) $P(8.60, 69.6^\circ, 60.3^\circ)$;
 (c) $-4.34a_x + 5.58a_y - 8a_z$. 31(a) $-15.59a_x - 9a_y - 12a_z$;
 (b) $-3.87a_x + 0.232a_y + a_z$.

(١) a, b, c, d, e, f, g, h هي إجابات لتسلسل أ ب ج د ه و ز ح ط ث على الترتيب.

- 1(a) $0.487\mathbf{a}_x + 4.97\mathbf{a}_y + 0.993\mathbf{a}_z$ mN; (b) $0.501\mathbf{a}_x + 5.01\mathbf{a}_y + 1.002\mathbf{a}_z$ mN, الفصل الثامن
(c) 61.9 N.
5(a) 10.79 nN; (b) $-4.99\mathbf{a}_x + 5.95\mathbf{a}_y + 4.62\mathbf{a}_z$ V/m.
7 $80.8x^2 = (x^2 + y^2)^3$ or $\rho = 2.998/\sqrt{\cos \phi}$. 9 $Q_2, 0.629$ N.
11(a) 4.15; (b) 4.01; (c) 4. 13(a) 4.32 C; (b) 0.270 C.
15(a) $12 \mu\text{C}/\text{m}^2$; (b) 16.88 pC. 17(a) $\rho_0 \pi a^3$; (b) $0.0245\rho_0 \pi a^3$;
(c) $0.1\rho_0 \pi a^3$. 19(a) $2.01\mathbf{a}_x + 7.33\mathbf{a}_y - 9.38\mathbf{a}_z$ V/m; (b) -3.75 nC/m.
21(a) $-134.8\mathbf{a}_x$ V/m; (b) $48.6\mathbf{a}_x + 97.2\mathbf{a}_y - 36.0\mathbf{a}_z$ V/m.
23 $21.3\mathbf{a}_x - 5.31\mathbf{a}_z$ V/m, 21.9 V/m. 25 $8.01\mathbf{a}_z$ V/m.
27(a) $y^2 = \frac{1}{2}x^2 + C$; (b) $0.949\mathbf{a}_x + 0.316\mathbf{a}_y$. 29 $z^2 = x^2 + 2 \ln x$.
31 $\rho^2 \sin 2\phi = 2\sqrt{3}$.

- 1(a) قطعة المسلة الأولى، 4nC، قطعة المسلة الثانية، 0؛ الجدران والنظام، -4nC
(b) 6.33 C. 3 القطعة الأولى، 4nC، القطعة الثانية، -2nC، الجدران والنظام، -2nC.
5 $87.7 \mu\text{C}$. 7(a) ± 235 C; (b) $\pm 1,333$ C; (c) ± 402 C.
9(a) $4.8 \text{ nC}/\text{m}^2$; (b) $\rho < 3, D_p = 0; 3 < \rho < 4, D_p = -24/\rho; 4 < \rho < 5, D_p = -24/\rho$
الرسم التخطيطي غير مبین
11(a) $4.8 \text{ nC}/\text{m}^2$; (b) $r < 3, D_r = 0; 3 < r < 4, D_r = 72/r^2; 4 < r < 5, D_r = -120/r^2$;
الرسم التخطيطي غير مبین
13 (nC/m^2) $D_p(0) = 0, D_p(1\text{mm}) = 0.333, D_p(3\text{mm}) = 2.56, D_p(5\text{mm}) = 2.93$
15 (nC/m^2) $D_r(0) = 0, D_r(1\text{mm}) = 8.75, D_r(3\text{mm}) = 19.78, D_r(5\text{mm}) = 10.08$
جميعها
17(a) $y < -2, D = 0; -2 < y < -1, D_r = -2y - 4; -1 < y < 1, D_r = -2; 1 < y < 2, D_r = 2y - 4; y > 2, D = 0$ $\mu\text{C}/\text{m}^2$ جميعها
(b) انظر الرسم التخطيطي 19(a) $1.328 \mu\text{C}$;



شكل A

- (b) $8.64 \mu\text{C}$; (c) $P(3, 3, 3), 43.7 \mu\text{C}$. 21(a) 1.759; (b) 0.816;
(c) 0; (d) 12. 23(a) 0; (b) 1; (c) 0.1; (d) 3.60.
25(a) 0, $\rho = 0$ ماعدا عند a ; (b) $\rho_0 = \rho_L/\pi a^2$; $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_0, \rho < a$,
and $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \rho > a$. 27(a) $24 \text{ C}/\text{m}^2$; (b) $16\mathbf{a}_y \text{ C}/\text{m}^2$;
(c) $2,011 \text{ C}$; (d) $2,011 \text{ C}$. 29(a) $0.2, 0 \text{ C}/\text{m}^2$; (b) $-25.1 \text{ mC}/\text{m}$.
31 2.5, 2.5. 33 0.942 C, 0.942 C.

- 1(a) -12 pJ ; (b) 10 pJ ; (c) 20 pJ ; (d) 6.48 pJ .
3(a) 158.7; (b) 140.3. 5(a) (b) -360 J . 7 575 J.
9(a) (b) -150 V . 11(a) 6.60 V; (b) 41.8 V; (c) 11.18 V;
(d) 11.18 V. 13(a) 4.38 V; (b) -1.164 V ; (c) 14.46 V.

الفصل الرابع

- 15(a) 24.47 V; (b) 24.62 V; (c) 24.69 V. 17(a) 6.28 nC
 (b) 9.67 V بفقد 10.49 V القوس (0.77 V السطح (c) 30.9 V.
 19(a) -135.0 V; (b) $61.1a_x - 72.5a_y - 20a_z$ V/m;
 (c) $541a_x - 642a_y - 177.1a_z$ pC/m²; (d) 88.5 pC/m³.
 21(a) 884 V; (b) $-80a_x + 152.3a_y - 183.5a_z$ V/m; (c) 0; (d) 0.
 23 $47.3a_x + 16.10a_y + 0.322a_z$ V/m. 25 25.2 V, -4.31a_y V/m.
 27 $\theta = 54.7$ and 125.3° مخروطيات. 29(a) $3Q^2/(4\pi\epsilon_0 d)$;
 (b) $(4 + \sqrt{2})Q^2/(4\pi\epsilon_0 d)$. 31(a) $\rho = 0$ ($r = 0$ عند $r = 0$);
 (b) $5.000\pi\epsilon_0(a^{-1} - b^{-1})$. 33(a) $(\frac{5}{9})\rho^2$; (b) $8.80 \times 10^{-12}/\rho$;
 (c) $V(0) = 0.276$ V, $V(1 \text{ m}) = -6.87$ V.

الفصل الخامس

- 1(a) 314 A; (b) 42.5 A; (c) 0. 3(a) 3.52×10^{17} m/s;
 (b) $1.759 \times 10^{17} i$ m; (c) $8.39 \times 10^8 \sqrt{x}$; (d) $-1,000$ A/m²,
 $-1.192 \times 10^{-6}/\sqrt{x}$ C/m². 5(a) $2.47J_0$; (b) $9.87J_0$.
 7(a) 1,756 A; (b) $-1,750$ C/m³·s. 9(a) 550 A; (b) 2.29 μ W.
 11(a) 0.407 Ω ; (b) 10.22 mW/in². 13(a) 1.255 MA/m²;
 (b) 0.385 MA/m²; (c) 1.6 MA/m². 15(a) -1.771 nC/m²; داخل
 5.31 nC/m² خارجي (b) -8.90 nC; (c) 0. 17 0; بالداخل
 $-2,530a_x + 6,310a_y - 5,050a_z$ V/m. خارجي.
 19 $a_H = \pm(0.447a_x + 0.894a_y)$, $\rho_g = \pm 792$ pC/m². 21(a) 17.89 μ C/m²;
 (b) $10^{-4}([4 + (h-1)^2]^{-1.5} + [4 + (h+1)^2]^{-1.5})$ C/m².
 23 2.36 V/m. 25 155 k Ω . 27(a) $\epsilon_H = 4$, $\chi_H = 3$;
 (b) $P = -1.328a_x + 5.84a_y - 2.26a_z$ nC/m², $D = -1.771a_x$
 $+ 7.79a_y - 3.01a_z$ nC/m². 29 1,000 263. 31(a) 54.0°;
 (b) 54.0°; (c) 70.0°; (d) 70.0°. 33 4.51 V.
 35(a) 70.8 pF; (b) 5 kV/m, 0.221 μ C/m², 1.417 nC, 14.17 nJ;
 (c) 1.417 nC; (d) 0.221 μ C/m², 25 kV/m, 70.8 nJ; (e) 100 V.
 37 $E_g = 33.5/\rho$; $4 < \rho < 10$ mm, $E_g = 83.8/\rho$; $E = 0$, أي مكان آخر.
 الرسم غير صحيح. 41(a) and (b) $d_1 = \frac{1}{6}$ cm, $d_2 = \frac{1}{3}$ cm, $d_3 = \frac{1}{2}$ cm;
 (c) 1,562 pF/m². 43(a) 100 V, 80 kV/m, 0.708 μ C/m², 0.708 μ C/m²,
 1.417 μ C, 70.8 μ J, 14.17 nF; (b) 36 V, 0.708 μ C/m², 1.417 μ C,
 25.5 μ J, 39.4 nF, 16 kV/m, 0.708 μ C/m². 45(a) 28.6 pF/m;
 (b) 57.2 nC/m; (c) $-195.8a_z$ kV/m. 47 1.525 m.

الفصل السادس

- 1 50.6 pF/m. 3 69.5 pF/m. 5 34 pF/m. 7 7.4 pF/ft.
 9(a) 42, 56, 60, 10, 20, 32, -20, -18, -2 V;
 (b) 41.4, 55.2, 59.3, 10.5, 20.0, 32.0, -19.3, -17.7, -1.4 V.
 11 90 V. 13(a) 85 V; (b) 85.4 V; (c) 80 V; (d) $V_{\text{total}} = 79.707$ V.
 15(a) 32 kV/m; (b) 18.89 pF/m; (c) 18.89 pF/m.
 17 1,129 Ω . 19 1.02 Ω .

الفصل السابع

- 1(a) $(x^2 + y^2)^{-1.5}$; (b) 0; (c) ρ^{-3} ; (d) 0.
 3(a) $-\frac{5}{9}$; (b) $0.645a_x + 0.484a_y - 0.591a_z$.
 5(a) 0, no; (b) 0, yes. 7(a) 0.5; (b) -443 pC/m³.
 9(a) جميعها موافق للحالة.
 (b) مربوط الحد ليست منطقة سطح مغلق، ولا تطبق نظرية الغسائية.
 11 45.4 V, 132.8 pF. 13(a) $A = 466$, $B = 3469$; (b) -12, -66.3;
 (c) -40, -211. 15(a) 574 V; (b) $-2500a_y$ V/m;
 (c) $27.7 \mu\text{J/m}^3$; (d) $4.43(\phi_2 - \phi_1)(z_2 - z_1) \ln(\rho_2/\rho_1) \mu\text{J}$.

- 17(a) γ ; (b) $200 + 3585 \ln [(r+1)/1.2r]$; (c) 499 pF .
 19(a) 3.38 V ; (b) 22.8 V . 21(a) $V = \pi a^2 \rho_0 [1 - (2/\pi) \tan^{-1}(r/a)]/4c$;
 (b) نفس الاتجاه. 23(a) Θ' ; (b) $\Theta' + \cot \theta \Theta' + a^2 \Theta = 0$.
 25 $a_2 = 1/2$, $a_3 = 1/2$, $a_6 = -1/6$, $a_5 = -1/12$, $a_6 = 1/240$.

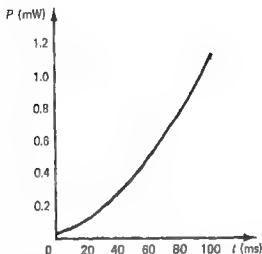
- 1 $-0.318a_y + 0.637a_x \text{ mA/m}$, 0.712 mA/m . 3(a) $0.435a_y \text{ A/m}$;
 (b) $0.0159a_y \text{ A/m}$. 5 $-4.90a_x - 0.979a_y + 3.18a_z \text{ mA/m}$.
 7(a) 42 A ; (b) $[(4h^2 + 50)/\sqrt{h^2 + 25} - (4h^2 + 8)/\sqrt{h^2 + 4}]a_z$;
 (c) 1.158 A/m . 9 $44.1a_x + 32.0a_z \text{ A/m}$. 11
 13(a) $15a_y \text{ A/m}$; (b) $15a_y \text{ A/m}$; (c) $-5a_y \text{ A/m}$.
 15(a) $0.035a_z/(c^2 + 0.01)^{1.5} \text{ A/m}$; (b) $66.0a_x \text{ A/m}$; (c) $175a_z \text{ A/m}$;
 (d) $70a_x \text{ A/m}$. 17(a) $50a_x \text{ A/m}$; (b) $30a_x \text{ A/m}$; (c) $31a_z \text{ A/m}$;
 (d) $31.1a_x \text{ A/m}$. 19 0 , $0 < \theta < 45^\circ$; $0.398a_\theta/\rho \text{ A/m}$, $\theta > 45^\circ$.
 21 4.043 . 23(a) $0, 0$; (b) $-20, 0$; (c) $5,000\rho^{-1} \sin(10^8 t - 1/2 z)a_\theta$.
 25(a) (b) 5.4 , 27 6.27 A . 29(a) (b) $\pi/2 \text{ A}$.
 31(a) 0 ; (b) $469a_\theta/\rho \text{ A/m}$; (c) $6\pi a_\theta/\rho \text{ A/m}$; (d) 0 .
 33 5.42 nWb . 35(a) 32 A ; (b) $-5.03a_\theta \text{ A/m}$.
 37(a) -244 A ; (b) 69.0 A . 39 $-(0.006/\pi) \tan^{-1}(y/2) \text{ A}$.
 41 43

الفصل التاسع

- 1(a) $(24, 0, 10) \text{ m}$; (b) $24a_x + 5a_z \text{ m/s}$; (c) 300.5 J .
 3(a) $500a_y + 300a_z \text{ kV/m}$; (b) 957 kV .
 5 $F_1 = -24a_y \text{ mN}$, $F_2 = 12a_y \text{ mN}$, $F_3 = 24a_z \text{ mN}$,
 $F_4 = -24a_z \text{ mN}$, $F_{\text{net}} = -12a_y \text{ mN}$. 7 $-0.16\pi a_z \text{ mN}$.
 9(a) $11(a)$ $2.66a_y \text{ mN/m}$;
 (b) $-2.66a_y \text{ mN/m}$. 13(a) (b) $-24a_x \text{ N} \cdot \text{m}$; (c) $6a_x \text{ mN} \cdot \text{m}$.
 15 $0.905 \text{ N} \cdot \text{m}$. 17(a) $1/2 \omega e a^2$; (b) $1/2 \omega e a^2 B$. 19(a) 3 ;
 (b) 3.77 mH/m ; (c) $-10.61a_x \text{ kA/m}^2$; (d) $-5.31a_x \text{ kA/m}^2$;
 (e) $10.61y a_x \text{ kA/m}$; (f) $5.31y a_x \text{ kA/m}$. 21 $y < -0.1$:
 $H = 1,800a_x$, $B = 2,250\mu_0 a_x$, $M = 450a_x$; $-0.1 < y < 0.2$:
 $H = 12,000(0.05 - y)a_x$, $B = 30,000\mu_0(0.05 - y)a_x$,
 $M = 18,000(0.05 - y)a_x$; $y > 0.2$: $H = -1,800a_x$, $B = -2,250\mu_0 a_x$,
 $M = -450a_x \text{ (A/m, Wb/m}^2, \text{ A/m)}$.
 23 $B = 3.92 \text{ mWb/m}^2$, $H = 3.09 \text{ A/m}$, $M = 0.0309 \text{ A/m}$.
 25(a) 54.0° ; (b) 70.0° . 27(a) 1.678 cm ; (b) 1.225 cm .
 29(a) 1.056 Wb/m^2 ; (b) 0.990 Wb/m^2 ; (c) 0.990 Wb/m^2 .
 31 147.1 m . 33 221 m . 35(a) 31.6 J ; (b) 7.90 J ;
 (c) 39.5 J . 37(a) 503 mWb/m^2 , 400 A/m , 13.64 J ; (b) 17.06 mH .
 39(a) 0.916 mH ; (b) 8.01 mH ; (c) 9.16 mH . 41(a) 0.392 mH ;
 (b) 0.216 mH . 43(a) 0.439 mH ; (b) 0.443 mH .

الفصل العاشر

- 1(a) $18.95 \cos 120\pi t \text{ V}$; (b) $-189.5 \cos 120\pi t \text{ mA}$.
 3(a) $-1200 \cos 3 \times 10^8 \pi t \text{ V}$; (b) 0 . 5 $52.412t^3 \text{ V}$.
 7(a) $-0.128 - 18.64t \text{ V}$; (b) $-9.6t - 52.412t^3 \text{ V}$.
 9(a) 0 ; (b) 0.24 V ; (c) 0.24 V ; (d) 0.24 V .
 11(a) 6.55×10^{13} ; (b) 282 ; (c) 4.46×10^{-9} .
 13(a) $(2 \times 10^{-6}/\omega) \sin(\omega t - 5\pi)a_z \text{ C/m}^2$, $(2 \times 10^{-6}/4\epsilon_0 \omega) \sin(\omega t - 5\pi)a_z$
 V/m ; (b) $(10^{-9}/4\epsilon_0 \omega^2) \sin(\omega t - 5\pi)a_y$,
 Wb/m^2 , $(10^{-9}/2\mu_0 \epsilon_0 \omega^2) \sin(\omega t - 5\pi)a_y \text{ A/m}$;
 (c) $(2.5 \times 10^{-6}/\mu_0 \epsilon_0 \omega^2) \cos(\omega t - 5\pi)a_x \text{ A/m}^2$, 335 Mrad/s .
 15 $12 \times 10^8 \text{ s}^{-1}$, $(5/3\pi) \exp(4x - 12 \times 10^8 t)a_x \text{ A/m}$.



شكل B

- 17(a) (a) $\vec{E} = f(t)$; (a) $\vec{D} \neq f(t)$;
 (b) $1.257 \times 10^{-5} \text{ rad/m}$. 19(a) 941 pC/m^2 ; (b) 11.72 V/m .
 21(a) 80 V/m ; (b) $[0.1592 \cos(15 \times 10^8 t - 5z) - 0.0531 \cos(15 \times 10^8 t + 5z)] \hat{a}_y \text{ A/m}$;
 (c) $0.1061 \cos(15 \times 10^8 t - 50z) \hat{a}_y \text{ A/m}$; (d) $H_{t1} = H_{t2}$.
 23(a) $380 \cos 4\pi 10^8 t \hat{a}_z \text{ A/m}$; (b) $(502/\rho) \sin 2\pi z \sin 4\pi 10^8 t \hat{a}_\phi \text{ V/m}$;
 (c) $-5 \times 10^{-7} \sin 4\pi 10^8 t \text{ C/m}^2$; (d) $1.257 \cos 4\pi 10^8 t \hat{a}_\phi \text{ A/m}^2$.
 25(a) $400y \cos(10^9 t - 4z) \hat{a}_y \mu\text{Wb/m}$; (b) $10^3 y \cos(10^9 t - 4z) \text{ V}$.

- 1 (a) 122.1 V/m ; (b) 98.8 V/m ; (c) 119.4 V/m .

الموصل الثاني عشر

- 5(a) $100 \mu\text{s}$; (b) $z = 30 \text{ km}$. 7(a) 50.0 rad/m ;
 (b) 0.1256 m ; (c) $(0.478 \hat{a}_x + 0.1991 \hat{a}_y) \cos(10^{10} t - 50.0z) \text{ A/m}$.
 9 2.5 GHz , $\mu_R = 1.99$, $\epsilon_R = 1.130$. 11 $\alpha \approx 3 \times 10^{-4} \text{ Np/m}$,
 $\beta \approx 3.3 \text{ rad/m}$. 13 $\mu_R = 1.670$, $\epsilon_R = 4.84$; $\sigma = 0.01906 \text{ U/m}$.
 15(a) 0.0286 Np/m ; (b) 0.0439 rad/m ; (c) 143.0 m ;
 (d) $4.55 \times 10^7 \text{ m/s}$; (e) $479/33.1^\circ \Omega$; (f) $12.69 \hat{a}_x \text{ mV/m}$.
 17 P.F. = $[1 + (\sigma/\omega\epsilon)^2]^{-1/2}$, $Q = (\sigma/\omega\epsilon)^{-1}$. 19(a) $(0.1648/\rho) \cos(10^9 t - 10z/3) \hat{a}_\phi \text{ A/m}$; (b) $(10.24/\rho^2) \cos^2(10^9 t - 10z/3) \hat{a}_z \text{ W/m}^2$;
 (c) 51.8 W . 21(a) 150 W ; (b) 124.8 W . 23(a) $-0.375 \hat{a}_x + 0.273 \hat{a}_y + 0.886 \hat{a}_z$; (b) 44.0 kW/m^2 ; (c) 2.49 . 25 999 MHz , $1.112 \times 10^{15} \text{ V/m}$.
 27(a) $-100 \cos 4 \times 10^8 t \hat{a}_x \text{ A/m}$; (b) $37,700 \cos 4 \times 10^8 t \hat{a}_z \text{ V/m}$;
 (c) $70.9 \cos(4 \times 10^8 t + 45^\circ) \hat{a}_y \text{ V/m}$. 29(a) $0.707 \Omega/\text{m}$;
 (b) $0.1768 \Omega/\text{m}$; (c) $0.884 \Omega/\text{m}$. 31(a) $\beta_A = 1^\circ \text{ rad/m}$,
 $\beta_B = 10.54 \text{ rad/m}$; (b) 0.1170 ; (c) $2.4 \cos(5 \times 10^8 t - 10z/3) + 0.281 \cos(5 \times 10^8 t + 10z/3) \text{ V/m}$;
 (d) $2.68 \cos(5 \times 10^8 t - 10.54z) \text{ V/m}$; (e) 10.47 mA/m .
 33(a) $z = 0.82 - 0.589n \text{ cm}$; (b) 237Ω . 35(a) $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 0.334 \text{ rad/m}$;
 (b) $0.290/102.8^\circ$; (c) $29.0 \cos(10^8 t + 0.334z + 102.8^\circ) \text{ V/m}$;
 (d) $97.8 e^{-0.788z} \cos(10^8 t - 1.272z + 16.8^\circ) \text{ V/m}$.
 37(a) 0.678 cm ; (b) 93.1% . 39(a) 4 ; (b) 13.93 ; (c) 9 .
 41(a) 3 ; (b) 1.333 ; (c) 2.02 .

- 1(a) $0.1300 + j5.00 \text{ m}^{-1}$, 0.1300 Np/m , 5.00 rad/m ,
 1.256 m , $100.0 - j2.40 \Omega$, $199.9 \text{ m}/\mu\text{s}$; (b) 17.72 m .
 3(a) $0.3 \mu\text{H/m}$; (b) 83.3 pF/m ; (c) $0.481/-87.0^\circ$.

الموصل الثاني عشر

قائمة المصطلحات العلمية

(١)

Initial	ابتدائي
Dimensions	أبعاد
Direction	اتجاه
Amplitude	اتساع
Excitation	اثارة
Proof	اثبات
Ethyl	اثيل
Hollow	أجوف
Monopole	احادي القطب
Coordinate	احداثي
Circular cylindrical coordinates	احداثيات اسطوانية دائرية
Polar coordinates	احداثيات قطبية
Rectangular coordinates	احداثيات متعامدة
Penetration	اختراق
Discrepancy	اختلاف
Voluntary	اختياري - تطوعي
Device	اداة - جهاز
Tools	أدوات
Broadcasting	إذاعة
Erbium	أربيوم
Elevation	ارتفاع - مسقط راسي
Argon	ارجون
Displacement	إزاحة
Phase shift	إزاحة الطور
Exponent	أس
Substitution	استبدال - تعويض
Response	استجابة

Stereo	استريو
Polarization	استقطاب
Interpolation	استكمال من الداخل
Cylinder	اسطوانة
Wedge	اسفين
Technique	اسلوب تقنى
Exponential	اسى
Sign	اشارة
Radar signal	اشارة رادار
Radiation	اشعاع
Addition	اضافة - جمع
Perturbation	اضطراب
Frame of reference	اطار اسناد
Launching	اطلاق
Horizontal	افقى
Oxygen	اكسجين
Neodymium oxide	اكسيد نيوديميوم
Curl	التواء
Electron	الالكترون
Mechanism	آلية
Extension	امتداد
Propagation	انتشار
Wave propagation	انتشار الموجات
Selective	انتقائى
Translation	انتقال
Accomplishment	انجاز
Deflection	انحراف
Curvature	انحناء
Structure	انشاء - تكوين
Reflection	انعكاس
Permeability	انفاذية
Divergence	انفراج
Refraction	انكسار

Odometer	اودومتر
Elementary	اولی - ابتدائی
Hydrogen	ایدروجین
Iridium	ایریدیم

(ب)

Parameter	پارامتر
Paramagnetic	پارامغناطیسی
Sink	بالوعة
Dissipate	بدد
Tower	برج
Permalloy	برمالوی
Proton	پروتون
Beryllium	بریلیوم
Bismuth	بزموت
Battery	بطاریه
Platinum	پلاتین
Plasma	پلازما
Crystalline	بللوری
Marble	بلية
Potassium	پوتاسیوم
Porcelain	پورسلین (صینی)
Polypropylene	پولیپروپیلین
Polyethylene	پولیٹیلین
Indication	بیان - دلالة
Pyranol	پیرانول
Pyrex	پیرکس

(ت)

Hall effect	ٹائیر هول
Retardation	ٹاخیر - ٹاخیر
Permutation	تبدیل

Attraction	تجاذب
Experiment	تجربة
Empirical	تجريبى
Assembly	تجميع
Analysis	تحليل
Vector analysis	تحليل المتجهات
Analytical	تحليلى
Conversion	تحويل
Transformation	تحويل
Energy conversion	تحويل طاقة
Magnetostriction	تحضير بالمغناطيسية
Graphical	تخطيطى - بياني
Hysteresis	تخلفية - تخلف
Gradient	تدرج
Scale	تدريج - مقياس رسم
Flux	تدفق
Spin	تدويم - دوران مغزلى
Notation	تدوين
Superposition	تراكب
Version	ترجمة - صورة
Frequency	تردد
Radian frequency	تردد زاوى
Super high frequency (SHF)	تردد فوق العالى
Low frequency	تردد منخفض
Focusing	تركيز بؤرى
Leakage	تسرب
Saturation	تشبع
Configuration	تشكيل - هيئة - شكل هندسى
Classification	تصنيف
Xerography	تصوير جاف
Voluntary	تطوعى - اختياري
Perpendicularity	تعامد
Expression	تعبير

Definition	تعريف
Substitution	تعويض - استبدال
Variation	تغير
Periodic Variation	تغير دوري
Differentiation	تفاضل
Interpretation	تفسير - شرح
Teflon	تفلون
Progress	تقدم
Estimate	تقدير - يقدر
Radians	تقدير دائري
Aproximation	تقريب
Rounding off	تقريب
Shorting	تقصير (الدائرة)
Limitation	تقييد
Integration	تكامل
Symmetry	تمثل
Tangency	تماس
Tungsten	تنجستن
Arrangement	تنظيم
Refinement	تنقية
Fringing	تهذب
Parallelism	توازي
Harmonic	توافقي
Illustration	توضيح
Attenuation	توهين
Current	تيار
Eddy currents	تيارات دوامية
Displacement current	تيار ازاحة
Convection current	تيار حمل
Transient current	تيار عابر
Dc (direct current)	تيار مستمر
Barium titanate	تيتانات باريوم

(ث)

Steady	ثابت
Phase constant	ثابت الطور
Dielectric constant	ثابت العازل
Carbon dioxide	ثاني أكسيد الكربون
Constancy	ثابت
Thermistor	ترمستور
Gap	ثغرة - فجوة
Three - dimensional	ثلاثي الأبعاد
Snow	ثلج
Octant	ثمان
Dipole	ثنائي قطب

(ج)

Gadolinium	جادولينيوم
Galvanometer	جالفانومتر
Algebra	جبر
Twist	جدل - لى
Square root	جذر تربيعي
Root mean square	جذر متوسط المربع
Radical	جذري
Graphite	جرافيت
Granite	جرانيت
Germanium	جرمانيوم
Segment	جزء
Molecule	جزيء
Ice	جليد
Omnidirectional	لجميع الاتجاهات
Device	جهاز - أداة
Instrument	جهاز قياس
Potential	جهد
Retarded potential	جهد مؤخر
Atmosphere	جو

Joule	جول
Hyperbolic cosine	جيب تمام زائدي
hyperbolic sine	جيب زائدي

(ح)

Barrier	حاجز
Armature	حافطة المغناطيس
Steady state	حالة ثابتة
Ground state	حالة خمود (همود)
Charge carrier	حامل شحنة
Limestone	حجر جيرى
Volume	حجم
Differential volume	حجم تفاضلى
Iron	حديد
Cast iron	حديد زهر
Omission	حذف
Mobility	حركية
Beam	حزمة
Arithmetic	حساب
Calculus	حساب التفاضل والتكامل
Trigonometry	حساب المثلثات
Sensitivity	حساسية
Ring	حلقة
Clamping ring	حلقة تثبيت
Load	حمل
Electrolytic trough	حوض الكتروليتى

(خ)

Quotient	خارج قسمة
External	خارجى
Property	خاصية - مسلك
Conservative property	خاصية المحافظة
Characteristic	خاصية - خاصة - مميز

Ore	نخام
Experience	خبرة - يلاقى (يعانى)
Output	خرج - حصيلة
Map	خريطة - تخطيط
Error	خطأ
Delay line	خط تعويق (تأخير)
Line charge	خط شحنة (خط من الشحنة)
Longitude	خط طول
Latitude	خط عرض (أو زاوية خط العرض)
Slotted line	خط مشقوق
Transmission line	خط نقل
Streamlines	خطوط انسياب
Contour lines	خطوط مناسب (خطوط كتورية)
Pitch	خطوة
Linear	خطى
Cell	خلية

(د)

Circularly polarized	دائرى الاستقطاب
Circle	دائرة
Short circuit	دائرة قصر
Circuit	دائرة كهربية
Open circuit	دائرة مفتوحة
Integrated - circuit	دائرة متكاملة
Internal	داخلى
Function	دالة
Periodic function	دالة دورية
Diamagnetic	دايامغناطيسى
Input	دخل - مدخل
Temperature	درجة حرارة
Shield	درع - حائل
Ion propulsion	دفع أيونى
Accuracy	دقة

Waveguide	دليل موجي
Circulation	دوران
Spin	دوران مغزلي - تدويم
Cyclic	دوري
Infrared	دون الحمراء
Dysprosium	ديسبروزيوم
Thermodynamics	ديناميكا حرارية

(ذ)

Intrinsic	ذاتي
Automotive	ذاتي الحركة
Memory	ذاكرة
Vibration	ذبذبة
Crank handle	ذراع تدوير
Lsever arm	ذراع رافعة
Gold	ذهب
Two - dimensional	ذو بعدين - ثنائي الأبعاد
Lossy	ذو فقد

(ر)

Radome	رادوم
Vertex	رأس - قمة
Vertical	راسي
Order of magnitude	رتبة (عظم) مقدار
Marble	رخام
Plot	رسم
Diagram	رسم بياني
Sketch	رسم تخطيطي
Humidity	رطوبة
Significant figure	رقم معنوي
Thunderhead	ركام رعدی
Corner	ركن
Symbol	رمز

Superscript	رمز علوى
Resonant	رنان
Resonance	رنين
Blade	ريشة (مروحة أورفاص)

(ج)

Angle	زاوية
Acute angle	زاوية حادة
Glass	زجاج
Fiberglass	زجاج ليفى
Relaxation time	زمن تراخى

(س)

Liquid	سائل
Stationary	ساكن
Negative	سالب
Alloy	سبيكة
Steatite	سيتيت
Velocity	سرعة
Drift velocity	سرعة انسياق
Surface	سطح
Interface	سطح بينى
Gaussian surface	سطح جاوسى
Two sheeted hyperboloid	سطح زائدى أو طينين
Capacitive	سعوى
Capacitance	سعة
Partial capacitance	سعة جزئية
Stray capacitance	سعة شاردة
Normal incidence	سقوط عمودى
Wire	سلك
Silicon	سيلكون
Permittivity	سمحية
Azimuthal	سمتى

Sonar	سونار
Cesium	سيزيوم
Cyclotron	سيكلوترون
Sendust	سيندست

(ش)

Lattice	شبكة
Network	شبكة
Oblate spheroid	شبه كرة مفلطح
Semiconductor	شبه موصل
Space charge	شحنة حيزية
Surface charge	شحنة سطحية
Bound charge	شحنة مقيدة
Point charge	شحنة نقطية
Electric field intensity	شدة المجال الكهربى
Boundary conditions	شروط حدية
Strip	شريط
Microstrip	شريط دقيق
Audio tape	شريط صوتى
Cathode - ray	شعاع الكاثود
Work	شغل
Virtual work	شغل افتراضى
Transparent	شفاف
Shape	شكل
Perturb	شوش
Deform	شوه

(ص)

Explicit	صريح
Row	صف
Align	صف (يوضع فى صف)
Steel	صلب - فولاذ
Clay	صلصال

Diode	صمام ثنائي
Vacuum tube	صمام مفرغ - انبوية مفرغة
Image	صورة
Point form	صورة نقطية
Formula	صيغة

(ض)

Antiferromagnetic	ضديد الفرومغناطيسية
Multiplication	ضرب
Multiply	ضرب
Dot product	ضرب بعلامة النقطة
Cross product X	ضرب بعلامة X
Vector product	ضرب متجه
Scalar product	ضرب مقياسي
Pressure	ضغط
Combination	ضم - تجمع
Noise	ضوضاء

(ط)

Energy	طاقة
Kinetic energy	طاقة حركة
Energy stored	طاقة مختزنة
Energy expended	طاقة مستنفذة
Layer	طبقة
Subtract	طرح
Terminal	طرف
Relaxation method	طريقة الاسترخاء
Iteration method	طريقة التكرار
Phase	طور
Wavelength	طول موجة
Fold	طوى - طية

(ظ)

Phenomenon	ظاهرة
Skin effect	ظاهرة سطحية
Loss tangent	ظل الفقد

(ع)

Dielectric - Insulator	عازل
Factor - Operator	عامل
Quality factor	عامل الجودة
Power factor	عامل القدرة
Winding factor	عامل لف
Vector operator	عامل متجه
Calibrate	يعاير - يدريج
Acceleration	عجلة
Paddle wheel	عجلة تجديف
Number	عدد
Integral number	عدد صحيح
Numerical	عددي
Modulate	عدل
Dimensionless	عديم الابعاد
Bandwidth	عرض النطاق الترددي
Loop	عروة
Moment	عزم
Torque	عزم تدوير
Random	عشوائي
Inductor	عضو حث
Stub	عقب
Knot	عقدة
Reversal	عكس - قلب
Antiparallel	عكس التوازي (متوازي ومتضاد في الاتجاه)
Relationship	علاقة
Recurrence relation	علاقة تكرارية

Skin depth	عمق سطحي
Operation	عملية
Limiting process	عملية حدية
Column	عمود
Perpendicular, normal	عمودي
Rare earth elements	عناصر الأرض النادرة
Element	عنصر
Increment	عنصر تزايدى
Compensate	يعوض
Standard	عيارى - قياسي
Sample	عينة

(غ)

Dominant	غالب
Gas	غاز
Inert gas	غاز خامل
Thin film	غشاء رقيق
Elastic membrane	غشاء مرن
Nonlinear	غير خطى
Unbounded	غير محدود
Anisotropic	غير موحد الخواص

(ف)

Superferromagenetic	فائقة البارامغناطيسية
Aperture	فتحة
Postulate	فرض - يسلم بـ
Filamentary	فتيلى
Filament	فتيلة
Hole	فجوة - ثقب
Cavity	فجوة
Resonant cavity	فجوة رنانة
Inspection	فحص
Vacuum	فراغ

Space	فراغ
Divider	فرجار
Hypothesis	فرض
Superconductivity	فرط موصلية
Microwave oven	فرن بموجات دقيقة
	فروكهربية (مادة عازلة عسوية
Ferroelectric	الاستقطاب)
Ferromagnetic	فرومغناطيسية
Ferrite	فريت
Unique	فريد
Ferrimagnetic	فري مغناطيسية
Physiology	فسيولوجي (وظائف)
Separation	فصل - انفصال
Free space	فضاء حر
Loss	فقد
Paragraph	فقرة
Uncurling	فلك الالتواء
Index	فهرس
Ultraviolet	فوق البنفسجية
Volt	فولت
Voltmeter	فولتметр
Voltage	فولطية
Applied Voltage	فولطية مسلطة
Furlong	فيرلونج (٢٢٠ ياردة)
Physical	فيزيائي
Simultaneously	في نفس اللحظة - آنيا

(ق)

Susceptibility	قابلية التأثر
Rule	قاعدة
Substrate	قاعدة
Coupling	قارنة - تقارن

Commutative law	قانون التبادل
Associative law	قانون التجميع
Circuital law	قانون دائرى
Power	قدرة
Linearize	قرب خطيا
Tin	قصدير
Rail, Bar	قضيب
Bus bar	قضيب توصيل
Sector	قطاع
Electrode	قطب كهربي
Polar	قطبي
Branch cot	قطع تفرع
Core	قلب
Crest	قمة - ذروة
Bridge	قنطرة
Arc	قوس
Rectify	قوم
Force	قوة
Electromotive force (emf)	قوة دافعة كهربية (ق د ك)
Magnetomotive force (mmf)	قوة دافعة مغناطيسية (ق د م)
Coercive force	قوة قهرية
Mutual force	قوة متبادلة
Measure	قياس
Standard	قياس عيارى
Typical values	قيم نموذجية

(ك)

Candela	كانديلا (وحدة شدة اضاءة)
Sulfur	كبريت
Ferrous sulfide	كبريتيد حديدوز
	كابيل محورى (كابيل ذو موصلين
Coaxial cable	متحدى المحور)
Handbook	كتاب مختصر - كتيب

Mass	كتلة
Effective mass	كتلة فعالة
Density	كثافة
Flux density	كثافة تدفق
Current density	كثافة تيار
Alcohol	كحول
Krypton	كربتون
Bearing	كرسى تحميل
Sphere	كرة
Fraction	كسر - جزء
Detection	كشف
Chloride	كلوريد
Sodium chloride	كلوريد صوديوم
Cobalt chloride	كلوريد كوبالت
Quantitative	كمى
Quantity	كمية
Tensor	كمية ممتدة
Electricity	كهربية
Amber	كهرمان
Electrostatic	كهروستاتيكية
Electromagnetic	كهرومغناطيسية
Quartz	كوارتز
Qualitative	كيفية
Manner	كيفية - طريقة - أسلوب
Kilogram	كيلو جرام

(ل)

Summarize	لخص
Homonym	لفظة متجانسة
Winding	لفيفة - ملف
Turn	لفة
Sheet	لوح - لرخ

Dashboard
Logarithms
Helix

لوحة أجهزة قياس
لوغاريتمات
لولب - حلزون

(٢)

Turntable
Fluid
Substance
Solid
Macroscopic
Infinity
Relay
Inherent
Remnant
Residual
Homogeneous
Vector
Position Vector
Concentric
Alternating
Equipotential
Series
Taylor's series
Combined
Vector identity
Neutral
Successive
Orthogonal
Polycrystalline
Multipole
Pertinent
Variable
Argument

مائلة دوارة
مائع
مادة
مادة صلبة
ماكروسكوبي
مالا نهاية
متابع
متأصل
متبق
متبق - متخلف
متجانس
متجه
متجه موضع
متحد المركز
متردد
متساوي الجهد
متسلسلة - على التوالي
متسلسلة تايلور
متضام
متطابقة متجهة (اتجاهية)
متعادل
متعاقب - متالي
متعامد
متعدد البلورات
متعدد القطب
متعلق
متغير
متغير مطلق

Time - varying	متغير مع الزمن
Acceptor	متقبل - قابل
Proportional	متناسب
Inversely proportional	متناسب عكسيا
Paradoxical	متناقض ظاهريا
Infinitesimal	متناهي الصغر
Parallelogram	متوازي أضلاع
Rectangular parallelepiped	متوازي مستطيلات قائم
Consistent	متوافق
Intermediate	متوسط
Incandescent	متوهج
Triangle	مثلث
Field	مجال
Domain	مجال - مقاطعة
Static field	مجال استاتيكي
Magnetic field	مجال مغناطيسي
Adjacent	مجاور
Probe	مجس
Lumped	مجمع
Sum	مجموع
Set	مجموعة
Array	مجموعة مرتبة
Speaker	مجهاز
Inductance	محاثة
Mutual inductance	محاثة متبادلة
Conservative	محافظ
Axes	محاور
Shielded	محجب
Determinant	محددة
Forbidden	محرم
Enclosed	محصور
Substation	محطة فرعية
Locus	محل هندسي

Electrolytic solution	محلول الكتروليتي
Axis	محور
Transformer	محول
Perimeter	محيط
Circumferential	محيطي
Cone	مخروط
Chart	مخطط
Orbit	مدار
Graduated	مدرج
Electron gun	مدفعة الكترونيات
Range	مدى
Period	مدة دورة - فترة
Oscillator	مذبذب
Zero reference	مرجع صفري
Oscilloscope	موسمة تذبذبات
Rationalized	مرشد
Guide	مرشد - موجّه - دليل
Transmitter	مرسل - جهاز ارسال
Complex	مركب
Component	مركبة
Resonator	مرنان
Path	مسار
Trajectory	مسار (قلف)
Distance	مسافة
Admittance	مسامحة
Contribution	مساهمة
Equality	مساواة - تساوي
Rectangle	مستطيل
Transverse	مستعرض
Continuous	مستمر - متصل
Plane	مستوى
Level	مستوى

Reference plane	مستوى اسناد
Projection	مسطط
Type recorder	مسجل شريطي
Track	مسلك
Normalized	مساوي - معاير
Coplanar	مشتركة المستوى
Partial derivative	مشتقة جزئية
Radiator	مشع
Nomenclature	مصطلحات - مسميات
Matrix	مصفوفة
Plant	مصنع
Opposite	مضاد - مقابل
Integral multiple	مضاعف صحيح
Preamplifier	مضخم متقدم
Luminous	مضيء
Identical	مطابق
Phasor	مطاور
Equation	معادلة
Continuity equation	معادلة الاستمرارية
Diffusion equation	معادلة الانتشار
Differential equation	معادلة تفاضلية
Manipulation	معالجة
Transmission coefficient	معامل النفاذ
Impedance	معاوقة
Input impedance	معاوقة دخل
Characteristic impedance	معاوقة مميزة
Normalized	معاير - مساوي
Equipment	معدة
Donor	معطى
Information	معلومات
Criterion	معيار
Embedded	مغمور
Permanent magnet	مغناطيس دائم

Electromagnet	مغناطيس كهربي
Magnetics	مغناطيسيات
Magnetism	مغناطيسية
Magnetron	مغنترون
Magnetite	مغنتيتي
Reactive	مفاعل
Reactance	مفاعلة
Switch	مفتاح كهربي
Expansion	مفكوك
Comparable	مقارن
Domain	مقاطعة - مجال
Resistor	مقاوم
Resistivity	مقاومية
Magnitude	مقدار
Coupled	مقرنة
Distilled	مقطر
Longitudinal section	مقطع طولی
Truncated	مقطوع - مبتر
Reciprocal	مقلوب
Wattmeter	مقياس قدرة
Scalar	مقياس - كمية مقياسية
Integrand	مكامل
Amplified	مكبر
Capacitor	مكثف
Coaxial capacitor	مكثف محوري (مكثف ذو موصلين متحلين المحور)
Detector	مكتشاف
Quantized	مكمي
Rochelle salt	ملح روشيل
Summary	ملخص
Coil - Winding	ملف
Toroid	ملف حلقي
Solenoid	ملف لولبي

Tangent	مماس
Tangential	مماسى
Reluctance	ممانعة
Analogous	مناظر
Source	منبع
Manganese	منجنيز
Induced	منتجة بالحث - مستحثة
Uniform	منتظم
Spiral ramp	منحدر حلزوني
Curve	منحنى
Curvilinear	منحنى الخطوط
Dehydrated	منزوع منه الماء
Fused	منصهر
Logical	منطقي
Region	منطقة
Discrete	متفصل
Assorted	متنوع
Matching	مواءمة
Materials	مواد
Insulating materials	مواد عازلة
Parallel	موازى
Conductance	مواصلة
Tuned	موالف
Temporarily	مؤقتا
Positive	موجب
Wave	موجة
Microwave	موجة دقيقة
Incident wave	موجة ساقطة
Traveling wave	موجة متنقلة
Standing wave	موجة واقفة
Isotropic	موحد الخواص
Conductor	موصل
Perfect conductor	موصل تام

Shunt	موصل على التوازي
Conductivity	موصلية
Location	موضع
Generator	مولد
Signal generator	مولد اشارات
Ripples	موجبات
Balance	ميزان
Torsion balance	ميزان التواء
Maser	ميزر
Mechanics	ميكانيكا
Applied mechanics	ميكانيكا تطبيقية
Microscopic	ميكروسكوبي
Slope	ميل
Mumetal	ميومتال

(ن)

Pulse	نبضة
Brass	نحاس اصفر
Depletion	نرح
Publication	نشر
Semi - infinite	نصف لانهاى
Band	نطاق
Valence band	نطاق تكافؤ
Energy band	نطاق طاقة
Cartesian coordinate system	ظام احداثيات كرتيزية
Spherical coordinate system	نظام احداثيات كروية
Binomial theorem	نظرية ذات الحدين
Quantum theory	نظرية الكم
Uniqueness theorem	نظرية الـوحدانية
Point	نقطة
Origin	نقطة الاصل
Freezing point	نقطة تجمد
Transmission	نقل - نفاذ

Pattern	نمط
Final	نهائي
Minimum	نهاية صغرى
Maximum	نهاية عظمى
Nucleus	نواة
Nickel	نيكل
Nickel ferrite	نيكل حديدى
Neoprene	نيوبرين

(هـ)

Helium	هليوم
Geometry	هندسة
Antenna	هوائى
Transmitting antenna	هوائى ارسال
Receiving antenna	هوائى استقبال
Magnetohydrodynamics	هيدروديناميكا مغناطيسية
Hydroelectric	هيدروكهربى
Hydraulics	هيدروليكا

(و)

Orient	وجه
Unit vector	وحدة متجه
Distribute	وزع
Linkage	وصلية
Junction	وصلة - ملتقى
Contradict	يتعارض مع
Yttrium	يوتريوم

GLOSSARY

(A)

Acceleration	عجلة
Acceptor	متقبل - قابل
Accomplishment	انجاز
Accuracy	دقة
Acute angle	زاوية حادة
Additon	جمع (اضافة)
Adjacent	مجاور
Admittance	مساحة
Alcohol	كحول
Algebra	جبر
Align	يصف (يضع في صف)
Alloy	سبيكة
Alternating	متعدد
Amber	كهرمان
Amplifier	مكبر
Amplitude	اتساع
Analogous	بناظر
Analysis	تحليل
Analytical	تحليلي
Angle	زاوية
Anisotropic	غير موحد الخواص
Antenna	هوائي
Antiferromagnetic	ضديد الفرومغناطيسية
Antiparallel	عكسي التوازي (متوازي ومتضاد في الاتجاه)
Aperture	فتحة
Applied mechanics	ميكانيكا تطبيقية

Applied foltage	توليفية مسلطة
Approximation	تقريب
Arc	قوس
Argon	ارجون
Argument	متغير مطلق
Arithmetic	حساب
Arrangement	تنظيم
Armature	حافطة المغناطيس
Array	مجموعة مرتبة
Assembly	تجميع - مجمعة
Associative law	قانون التجميع
Atmosphere	جو
Attenuation	توهين
Attraction	تجاذب
Audion tape	شريط صوتي
Automotive	ذاتي الحركة
Axes	محاور
Axis	محور
Azimuthal	سمتي

(B)

Balance	ميزان
Band	نطاق
Bandwidth	عرض النطاق الترددي
Bar	قضيب
Barium titanate	تيتانات باريوم
Barrier	حاجز
Battery	بطارية
Beam	حزمة
Bearing	كرسي تحميل
Beryllium	بريليوم
Binomial Theorem	نظرية ذات الحدين
Bismuth	بزموت
Blade	ريشة (مروحة أرفاص)

Boundary conditions	شروط حدود
Bound charge	شحنة مقيدة
Branch cut	قطع تفرع
Brass	نحاس أصفر
Bridge	قنطرة
Broadcasting	إذاعة
Bus bar	قضيب توصيل

(C)

Calculus	حساب التفاضل والتكامل
Calibrate	يعاير - يدرج
Candela	كانديلا (وحدة شدة اضاءة)
Capacitance	سعة
Capacitive	سعوى
Capacitor	مكثف
Carbon dioxide	ثانى أكسيد الكربون
Cartesian coordinate system	نظام إحداثيات كرتيزية
Cast iron	حديد زهر
Cathode - ray	شعاع الكاثود
Cell	لمجوه
Cavity	خلية
Cesium	سيزيوم
Characteristic	خاصة - شاصية - مميز
Characteristic impedance	معاوقة مميزة
Charge carrier	حامل شحنة
Chart	مخطط
Chloride	كلوريد
Circle	دائرة
Circuit	دائرة كهربية
Circuit law	قانون دائرى
Circular cylindrical coordinates	إحداثيات اسطوانية دائرية
Circularly polarized	دائرى استقطاب
Circulation	دوران

Circumferential	محيطى
Clamping ring	حلقة تثبيت
Classification	تصنيف
Clay	صلصال
Coaxial cable	كابل محوري (كابل ذو موصلين متحدى المحور)
Coaxial capacitor	مكثف محوري (مكثف ذو موصلين متحدى المحور)
Cobalt chloride	كلوريد كوبلت
Coercive force	قوة قهرية
Coil	ملف
Column	عمود
Combination	ضم - تجميع
Combined	متضام
Commutative law	قانون التبادل
Compass	بوصلة - فرجار
Compensate	يعوض
Complex	مركب
Component	مركبة
Concentric	مُتحد المركز
Conductance	مواعلة
Conductivity	موصلية
Conductor	موصل
Cone	مخروط
Configuration	تشكيل - هيئة - شكل هندسى
Conservative	محافظ
Consistent	متوافق
Continuity equation	معادلة الاستمرارية
Continuous	مستمر - متصل
Contour lines	خطوط مناسيب (خطوط كنتورية)
Contribution	مساهمة
Convection current	تيار حمل
Conversion	تحويل

Corrdinate	احداثي
Coplanar	مشتركة المستوى
Core	قلب
Corner	ركن
Coupled	مقترنة
Coupling	تقارن - قارنة
Crank handle	ذراع تدوير
Crest	قمة - ذروة
Criterion	معيار
Cross product	الضرب بعلامة X
Crystalline	بللوري
Curl	التواء
Current	تيار
Current density	كثافة تيار
Curvature	انحناء
Curve	منحنى
Curvilinear	منحنى الخطوط
Cyclic	دوري
Cyclotron	سيكلوترون
Cylinder	اسطوانة

(D)

Dashboard	لوحة أجهزة قياس
D.C. (direct current)	تيار مستمر
Definition	تعريف
Deflection	انحراف
Deform	يشوه
Dehydrated	منزوع من الماء
Delay line	خط تمويق (تأخير)
Demagnetize	يزيل التمهنت
Density	كثافة
Depletion	نزع
Derivative	مشتقة

Detection	كشف
Detector	مكتشاف
Determinant	محددة
Device	جهاز - أداة
Diagram	رسم بياني
Diamagnetic	دايامغناطيسي
Dielectric	عازل
Dielectric constant	ثابت العازل
Differential equation	معادلة تفاضلية
Differential volume	حجم تفاضلي
Differentiation	تفاضل
Diffusion equation	معادلة الانتشار
Dimension	بعد
Dimensionless	عديم الأبعاد
Diode	صمام ثنائي
Dipole	ثنائي قطب
Direction	اتجاه
Discrepancy	اختلاف
Discrete	منفصل
Displacement	ازاحة
Displacement current	تيار ازاحة
Dissipate	يبدد
Distance	مسافة
Distilled	مقطر
Distribute	يوزع
Divergence	انفرج
Divider	فرجار
Domain	مقاطعة - مجال
Dominant	غالب - سائد
Donor	معطي
Dot product	ضرب بعلامة النقطة
Drift velocity	سرعة انسياق
Dysprosium	ديسبروزيوم

(E)

Eddy currents	تيارات دوامية
Effective mass	كتلة فعالة
Elastic membrane	غشاء مرن
Electric field intensity	شدة المجال الكهربى
Electricity	كهربية
Electrode	قطب كهرى
Electrolytic solution	محلول الكتروليتى
Electrolytic trough	حوض الكتروليتى
Electromagnet	مغناطيس كهرى
Electromagnetic	كهرومغناطيسى
Electromotive force (emf)	قوة دافعة كهربية (ق د ك)
Electron	الالكترون
Electron gun	مدفعة الكترونات
Electrostatic	كهروستاتيكي
Element	عنصر
Elementary	أولى - ابتدائى
Elevation	ارتفاع - مسقط رأسى
Embedded	مغمور
Empirical	تجربى
Enclosed	محصور
Energy	طاقة
Eergy band	نطاق طاقة
Energy conversion	تحويل طاقة
Energy expended	طاقة مستنفذة
Energy stored	طاقة مختزنة
Equality	مساواة - تساوى
Equation	معادلة
Equipment	تجهيز - معمل
Equipotential	متساوى الجهد
Erbium	أربيوم
Error	خطأ
Estimate	تقدير - يقدر

Ethyl	اثليل
Excitation	اثارة
Expansion	مفكوك
Experience	خبرة - يلاقى (يعانى)
Experiment	تجربة
Explicit	صریح
Exponent	أس
Exponential	اسى
Expression	تعبير
Extension	امتداد
External	خارجى
Factor	(F) عامل
Ferrimagnetic	فرى مغناطيسى
Ferrite	فريت
	فروكهربية (مادة عازلة عضوية
Ferroelectric	الاستقطاب)
Ferromagnetic	فرومغناطيسى
Ferrous	كبريتيد حديدوز
Fiberglass	زجاج ليفى
Field	مجال
Filament	فتيلة
Final	نهائى
Fluid	مائع
Flux	تدفق
Flux density	كثافة تدفق
Focusing	تركيز بؤرى
Fold	يطوى طيه
Forbidden	محرم
Force	قوة
Formula	صيغة
Fraction	كسر - جزء
Frame of reference	اطار اسناد
Free space	فضاء حر

Freezing point	نقطة تجمد
Frequency	تردد
Fringing	تهذب
Function	دالة
Furlong	فيرلونج (٢٢٠ ياردة)
Fused	منصهر

(G)

Gadolinium	جادولينيوم
Galvanometer	جالفانومتر
Gap	ثغرة - فجوة
Gas	غاز
Gaussian surface	سطح جاوسي
Generator	مولد
Geometry	هندسة
Germanium	جرمانيوم
Glass	زجاج
Gold	ذهب
Gradient	تدرج
Graduated	مدرج
Granite	جرانيت
Graphical	تخطيطي - بياني
Graphite	جرافيت
Ground state	حالة خمود (خمود)
Guide	يرشد - يوجه - دليل

(H)

Hall effect	تأثير هول
Handbook	كتاب مختصر
Harmonic	توافقي
Helium	هليوم
Helix	لولب - حلزون
Hole	فجوة - ثقب

Hollow	اجوف
Homogeneous	متجانس
Homonym	لفظة مجانسة
Horizontal	أفقى
Humidity	رطوبة
Hydraulics	هيدروليكا
Hydroelectric	هيدروكهربي
Hydrogen	ايدروجين
Hyperbolic cosine	جيب تمام زائدى
Hyperbolic sine	جيب زائدى
Hypothesis	فرض
Hysteresis	تخلفية - تخلف

(I)

Ice	جليد
Identical	مطابق
Illustration	توضيح
Image	صورة
Impedance	معاوقة
Incandescent	متوهج
Incident wave	موجة ساقطة
Increment	عنصر تزايدى
Index	فهرس
Indication	بيان - دلالة
Induced	منتجة بالحث - مستحثة
Inductance	محالة
Inductor	عضو حث
Inert gas	غاز خامل
Infinitesimal	متناهى الصغر
Infinity	مالانهاية
Information	معلومات
Infrared	دون الحمراء
Inherent	متأصل

Initial	ابتدائي
Input	دخل - مدخل
Input impedance	معاوقة دخل
Inspection	فحص
Instrument	جهاز قياس
Insulating materials	مواد عازلة
Insulator	عازل
Integral multiple	مضاعف صحيح
Integral number	عدد صحيح
Integrand	تكامل
Integrated circuit	دائرة متكاملة
Integration	تكامل
Interface	سطح بيني
Intermediate	متوسط
Internal	داخلي
Interpolation	استكمال من الداخل
Interpretation	تفسير - شرح
Intrinsic	ذاتي
Inversely proportional	متناسب عكسيا
Ion propulsion	دفع ايوني
Iridium	ايريديوم
Iron	حديد
Isotropic	موحد الخواص
Iteration method	طريقة التكرار

(J)

Joule	جول
Junction	وصلة - ملتقى

(K)

Kilogram	كيلوجرام
Kinetic energy	طاقة حركة
Knot	يعقد - عقدة

Krypton	كربتون
---------	--------

Latitude	خط عرض (زاوية خط عرض)
----------	-----------------------

(L)

Lattice	شبكة
Launching	اطلاق
Layer	طبقة
Leakage	تسرب
Level	مستوى
Lever arm	ذراع رافعة
Limestone	حجر جيري
Limitation	تقييد
Limiting process	عملية حدية
Linear	خطي
Linearize	يقرب خطيا
Line charge	خط شحنة (خط من الشحنة)
Link	يصل د يربط
Linkage	وصلية
Liquid	سائل
Load	حمل
Location	موضع
Locus	محل هندسي
Logarithm	لوغاريتم
Logical	منطقي
Longitude	خط طول
Longitudinal section	مقطع طولى
Loop	عروة
Loss	فقد
Loss tangent	ظل الفقد
Lossy	ذو فقد
Low frequency	تردد منخفض
Luminous	مضيء
Lumped	مجمع

(M)

Macroscopic	ماكروسكوبى
Magnetic field	مجال مغناطيسى

Magnetics	مغناطيسيات
Magnetism	مغناطيسية
Magnetite	مغنتيتي
Magnetohydrodynamics	هيدروديناميكا مغناطيسية
Magnetomotive force (mmf)	قوة دافعة مغناطيسية (ق د م)
Magnetostriction	تخصير بالمغناطيسية
Magnetron	منطرون
Magnitude	مقدار
Manganese	منجنيز
Manipulation	معالجة
Manner	كيفية - طريقة - أسلوب
Map	خريطة - تخطيط
Marble	رخام - بلية
Maser	ميزر
Mass	كتلة
Matching	مواءمة
Materials	مواد
Matrix	مصفوفة
Maximum	نهاية عظمى
Measure	يقيس
Mechanics	ميكانيكا
Mechanism	آلية
Memory	ذاكرة
Microscopic	ميكروسكوبي
Microstrip	شريط دقيق
Microwave	موجة دقيقة
Microwave oven	فرن بموجات دقيقة
Minimum	نهاية صغرى
Mobility	حركية
Modulate	عدل
Molecule	جزيء
Moment	عزم
Monopole	أحادي قطب

Multiplication	ضرب
Multiply	يضرب
Multipole	متعدد أقطاب
Mumetal	ميوميتال
Mutual force	قوة متبادلة
Mutual inductance	محاثة متبادلة

(N)

Negative	سالبة
Neodymium	أكسيد نيوديميوم
Neoprene	نيوبرين
Network	شبكة
Neutral	متعادل
Nickel	نيكل
Nickel ferrite	نيكل حديدي
Noise	ضوضاء
Nomenclature	مصطلحات - مسميات
Nonlinear	غير خطي
Normal	عمودي
Normal incidence	سقوط عمودي
Normalized	مسنوي - معاير
Notation	تدوين
Nucleus	نواة
Number	عدد
Numerical	عددي

(O)

Oblate spheriod	شبه كرة مفلطح
Octant	ثمان
Odometer	أودومتر
Omission	حذف
Omnidirectional	لجميع الاتجاهات
Open circuit	دائرة مفتوحة

Operation	عملية
Operator	عامل
Opposite	مضاد - مقابل
Orbit	مدار
Order of magnitude	رتبة (عظم) مقدار
Ore	خام
Orient	يوجه
Origin	نقطة أصل
Orthogonal	متعامد
Oscillator	مذبذب
Oscilloscope	مرسمة ذبذبات
Output	خرج - حصيله
Oxygen	أكسجين

(P)

Paddle wheel	عجلة تجديد
Paradoxical	متناقضة ظاهريا
Paragraph	فقرة
Parallel	موازي
Parallelepiped	متوازي سطوح
Parallelism	توازي
Parallelogram	متوازي أضلاع
Paramagnetic	بارامغناطيسي
Parameter	بارامتر
Partial capacitance	سعة جزئية
Partial derivative	مشتقة جزئية
Path	مسار
Pattern	نمط
Penetration	اختراق
Perfect conductor	موصل تام
Perimeter	محيط
Period	مدة دورة - فترة
Periodic function	دالة دورية

Periodic variation	تغير دورى
Permalloy	برمالوى
Permanent magnet	مغناطيس دائم
Permeability	انفاذية
Permittivity	سماحية
Permutaton	تبديل
Perpendicular	عمودى
Pertinent	متعلق
Perturbation	اضطراب
Phase	طور
Phase constant	ثابت طور
Phase shift	ازاحة طور
Phasor	مطاور
Phenomenon	ظاهرة
Physical	فيزيائى
Physiology	فسيولوجى (وظائفى)
Pitch	خطوة
Plane	مستوى
Plant	مصنع
Plasma	بلازما
Platinum	بلاتين
Point	نقطة
Point charge	شحنة نقطية
Point form	صورة نقطية
Polar	قطبى
Polar corrdinates	احداثيات قطبية
Polarization	استقطاب
Polycrystalline	متعدد البللورات
Polyethylene	بوليثيلين
Polypropylene	بوليپروپيلين
Position vector	متجه موضع
Positive	موجب
Postulate	يقترض - مسلم بـ

Potassium	بوتاسيوم
Potential	جهد
Power	قدرة
Power factor	عامل قدرة
Preamplifier	مضخم متقدم
Pressure	ضغط
Probe	مجس
Prcelain	بورسيلين (صيني)
Progress	تقدم
Projection	مسقط
Proof	اثبات
Propagation	انتشار
Property	خاصية
Proportional	متناسب
Proton	بروتون
Publication	نشر
Pulse	نبضة
Pyranol	بيرانول
Pyrex	بيركس

(Q)

Qualitative	كيفي
Quality factor	عامل الجودة
Quantitative	كمي
Quantity	كمية
Quantized	مكمي
Quantum theory	نظرية الكم
Quartz	كوارتز
Quotient	خارج القسمة

(R)

Radar signal	اشارة رادار
Radian frequency	ترددى زاوى

Radians	تقدير دائري
Radiation	اشعاع
Radiator	مشع
Radical	جذري
Radome	رادوم
Rail	قضيب
Random	عشوائي
Range	مدى
Rare earth elements	عناصر الأرض النادرة
Rationalized	مرشد
Reactance	مفاعلة
Reactive	مفاعل
Receiving antenna	هوائي استقبال
Reciprocal	مقلوب
Rectangle	مستطيل
Rectangular coordinates	إحداثيات متعامدة
Rectangular parallelepiped	متوازي مستطيلات قائم
Rectify	يقوم
Recurrence relationship	علاقة تكرارية
Reference plane	مستوى اسناد
Refinement	تنقية
Reflection	انعكاس
Refraction	انكسار
Region	منطقة
Relaxation method	طريقة الاسترخاء
Relaxation time	زمن تراخي
Relay	متابع
Reluctance	ممانعة
Remnant	متبق
Residual	متبق - متخلف
Resistivity	مقاومية
Resistor	مقاوم
Resonance	رنين

Resonant	رنان
Resonant cavity	فجوة رنانة
Resonator	مرنان
Response	استجابة
Retardation	تأخير
Retarded potential	جهد مؤخر
Reversal	عكس - قلب
Ring	حلقة
Rochelle salt	ملح روشيل
Root mean square	جذر متوسط المربع
Rounding off	تقريب
Row	صف
Rule	قاعدة

(S)

Sample	عينة
Saturation	تشبع
Scalar	مقياسي - كمية مقياسية
Scalar product	ضرب مقياسي
Scale	تدرج - مقياس رسم
Sector	قطاع
Segment	جزء
Selective	انتقائي
Semiconductor	شبه موصل
Semi - infinite	نصف لانهائي
Sendust	سيندست
Sensitivity	حساسية
Separation	فصل - انفصال
Series	على التوالي - متسلسلة
Set	مجموعة
Shape	شكل
Sheet	لوح - فرخ
Shield	درع - حائل

Shielded	محجب - مدرع
Short	دائرة قصر
Shorting	تقصير (الدائرة)
Shunt circuit	موصل على التوازي
Sign	اشارة
Signal generator	مولد اشارات
Singificant figure	رقم معنوى
Silicon	سيلكون
Simultaneously	فى نفس اللحظة - انها
Sink	بالوعة
Sketch	رسم تخطيطى
Skin depth	عمق سطحى
Skin effect	ظاهرة سطحية
Slope	ميل
Slotted line	خط مشقوق
Snow	ثلج
Sodium chloride	كلوريد صوديوم
Solenoid	ملف لولبى
Sonar	سونار
Source	منبع
Space	فراغ
Space	شحنة حيزية
Speaker	مجهاز
Sphere	كرة
Spherical coordinate system	نظام إحداثيات كروية
Spin	دوران مغزلى - تدويم
Spiral ramp	منحدر حلزوى
Square root	جذر تربيعى
Standard	عيارى - قياسى
Standing wave	موجة واقفة
Static field	مجال استاتيكي
Stationary	ساكن
Steady	ثابت

Steady - state	حالة ثابتة
Steatite	ستيتيت
Steel	صلب - فولاذ
Stereo	استريو
Stray capacitance	سعة إشادة
Streamlines	خطوط انسياب
Strip	شريط
Structure	انشاء - تكوين
Stub	عقب
Substance	مادة
Substation	محطة فرعية
Substitution	تعويض - استبدال
Subtract	يطرح
Substrate	قاعدة
Successive	متعاقب - متتالي
Sulfur	كبريت
Sum	مجموع
Summarize	يلخص
Summary	ملخص
Superconductivity	فرط موصلية
Super high frequency (SHF)	تردد فوق العالي
Superparamagnetic	فائقة البارامغناطيسية
Superposition	تراكب
Superscript	رمز علوي
Surface	سطح
Surface charge	شحنة سطحية
Susceptibility	قابلية التأثر
Switch	مفتاح كهربى
Symbol	رمز
Symbolize	يرمز
Symmetry	تماثل

Tangency	تماس
Tangent	مماس
Tangential	مماسى
Tape recorder	مسجل شريطى
Taylor's series	متسلسلة تايلور
Technique	اسلوب تقنى - تقنية
Teflon	تفلون
Temperature	درجة حرارة
Temporarily	مؤقتا
Tensor	كمية ممتدة
Terminal	طرف
Thermistor	ثرمستور
Thermodynamics	ديناميكا حرارية
Thin film	غشاء رقيق
Three - dimensional	ثلاثى الأبعاد
Thunderhead	ركام رعدى
Time - varying	متغير مع الزمن
Tin	قصدير
Tools	أدوات
Toroid	ملف حلقي
Torque	عزم تدوير
Torsion balance	ميزان التواء
Tower	برج
Track	مسلك
Trajectory	مسار قذف
Transformation	تحويل
Transformer	محول
Transient current	تيار عابر
Translation	انتقال
Transmission	نقل - نفاذ
Transmission coefficient	معامل النفاذ
Transmission line	خط نقل
Transmitter	مرسل - جهاز ارسال

Transmitting antenna	هوائى ارسال
Transparent	شفاف
Transverse	مستعرض
Traveling wave	موجة متنقلة
Triangle	مثلث
Trigonometry	حساب المثلثات
Truncated	مقطوع - مبثور
Tuned	موالقب
Tungsten	تنجستن
Turn	لفه
Turnatable	مائدة دوارة
Twist	يجدل - لى
Two - dimensional	ذو بعدين - ثنائى الأبعاد
Two-sheeted hyperboloid	سطحا زالديا ذو طيتين
Typical calues	قيم نموذجية

(U)

Ultraviolet	فوق البنفسجية
Unbounded	غير محدد
Uncurling	فك الالتواء
Uniform	منتظم
Unique	فريد
Uniqueness theorem	نظرية الوحدانية
Unit vector	وحدة متجه

(V)

Vacuum	فراغ
Vacuum tube	صمام مفرغ - انبوية مفرغة
Valence band	نطاق تكافؤ
Variable	متغير
Variation	تغير
Vector	متجه

Vector analysis	تحليل المتجهات
Vector identity	متطابقة متجهة (اتجاهية)
Vector operator	عامل متجهة
Vector product	ضرب متجه
Velocity	سرعة
Version	ترجمة - صورة
Vertical	رأسي
Vertex	رأس - قمة
Vibration	ذبذبة
Virtual work	شغل افتراضي
Volt	فولت
Voltage	فولتية
Voltmeter	فولتمتر
Volume	حجم
Voluntary	تطوعي - اختياري

(W)

Wattmeter	مقياس قدرة
Wave	موجة
Waveguide	دليل موجي
Wavelength	طول موجة
Wave propagation	انتشار الموجات
Wedge	اسفين
Winding	ملف لفيفة
Winding factor	عامل لف
Wire	سلك
Work	شغل

(X)

Xerography	تصوير جاف
------------	-----------

(Y)

Yttrium	يوتريوم
---------	---------

(Z)

Zero reference	مرجع صفري
----------------	-----------

الفهرس الأبحدى

- اتجاه متجه (١٥ ، ٥٤ ، ٦٠)
 اتجاهية (متجهة) ، دالة (٩ ، ٢٠)
 أحادى قطب هوائى (٤٩٤ ، ٤٩٦)
 احداثيات :
 - قطبية (٢٤)
 - نقطة (١١)
 احداثيات ، محاور (١١ ، ١٢ ، ٢٤ ، ٢٩)
 احداثيات منحنية المخطوط (٣٣ ، ٥٠١ ، ٥٠٤)
 اختراق ، عمق (٤٠٩)
 اختصارات وحدات ، جدول لـ (٥١٠ ، ٥١١)
 أرض ، (١٠٨)
 ازاحة ، (٦٨)
 مسلفة موجهة ، (١٦)
 ازاحة ، تدفق ، (٦٨)
 ازاحة تيار (٣٦٣ - ٣٦٨ ، ٤٠٧ ، ٤٧٤)
 ازاحة طور ، (٣٩٩ ، ٤١٧ ، ٤١٨)
 ازاحة ، كثافة ، (٦٨)
 ازاحة ، كثافة تدفق ، (٦٨)
 ازاحة ، كثافة تيار ، (٣٦٥ ، ٣٦٨ ، ٤٠٠ ، ٤٠٧)
 استبدال الدوائر (٣٦٢)
 استقطاب ، (١٥٥ ، ١٥٩ ، ١٦٥ ، ٣٧٠ ، ٤٠٧)
 استمرارية التيار (١٣٩)
 اسطح :
 احداثيات اسطوانية (٢٦)
 احداثيات كرتيزية (١٢)
 احداثيات كروية (٣١)
 اسطوانة :
 دائرية (٢٤)
 سعة - الى مستوى (١٧٦)
 اشعاع (٤٧٣ ، ٤٨٤ ، ٤٩٦)
 اشعاع ، مقارمة (٤٩٢ ، ٤٩٥)
 التواء (٢٦٣ ، ٢٧٠ ، ٣٦٣ ، ٣٧٦ ، ٥٠٤)
 معرف (٢٦٥)
 الكتروليتى ، حوض (٢٠٣)
 الكترون (٤١ ، ١٤٠ ، ١٥٣ ، ٢٢٨ ، ٥١٥)
 توصيل (١٤٢)
 حر (١٤١)
 دوران مغزلى (٣١٦ ، ٣١٨)
 شمعة حلى (٥١٥)
 كتلة (٤١ ، ٥١٥)
 نصف قطر (٤١)
 الكترون مدار (١٤١ ، ٣١٦ ، ٣١٨)
 امير . أ . م (٢٤٧)
 امير قانون دائرى ، (٢٤٨ ، ٢٥٥ ، ٢٦٢ ، ٢٦٥ ، ٣٤٣ ، ٣٦٦ ، ٣٦٧)
 الصورة النقطية (٢٧١ ، ٢٩٠ ، ٣٦٥ ، ٣٧٢ ، ٤٨٧)
 امير ، قانون الشغل (أنظر امير ، قانون دائرى)
 امير قانون لعنصر التيار (أنظر قانون بيو-سافار)
 امير - لفة (٣٢٩)
 امير ، معرف (١٣٧ ، ٥٠٦)
 اميرى ، تيار (مفيد) ، (٣٢٠ ، ٣٢٤ ، ٣٦٥)
 انتشار ، (٣٧٧ ، ٣٩١ ، ٣٩٦ ، ٤٠٧ ، ٤٨٨)
 انسياب مائع ، تخطيط (٢٠٨)
 انسيابى ، سرعة (١٤٢)
 انعكاس (٤١٣ ، ٤٢٠ ، ٤٤٠ ، ٤٤١)
 انفاذية ، (٣٢١ ، ٣٢٦)
 جدول قيم (٥١٤)
 - لفضاء حر معرفة (٢٧٦ ، ٥٠٦ ، ٥١٥)
 - نسبية (٣٢٣)
 انفراج (٨٥ ، ٨٨ ، ١٤٠ ، ١٨٧ ، ٣٧٦ ، ٥٠٣)
 معرف (٨٦)
 أنماط الهوائى (٤٩٠)
 أورستيد ، هـ . س . (٣٥٦)
 أوم ، ج . س (١٤٣)
 أوم ، معرف (١٤٥)
 بالوعة (٨٦)
 بارامترات ، خط نقل (٤٤٣ ، ٤٤٧)
 باريوم تيناتات (١٥٩)

- بروتون (٤٠ ، ٤١)
بريمة يمينية (١١ ، ٢١ ، ٢٢)
بقاء الشحنة (١٣٩)
بللورية ، شبكة (١٤١)
بللورية ، مادة صلبة (١٤١)
بوليستيرين (٤٠٣)
بوليني (٩)
بوتنج ، ج . هـ . (٤٠٢)
بيانية ، اضافة ، (٩ ، ١٠)
بيو ، ج . ب . (٢٤٨)
تأثير هول (٣٠٦)
تام ، عازل (١٦١ ، ١٦٦ ، ٣٩٣ ، ٤١٨ ، ٤٢٠)
تام ، موصل (٢٠٢ ، ٣٧١ ، ٤١٨ ، ٤٢١)
٤٢٢
تجربة كرات متحدة المركز (٦٧)
تجميع (٤٧ ، ٥١ ، ١٠١)
تحويلات بين نظم إحداثيات (٢٦ ، ٢٩ ، ٣١ ، ٣٣)
تختصر بالمنطاطيسية (٣١٩)
تخطيطية :
- انسياب مائع (٢٠٨)
- مبيعات متخينة الخطوط (١٨٨ - ١٩٤ ، ٢٠٣ ، ٢٥٣ ، ٢٨٣)
تخطيط مجال (٥٩ ، ١٨٨)
تخلفية :
- عازل (١٥٨)
- منطاطيسية (٣١٩ ، ٣٣٤)
تدرج (١١٩ ، ١٨٧ ، ٥٠٦ ، ١١٩ ، ١٨٧ ، ٥٠٣)
- جهد (١١٦ ، ٢٨٠)
- معرف (١١٩)
تدريج (حجب) (٨١ ، ٢٥٨ ، ٤٤٥)
تدفق :
- تسرب (٣٣٤)
- تهلب ٣٣٤
- كهربي (٦٧ ، ٦٩ ، ٧٢ ، ١٨٩ ، ٦٧ ، ٦٩ ، ٧٢ ، ١٨٩)
- منطاطيسية (أنظر منطاطيسية ، تدفق)
تدفق ، خط (٦٧ ، ٦٩)
تدفق ، كثافة :
ازاحة (٦٨)
- كهربي (٦٩ ، ١٤٧ ، ١٥٨ ، ١٦٠ ، ١٨٨)
- منطاطيسية (أنظر كثافة تدفق منطاطيسية)
تدفق كهربي ، كثافة (٦٩ ، ١٤٨ ، ١٥٨ ، ١٦٠)
تدفق ، وصلية (٣٣٩ ، ٣٦٢)
تدريسية ، مسائل ، (١٧)
تدوين ، مقياسي ومتجه ، ٣ (١١)
تراكيب ، ١٠٢ (١١١)
تردد ، (٣٩٥ ، ٤٠٢ ، ٤٠٩)
- مركب ، (٣٨٧)
- مجال (٣٨٧)
تساوي متجهات ، ٤ (١٢)
تسرب ، تدفق ، (٢٣٤)
تسلا ، معرفة (٢٧٦)
تطعيم شبه موصل (١٥٣ ، ٢٢٨)
تفاضلي ، حجم (١٤ ، ٢٦ ، ٣١)
تفاضلية ، عروة تيار (٣١٥ ، ٣١٦)
تفاضلية ، مسافة (١٤ ، ٢٦ ، ٣١ ، ١٠٤)
تفلون (١٦٠ ، ١٦٤ ، ٤٠٤)
تقريب (١٩٦)
تكافؤ ، نطلق (١٤٢ ، ١٥٣)
تكمال :
- حجمي (٤٩ ، ٩٢)
- خط (أنظر تكمال خطي)
- سطحي (٧٣ ، ٩٢)
- مغلق (٧٣ ، ٢٧٤)
تكمال خطي ، (٩١ ، ١٠٠)
مسار لـ ، (١٠٠ ، ١١٠)
- مغلق (١١٤ ، ٢٦٥ ، ٢٧٢ ، ٣٥٧ ، ٣٦٠)
تكمال فوريير (٣٩٣)
تكعيب عكسي ، مجال (١٢٦ ، ٤٩٠)
تمائل (٥٢ ، ٦٧ ، ٧٧)
تمشط (٣٢١ ، ٣٢٥)
تناظر :
- كهربي - منطاطيسية (٢٦٤ ، ٢٧٦ ، ٢٨٣ ، ٣٦٦)
- كهروستاتيكي - تجاذبي (٢٠٤ ، ٢٠٧)

- ٥ - كهروستاتيكي - هيدروليكي (٢٠٧) ^٥
 - موجة مستوية منتظمة وسط نقل (٤٣٦ ، ٤٤١)
 تهدب ، تدفق (٣٣٤)
 توصيل (١٣٧ ، ١٤٢)
 ظاهرة سطحية ، (٤٠٧ ، ٤١٥)
 - في معادن (١٣٧ ، ١٤١ ، ١٤٦ ، ١٦٨ ، ٣٠٥)
 توصيل ، الكترون (١٤٢)
 توصيل ، تيار (١٤٥ ، ٤٤٤)
 توصيل ، نطاق (١٤٢ ، ١٤٦ ، ١٥٣)
 توهين (٣٩٤ ، ٣٩٨ ، ٤٠١ ، ٤٢٥)
 تيار (I) (١٣٧ ، ٢٤٨ ، ٣٣٠)
 - ازاحة (٣٩٤ ، ٣٩٨ ، ٤٠٩ ، ٤٧٤)
 - أمبيرى (مقياس) (٣٢١ ، ٣٢٤ ، ٣٦٥)
 - توصيل (١٤٥ ، ٤٤٤)
 - حمل (١٣٩)
 - فتيلي (١٣٧ ، ٤٨٦)
 كثافة (١٤٣ ، ٢٠٢ ، ٣٦٥ ، ٣٦٩ ، ٤٠٠ ، ٤٠٧ ، ٤٠٩ ، ٤١٢)
 مجال JH ، (٢٥٣)
 معرف (١٣٧)
 (أنظر أيضا كثافة تيار)
 تينانتات الباريوم (١٥٨)
 ثابت انتشار (٣٩٤ ، ٣٩٧ ، ٤٠٥)
 ثابت توهين (٣٩٤ ، ٣٩٨ ، ٤٠١)
 ثابت طور (٣٩٤ ، ٣٩٩ ، ٤٠١)
 ثابت الحازل (١٥٨)
 جدول قيم لـ (٥١٣)
 (أنظر أيضا سماحية)
 ثابت الفصل ، (٢٣٤)
 ثابت مجال (٥٨)
 ثائية ، معرفة (٥٠٥)
 ثنائى قطب :
 - كهربي (١٢٢ ، ١٥٥ ، ٣١٥ ، ٤٩١)
 مجال E لـ (١٢٤)
 مجال جهد لـ (١٢٤)
 مغناطيسى (٣١٥)
 نقطى (١٢٤)
 ثنائى قطب ، عزم (١٢٦ ، ١٥٥)
 - لوحدة الحجم (١٥٥)
 ثنائى قطب مغناطيسى ، عزم (٣١٥ ، ٣٢٢)
 ثنائى قطب ، هوائى (٤٩٤ ، ٤٩٥)
 جاذبية ، عجلة بسبب (٢٠٥)
 جاذبية ، مجال (١٠٠ ، ١٠٨ ، ١١١ ، ١١٥ ، ٢٠٤ ، ٢٠٧)
 جاوس ، معرف (٢٩٦)
 جاوس ، ك . ف . (٧٢)
 جاوسى ، سطح (٧٣)
 جبر :
 - بوليئى (١١)
 - متجه (١١)
 - مقياسى (١١)
 جزئى :
 - غير قطبى (١٥٥)
 - قطبى (١٥٥)
 جزئية ، سمة (١٧٠)
 جسيم ، مسار قلب (٢٠٧)
 جلبوت (٤٠)
 جمع :
 - بيانى (تخطيطى) (١١ ، ١٢)
 - متجه (١١ ، ١٢)
 جهد :
 - كهروستاتيكي (١٠٦ ، ١٠٧ ، ٢٨٠ ، ٣٧٣)
 - مطلق (١٠٨)
 - مغناطيسى متجه (٢٨٤ ، ٢٨٧ ، ٣٤٢ ، ٣٧٣ ، ٣٧٧)
 - مغناطيسى مقياسى (٢٨٠ ، ٢٨٣ ، ٣٢٢ ، ٣٣٠)
 - مؤخر (٣٧٣ ، ٣٧٧ ، ٤٨٦)
 جهد ، تدرج (٢٨٠ ، ١١٦ ، ٢٨٠)
 جهد ، طاقة (١١٦ ، ١٢٧ ، ١٣٢ ، ١٤١ ، ١٥٣ ، ٣٣٦ ، ٤٠٥)
 جهد ، فرق (١٠٦ ، ١٠٨ ، ١٠٩ ، ١٤٤ ، ١٩٣ ، ١٦٨)
 معرف (١٠٦)
 جهد ، مرجع (١٠٨)
 جهد مغناطيسى :
 - متجه (٢٨٤ ، ٢٨٧ ، ٣٧٣ ، ٣٧٧)

- معرف ، (٢٨٤)
- مقياس (٢٨٠ ، ٢٨٣ ، ٢٢٩ ، ٣٣٠)
معرف (٢٨٠)
جهد ، مجال (١١٦)
- لثنائي قطب (١٥٤)
- لخط شحنة (١٠٧ ، ١١٢)
- لخطوط شحنة متوازية (١٧٥ ، ١٧٧)
- لشحنة نقطية (١٠٩ ، ١١١)
- لـ Π شحنة نقطية (١١٢)
لكرات محددة المركز (٢٢٦)
لمخروطات (٢٢٧)
لمستويات نصف قطرية (٢٢٥)
جول (٤٤)
جيفي (٥٠٧)
حالة الطاقة (١٤٢)
حجب (تدريع) (٨١ ، ٣٥٩ ، ٤٤٥)
حجم نفاذلي (١٤ ، ٢٦ ، ٣١)
حجم ، عنصر (١٤ ، ٢٦ ، ٣١)
حجمي ، تكامل (٥٠ ، ٩٢)
حرارية ، طاقة (١٤٢ ، ١٥٣)
حركة موجية (٣٨٥)
حركية (١٤٢)
حرة ، شحنة (١٥٧ ، ١٦٣ ، ٣٢٢ ، ٣٢٤)
حساب تفاضل وتكامل ، متجه (١١)
حساب ، متجه (١١)
حقل التردد (٣٨٧)
حل في صورة ضرب (٢٣٣)
حر ، الكترون (١٤٢)
حمل ، معاوقة (٤٤١ ، ٤٥٣)
حوض الكتروليتي (٧٠٣)
خارجية ، محالة (٣٤٣ ، ٤٤٢ ، ٤٤٧)
خارجية ، مقاومة (٤٤٥)
خط تعلق (٦٧ ، ٦٩)
خط تيار ، H مجال لـ (٢٥٣)
خط شحنة :
مجال E لـ (٥٣ ، ٥٦ ، ١٠٤)
مجال جهد لـ (١٠٧ ، ١١٢)
خط طول (٣٠ ، ٣١)
خط عديم اللقد (٤٤٨)
خط عرض (٣٠)
خط نقل :
- ذو سلكين (٤٤٥ ، ٤٤٦)
- مستوي (٤٤٦ ، ٤٤٧)
- خط نقل ، بارامترات (٤٤٢ ، ٤٤٧)
خط نقل محوري :
 L , G , R و C لـ (٤٤٢ ، ٤٤٧) مجال H لـ
(٢٥٨ ، ٢٥٧)
مجال E لـ (٢٢٥)
خطوط انسياب (٥٩ ، ٦٢ ، ٦٧ ، ٦٩ ، ١٨٩ ،
١٩١ ، ٢٥٣ ، ٢٨٣)
خطوط شحنة متوازية مجال جهد لـ (١٧٥ ، ١٧٧)
خطوط نقل (٤٣٦ ، ٤٦٣ ، ٤٧٦)
خطي مغلق تكامل (١١٥ ، ٢٦٥ ، ٢٧٢ ،
٣٥٧ ، ٣٦٠)
خطية (٤٣ ، ١٤٣ ، ١٥٨ ، ٣٢٥)
دائرة :
- كهربية (١١٥ ، ٣٦٦ ، ٤٣٧ ، ٤٧١ ،
٤٧٥)
- مغناطيسية (٣٢٩ ، ٣٣٥)
- موزعة (٤٧٥)
دائرة قصر (٣٦١ ، ٤٦٣)
دائرة كهربية (١١٥ ، ٣٦٦ ، ٤٣٦ ، ٤٧١ ،
٤٧٦)
دائرة مغناطيسية (٣٢٨ ، ٢٣٥)
دائرة موزعة (٤٧٤)
دائرة ، اسطوانة (٢٤)
داخلية ، محالة (٣٤٣ ، ٤٤٢ ، ٤٤٧)
داخلية ، مقاومة (٤٤٥)
دالة اتجاهية (متجهة) (١٠ ، ١٨)
دخل ، معاوقة (٤٤١ ، ٤٤٩ ، ٤٥٣ ، ٤٧٦)
درجة حرارة كوري (٣٢٠ ، ٣٢١)
درجة كلفن (٥٠٧)
دوران (٢٦٧ ، ٣٦٣)
دوران منزلي :
- الكترون (٣١٧ ، ٣١٨)
- نوري (٣١٧ ، ٣٢١)
ديناميكا موائع (٢٠٧ ، ٢٦٧)
ذاتي ، شبه موصل (١٥٣)
ذرية ، فواة (١٤١ ، ١٤٢ ، ٣١٦)
ذرة (١٤١ ، ١٤٧ ، ٣١٦)
ذو سلكين ، خط نقل (٤٤٥ ، ٤٤٦)
ذو لقد ، هازل (٣٩٧ ، ٤٠٢)
رادار (٣٩٩ ، ٤٢٨)
راديوم (٤٢٨)
رمز :
- تكامل خطي مغلق (١١٥)
- تكامل سطحي مغلق (٧٣)

- سهم (١٧) - رحلة متجه (١٥ ، ١٧)
 رنانة ، فجوة (٤٧٥ ، ٤٨٦)
 زاوية بين متجهين (١٩ ، ٢٣ ، ٢٩)
 زمن التراجع (١٦٦)
 سفار ، ف. (٢٤٧)
 ساقطة ، موجة (٤١٤ ، ٤١٧ ، ٤٢١ ، ٤٤١)
 سرعة :
 - انتشار (٣٧٧ ، ٣٩١ ، ٣٩٦ ، ٤١١ ، ٤٨٨)
 - أنساق (١٤٢)
 - شحنة (١٣٩ ، ١٤٢ ، ٣٠٤ ، ٣٠٥)
 - صورة (٣٧٧ ، ٣٨٦ ، ٣٩٠ ، ٣٩١ ، ٥١٥)
 - طور (٣٩١ ، ٤٤٠)
 سطح :
 - تفاضلي (١٤ ، ٢٦ ، ٣١ ، ٧٣)
 - جالوسي (٧٣)
 - عمودي على (١٩ ، ٢١ ، ٥٧ ، ٧٣ ، ١١٩)
 - متجه (١٩ ، ٧٣)
 - متساوي - الجهد (١١١ ، ١١٧ ، ١٥٠ ، ١٨٨ ، ١٦٨)
 - مغلق (٧٣ ، ٧٧ ، ٢٧٤)
 سطح يري :
 - حازل (١٦١ ، ١٦٥)
 - مغناطيسي (٣٢٧ ، ٣٢٥)
 سطح تفاضلي (١٤ ، ٢٦ ، ٣١ ، ٧٣)
 سطح متجه (١٩ ، ٧٣)
 سطحي ، تكامل (٧٣ ، ٩٢ ، ٢٧٤)
 سطحي ، عمق (٤٠٩ ، ٤١٤ ، ٤١٧ ، ٤٤٢ ، ٤٤٧ ، ٤٨٢)
 سطحي ، كثافة تيار (٢٥٠ ، ٣٧٢)
 سطحي مغلق ، تكامل (٧٣ ، ٢٧٤)
 سطحية ، كثافة شحنة (أنظر كثافة شحنة ، سطحية)
 سعة :
 - بواسطة تناظر التيار (٢٠٤)
 - بين أسطوانتين متحدتي المحور (١٧٠ ، ١٩٢ ، ٢٢٤ ، ٤٤٢)
 - بين أسطوانتين متوازيتين (١٧٧ ، ٤٤٥)
 - بين أسطوانة ومستوى (١٧٦ ، ١٧٧)
 - بين كرتي متحدتي المركز (٢٢٦)
 - بين مخروط ومستوى (٢٢٧)
 - بين مستويين متوازيين (١٦٩ ، ١٧٠ ، ١٧٢ ، ١٧٥ ، ٤٤٧)
 - جزئية (١٧٠)
 - لملتقى m (٢٣٢)
 - معرفة (١٦٨ ، ٣٣٩)
 - مكافئة ، لفجوة رنانة (٤٨١)
 - من مربعات منحنية الخطوط (١٨٨ ، ١٩٣)
 - موزعة (٤٣٧ ، ٤٤٢ ، ٤٤٥ ، ٤٤٧)
 سقوط عمودي (٤١٤)
 سماحية (١٥٨ ، ١٦٠ ، ٤٠٢)
 - لفضاء حر ، (٤١ ، ٥٠٨ ، ٥١٥)
 معرفة (٥٠٨)
 - نسبية (١٥٨)
 جدول قيم (٥١٣)
 سهم ، رمز (١٧)
 سونار (٣٩٩)
 شبكية بالبلورية (١٤٢)
 شبه موصل (١٤٢ ، ١٤٣ ، ١٥٢ ، ١٥٣ ، ٢٢٨)
 - ذاتي (١٥٣)
 شبه موصل ، تطعيم (١٥٣ ، ٢٢٨)
 شبه موصل نوع سالب (n) (١٥٣ ، ٢٢٨)
 شبه موصل نوع موجب (p) (١٥٣ ، ٢٢٨)
 شحنة (٤٠ ، ٦٨ ، ١٣٧ ، ١٦٨)
 اختيار (٤٣ ، ٩٩)
 بقاء الـ (١٤٠)
 - حرة (١٥٧ ، ١٦٣ ، ٣٢٣ ، ٣٢٤)
 سرعة (١٣٩ ، ١٤٢ ، ٣٠٤ ، ٣٠٥)
 - على الكترون (٥١٥)
 قوى على (أنظر قوة ، على شحنة)
 - مغناطيسية (٢٧٧ ، ٣٣٦ ، ٣٦٩)
 - مقيدة (١٥٣ ، ١٦٠ ، ١٦٣ ، ٣٢١)
 - نقطية (٤٠ ، ٤٢ ، ٧٤ ، ١٠٧ ، ١٢٢ ، ٢١٦)
 مجال E لـ (٤٥ ، ٤٦)
 مجال جهد لـ (١٠٩ ، ١١١)
 شحنات نقطية
 مجال E لـ (٤٦)
 مجال جهد لـ (١١٢)
 شدة مجال كهربي (٤٣ ، ٤٦ ، ٩٩ ، ١١٥ ، ١٥٨ ، ١٦٠ ، ٣٠٤)
 حركية (٣٦١)
 - لثنائي قطب (١٢٤)
 - لخط شحنة (٥٣ ، ٥٦ ، ١٠٤)
 - لـ m شحنة نقطية (٤٤)
 - للوح من الشحنة (٥٧)

- للموجين من الشحنة (٥٨)
- لمستويات نصف قطرية (٢٢٥)
- معرفة (٤٤)
مقدار (١١٧)
شدة مجال مغناطيسي (٣٢٣ ، ٢٤٨)
- لمخطط تيار (٢٥٢)
- لمخطط تيار محدود (٢٥٣)
- للوح تيار (٢٦٠)
- لكبل محوري (٢٥٨ ، ٢٥٧)
- معرفة (٣٢٣ ، ٢٤٨)
- لملف حلقي (٢٦٢ ، ٢٦١)
لملف لولبي (٢٦١)
شروط حدود :
- عازل- عازل (١٦٥ ، ١٦١ ، ٣٧١ ، ٣٧٣)
- مغناطيسية (٣٧٣ ، ٣٧١ ، ٣٥٧ ، ٣٢٥)
- موصل- عازل (١٦٥ ، ١٦٦ ، ١٨٧ ، ٢٢٠ ، ٤٣٩ ، ٣٧١ ، ٣٧٣)
لشغل (١٩ ، ٩٩ ، ١٠٢ ، ١٢٧)
(أنظر أيضا طاقة)
صور (١٢٢ ، ١٥٠ ، ١٥١)
ضرب :
- متجه : بعمالة \times (٢٢ ، ٢٣)
- بالنقطة (١٩ ، ٢١ ، ٢٨ ، ٢٩ ، ٣٢)
- متجه بمتجه (١٢ ، ١٩ ، ٢٢)
- متجه بمقياسي (١٢)
ضرب مقياسي (١٩ ، ٢١ ، ٢٩ ، ٣٢)
ضرب سرعة (٣٧٧ ، ٣٨٦ ، ٣٨٩ ، ٣٩١ ، ٥١٥)
ضوضاء (٤٨)
طاقة :
- جهد (أنظر جهد ، طاقة)
- حرارية (١٥٣)
- حركة (١٤١)
- في مجال جاذبية (٢٠٥)
- كم من (١٤٢)
- لتحريك شحنة نقطية (٩٩)
- مختزنة في عضو حث (٣٤١)
- مختزنة في مكثف (١٧٠)
(أنظر أيضا شغل)
طاقة ، فجوة (١٤٢ ، ١٥٣)
طاقة ، مستوى (١٤٢)
طاقة ، نطاق (١٤١ ، ١٤٢)
طرح متجه (متجهات) (١٢)
- طريقة الاسترخاء (٢٠١)
طريقة التكرار (١٩٤ ، ٢٠١)
طور ، سرعة (٣٩٠ ، ٤٤٠)
طول موجة (٣٨٩ ، ٣٩٥ ، ٤١٠ ، ٤٧٣ ، ٤٨٨)
ظاهرة سطحية (٤٠٧ ، ٤١٤ ، ٤٣٩)
ظل فقد (٤٠٠ ، ٤٠٣ ، ٤٨٠ ، ٥١٣)
عازل (٦٧ ، ١٥٣ ، ١٦٦ ، ٢٠٢)
- نام (١٦١ ، ١٦٥ ، ٣٩٣ ، ٤١٧ ، ٤٢٠)
- ذو فقد (٣٩٧ ، ٤٠٢)
عازل ، تخلفية ال (١٥٨)
عازل ، عازل ، شروط حدود (١٦١ ، ١٦٥ ، ٣٧١ ، ٣٤٧)
عامل :
- دل
- متجه (٨٩)
- مقياسي
عامل جودة (٤٠١ ، ٤٨٠ ، ٤٨٥)
عجلة (٣٠٣)
- ناشئة عن الجاذبية (٢٠٥)
عجلة تجديف (٢٦٧)
عرض النطاق (٤٨٠)
عروة تيار تفاضلية (٣١٥ ، ٣١٦)
عزم تدوير على (٣١٥)
عزم :
- ثنائي قطب (١٢٦ ، ١٥٥)
- لكل وحدة حجم (١٥٥)
- ثنائي قطب مغناطيسي (٣١٥ ، ٣٢١)
- لقوة (٣١١)
عزم تدوير (٣١١)
- على عروة تيار تفاضلية (٣١٥)
عزم مغناطيسي (٣١٥ ، ٣٢١)
عضو حث (١٤٢ ، ١٤٢ ، ١٥٣)
عقب موأمة بـ (٤٦٠ ، ٤٦٤)
علاقة تكرارية (٢٣٥)
علبة حبوب جارية (١٦٢)
عملية نقطية (٨٩)
عمق :
- اختراق (٤٠٩)
- سطحي (٤٠٩ ، ٤١٤ ، ٤١٨ ، ٤٤٢ ، ٤٤٧ ، ٤٨٣)
عمودي ، سقوط (٤١٥)
عمودي على سطح (١٩ ، ٢٢ ، ٥٧ ، ٧٣ ، ١١٩)

- عنصر تيار تفاضلي (٤٨٦ ، ٢٤٧)
 قوة على (٣٠٩ ، ٣٠٤)
 عنصر حجم (٣١ ، ٢٦ ، ١٤)
 عوازل : سطح بيني لـ (١٦٥ ، ١٦١)
 غشاء مرن (٢٠٦)
 غير خطية (١٥٨ ، ١٦٠ ، ٣٢٩)
 غير قطبي ، جزئي (١٥٥)
 افراد (٤١ ، ١٦٩)
 معرف (١٦٩)
 فاراداي ، م . (٣٥٥)
 فتيلي ، تيار (١٣٧ ، ٤٨٧)
 فتيلي ، موصل (١٣٧ ، ٢٤٧ ، ٣٤٣ ، ٤٧٣)
 فجوة (١٥٣ ، ٢٢٨)
 فجوة :
 - رنانة (٤٧٥ ، ٤٨٦)
 - محورية (٤٧٥ ، ٤٨٦)
 فجوة طاقة ، (١٤٢ ، ١٥٣)
 فرط موصلية ، (١٤٣)
 فرق جهد (١٠٦ ، ١٠٨ ، ١٠٩ ، ١٤٤ ، ١٦٨ ، ٣٢٨)
 فريت ، (٣١٩ ، ٣٢٣)
 فصل ، ثابت (٢٣٤)
 فضاء حر :
 انفاذية (٢٧٦ ، ٥٠٧ ، ٥١٥)
 سماحية (٤١ ، ٥٠٨ ، ٥١٥)
 فك الالتواء (٢٩٥)
 فولت ، معرف (٤٣ ، ١٠٦)
 فولتية هول (٣٠٥)
 فيل (٢٢)
 قابل (متقبل) (١٥٣ ، ٢٢٨)
 قابلية التأثير :
 - الكهربائية (١٥٨)
 - المغناطيسية (٣٢٣)
 قاعدة اليد اليمنى (٢٢ ، ٣١ ، ٣٥٧)
 قانون أوم ، (١٤٥)
 الصورة النقطية لـ (١٤٣ ، ١٥٣ ، ٢٠٢ ، ٣٢٩ ، ٣٧٢ ، ٤٧٢)
 قانون بير-سافار (٢٤٨ ، ٢٥٤ ، ٢٥٩ ، ٢٦٠)
 قانون التبادل (١١ ، ١٩ ، ٢٢)
 قانون التجميع (١١ ، ١٢)
 قانون التوزيع (١٢)
 قانون دارلي (انظر أمبير ، قانون دارلي)
 قانون جاوس (٧٢ ، ٨٤ ، ٩٨ ، ١٤٧ ، ٣٧١)
 تطبيقات لـ (٧٦ ، ٨٥)
 الصورة النقطية لـ (٨٨ ، ١٦٠ ، ٣٧١)
 - للمجال المغناطيسي (٣٧١ ، ٣٧٧)
 قانون فاراداي (٣٣٦ ، ٣٥٥ ، ٣٦٢ ، ٣٧١ ، ٣٧٢ ، ٣٧٤ ، ٤٧١)
 قانون لنز (٣٥٦)
 قانون كولوم (٤٠ ، ٩٨ ، ٢٤٩ ، ٢٥٥ ، ٣٠٥ ، ٣١٨)
 قانون متوازي الاضلاع (١١)
 قانون نيوتن الثالث (٥٠٧)
 قانون نيوتن للجاذبية (٤٠)
 قدرة (٤٠٢ ، ٣٧٩)
 - متوسطة (٤٠٦ ، ٤١٢ ، ٤١٨ ، ٤٧٩)
 قدرة كثافة (٤٠٥ ، ٤٠٦ ، ٤١٠)
 ق د ك (قوة دافعة كهربية) (٣٢٨ ، ٣٥٥ ، ٣٦٢ ، ٣٦٥)
 - حركية (٣٦١)
 ق د م (قوة دافعة مغناطيسية) (٣٢٨ ، ٣٣٨)
 قسم متجه على مقياس (١٢)
 قشرة (طبقة) مدارية (١٤٢ ، ٣١٦)
 قطب شمالي (٣٠)
 قطب مغناطيسي (٣٦٨)
 قطبي ، جزئي (١٥٥)
 قطبية ، احداثيات (٢٤)
 قطع تفرع (٢٨٣)
 قوة (١٩)
 - بين عناصر تيار تفاضلية (٣٠٩)
 - بين موصلات متوازية (٣١٠)
 - على دائرة مغلفة (٣١٠)
 - على شحنة (١٠ ، ٤٤ ، ٩٩ ، ١٤٢ ، ٣٠٤ ، ٣٦٦ ، ٣٧٠)
 - على شحنة متحركة (٣٠٤ ، ٣٠٥)
 - على عنصر تيار تفاضلي (٣٠٥ ، ٣١٠)
 - على مواد مغناطيسية (٣٣٥ ، ٣٣٧)
 - على موصل (٣٠٨)
 - لورنتز (٣٠٥ ، ٣٧٠)
 قوة دافعة كهربية (ق د ك) (٣٢٨ ، ٣٥٥ ، ٣٦٢ ، ٣٦٦)
 قوة دافعة مغناطيسية (ق د م) (٣٢٨ ، ٣٣٠)
 قوة قهري (٣٣٣)
 كبل محوري (انظر خط نقل محوري)
 كتلة (٢٠٥)

- كتالة :
 كنديللا ، معرفة (٥٠٧)
 كهري ، تدفق (٦٧ ، ٦٩ ، ٧٢ ، ١٨٩)
 معرف (٦٩)
 كهري ، ثنائي قطب (١٧٢ ، ١٥٥ ، ٣١٥ ، ٤٩١)
 كهريية ، قابلية التأثير الـ (١٥٨)
 كهروستاتيكي ، جهد (١٠٦ ، ١٠٧ ، ٢٨٠ ، ٣٧٣)
 كولوم (٤١ ، ١٣٧)
 معرف (٤١)
 كولوم ، كولونيل شارلس (٤٠)
 كيرشوف ، قانون الجهد لـ (١١٥ ، ١٦٢ ، ٣٣١)
 كيلو جرام ، معرف (٥٠٧)
 لابلاس (٢١٦ ، ٥٠٤)
 - لمتجه (٢٩٤ ، ٢٩٤)
 معرف (٢١٦)
 لوح تيار ، مجال H لـ (٢٦٠)
 لوح من الشحنة ، مجال E لـ (٥٦)
 لتز ، هـ . ف . أ ، (٣٥٧)
 لورنز ، قوة ، (٣٠٥ ، ٣٧٠)
 مادة بارامغناطيسية (٣١٧ ، ٣١٩ ، ٣٢٥)
 مادة دايامغناطيسية (٣١٧ ، ٣٢٥)
 مادة صلبة بلورية (١٤٢)
 مادة ضديد الفرومغناطيسية (٣١٨ ، ٣٢٠)
 مادة عازلة عفوية الاستقطاب (مادة فروكهريية)
 (١٥٨)
 مادة غير مغناطيسية (٣٢٥)
 مادة غير موحدة الصفات ، (١٤٣ ، ١٥٨ ، ٣٢٠ ، ٣٢٥)
 مادة ناقلة البارامغناطيسية (٣١٨ ، ٣١٩ ، ٣٢٥)
 مادة فرومغناطيسية (٣١٧ ، ٣١٩ ، ٣٢٥ ، ٣٣٣ ، ٣٣٤)
 مادة فرومغناطيسية (٣١٧ ، ٣١٩ ، ٣٢٣)
 مادة فروكهريية (مادة عازلة عفوية الاستقطاب)
 (١٥٨)
 مادة متجانسة (١٦٨ ، ١٩٠ ، ٢٨١ ، ٣٩٤)
 مادة موحدة الخواص (١٤٣ ، ١٥٨ ، ١٦٠ ، ٣١٩ ، ٣٢٣)
 ماكسويل ، ج . س . (١١٤ ، ١٧٠ ، ٣٥٥)
 متبادلة ، محالة (٣٤٣ ، ٣٤٥)
 متجه (٨)
 اتجاه (١٥ ، ٥٤ ، ٦٠)
 بومنتج (٤٠٥)
- ازاحة (٦٨)
 - تدفق كهري (٦٨ ، ١٤٧ ، ١٥٨ ، ١٦٠ ، ١٨٨)
 - طاقة (١٣٢ ، ٣٣٧)
 - في مجال كهري (١٢٧ ، ١٣١ ، ٤٠٥)
 - في مجال مغناطيسي (٣٣٧ ، ٣٣٧ ، ٤٠٥)
 - قدرة (٤٠٥ ، ٤٠٦ ، ٤٠٩)
 كتالة تدفق متبقية (٣٣٣ ، ٣٣٣)
 كتالة تدفق مغناطيسي (١٩ ، ٢٣ ، ٢٧٦ ، ٢٧٨ ، ٣٠٥ ، ٣٣٠)
 - متبقية (٣٣٣ ، ٣٣٣)
 - معرفة (٢٧٦)
 كتالة تيار (١٣٧ ، ٢٥٠ ، ٣٣٠ ، ٣٤٢)
 ازاحة (٣٦٥ ، ٣٦٨ ، ٣٩٠ ، ٣٩٨)
 - توصيل (١٤٣ ، ٢٠٢ ، ٣٦٥ ، ٣٦٩ ، ٤٠٠ ، ٤٠٨ ، ٤١٠ ، ٤١٢)
 - حمل (١٣٩ ، ٣٦٥ ، ٣٧٠)
 - سطحي (٢٥٠ ، ٣٧٢)
 معرفة (١٣٧)
 كتالة خط شحنة (أنظر كتالة شحنة ، خطية)
 كتالة شحنة :
 - حجمية (٤٨ ، ٧٤ ، ٨٥ ، ١١٢ ، ١٣٧ ، ١٥٨ ، ٢١٦)
 - خطية (٥٢ ، ٧٤ ، ١١٢ ، ١٢٩ ، ٢١٦)
 مجال E لـ (٥٣)
 مجال جهد لـ (٨٩ ، ١١٢)
 - سطحية (٥٦ ، ٧٤ ، ١١٢ ، ١٤٦ ، ١٦١ ، ١٦٨ ، ٢١٦ ، ٣٧٢)
 مجال B لـ (٥٧ ، ٧٢٣)
 مجال جهد لـ (١١٢ ، ٢٢٣)
 E كتالة طاقة (٣٣٧ ، ٣٣٧)
 - في مجال كهروستاتيكي (١٢٧ ، ١٣١ ، ٤٠٥)
 - في مجال مغناطيسي (٣٣٦ ، ٣٣٧ ، ٤٠٥)
 كرتان محتلتا المركز ، مجال جهد لـ (٢٢٦)
 كرتيزية ، مركبات (١٥ ، ٢٩ ، ٣٢)
 كرة (٣٠ ، ٧٤)
 كروي مكثف (١٧٠ ، ١٧٢ ، ٢٢٧)
 كلفن ، معرف (٥٠٧)
 كم من الطاقة (١٤٢)
 كمية ممثلة (١٦٠ ، ٣٢٥)
 كم م (كهرومغناطيسية مستعرضة) موجة (٣٩٣ ، ٤٣٦ ، ٤٣٧)

- نساوی (۱۲)
زاویه بین (۱۹ ، ۲۳ ، ۲۸)
مركبة (۱۵ ، ۲۰)
مسطح (۳۲)
وحدة - (أنظر وحدة متجه)
متجه (اتجاهية) ، متطابقات (۵۰۴)
متجه ، إضافة (۱۱ ، ۱۲)
متجه بونتيج (۴۰۵)
متجه تدوين (۱۱)
متجه جبر (۱۱)
متجه ، جهد مغناطيسي (۲۸۴ ، ۲۸۷ ، ۳۴۱ ، ۳۷۳ ، ۳۷۴)
متجه حساب (۱۱)
متجه ، حساب تفاضل وتكامل (۱۱)
متجه ضرب :
- بعلامة X (۲۱ ، ۲۳)
- باللفظة (۱۹ ، ۲۱ ، ۲۸ ، ۲۹ ، ۳۲)
متجه ، عامل (۸۹)
متجه لابلاسي (۲۹۱ ، ۲۹۴)
متجه ، مجال (۱۰ ، ۱۲ ، ۱۸)
متجه ، مركبات (۱۲ ، ۲۰)
متجه مطاور (۳۷۸)
متجه ، مقدار (۸ ، ۱۲ ، ۱۵ ، ۱۷ ، ۱۹ ، ۲۲ ، ۵۴)
متجه ، مركبة (۱۵ ، ۲۰)
متحدة المستوي ، متجهات (۱۲)
متحرك ، مسار (۳۶۰ ، ۳۶۲)
متساوي الجهد ، سطح (۱۱۱ ، ۱۱۶ ، ۱۵۰ ، ۱۶۸ ، ۱۸۸)
متسلسلة (۴۷ ، ۲۳۴ ، ۲۳۹ ، ۳۹۳)
متسلسلة تيلور (۸۳)
متسلسلة فورييه (۲۴۰ ، ۳۹۳)
متسلسلة قوي ، (۲۳۴)
متر ، معرف (۵۰۶)
متطابقات متجه (اتجاهية) (۵۰۴)
متطابقة أولير ، (۳۸۶ ، ۴۷۷ ، ۴۳۸)
متعدد القطب (۱۲۷)
متغيرات علاقات بين (۲۷ ، ۳۲)
متنقلة ، موجة (۳۹۱ ، ۴۲۲)
متوازي أضلاع ، مساحة (۲۲)
متوازي سطوح قائم (۱۴)
متوازي المستويين خط نقل (۴۴۷ ، ۴۴۸)
متوازيان ، اسطوانتان ، سعة بين (۱۷۷ ، ۴۴۶)
- متوسطة ، قدرة (۴۰۶ ، ۴۱۱ ، ۴۱۸ ، ۴۷۹)
مجال (۱۰ ، ۲۴۶)
- تكبير عكسي (۱۲۶ ، ۴۹۰)
- ثابت (۵۵)
- جاذبية (۱۰۰ ، ۱۰۹ ، ۱۱۱ ، ۱۱۵ ، ۲۰۴ ، ۲۰۷)
- جهد (أنظر جهد ، مجال)
- قانون تربيع عكسي (أنظر مجال قانون تربيع عكسي) متجه (۱۲ ، ۱۲ ، ۱۸)
- محافظ (۱۱۲ ، ۱۱۵ ، ۲۸۲)
- معكوس مسافة (۵۶ ، ۱۱۱ ، ۱۱۳ ، ۴۹۰)
- مغناطيسي (أنظر مجال مغناطيسي)
- مقياسي (۱۰ ، ۱۱۰ ، ۱۱۹)
- كثافة تدفق (۶۹ ، ۸۶)
- نوع قوة (۴۳ ، ۶۹)
مجالات ، تخطيطات (۵۹ ، ۶۲)
مجالات كهروستاتيكية (۱۱۴ ، ۱۴۶ ، ۱۵۰ ، ۱۸۷ ، ۳۲۹)
مجال قانون تربيع عكسي (۴۵ ، ۵۶ ، ۷۷ ، ۱۱۱ ، ۱۱۳ ، ۱۲۶ ، ۴۹۰)
مجال كهربي كثافة طاقة في (۱۲۷ ، ۱۳۱ ، ۴۰۵)
مجال مغناطيسي :
قانون جاوس لـ (۲۷۷ ، ۳۷۱)
كثافة طاقة في (۳۳۷ ، ۳۳۸ ، ۴۰۵)
محانة (۳۳۸ ، ۳۴۵ ، ۴۳۷ ، ۴۴۲ ، ۴۴۷ ، ۴۷۲)
- خارجية (۳۴۳ ، ۴۴۲ ، ۴۴۷)
- داخلية (۳۴۳ ، ۴۴۲ ، ۴۴۷)
- كبل محوري (۳۳۹ ، ۴۴۲ ، ۴۴۷)
- لخط نقل ذو سلكين (۴۴۶)
- لخط نقل مستوى (۴۴۷)
- لملف حلقي (۳۳۹)
- لملف لولبي (۳۴۴)
- متبادلة (۳۴۴ ، ۳۴۵)
معركة (۲۳۸)
محافظ ، مجال (۱۱۱ ، ۱۱۵ ، ۲۸۲)
محاور الأحداثيات (۱۳ ، ۱۴ ، ۲۴ ، ۳۰)
محددة (۲۳ ، ۲۲۶ ، ۵۰۴)
محرم ، نطاق (۱۴۲ ، ۱۵۳)
محوري ، كبل (أنظر خط نقل محوري)
محورية ، فجوة (۴۷۵ ، ۴۸۶)
مخروط (مخروطات) (۳۰ ، ۳۱ ، ۲۲۷)

- مجال جهد لـ (٢٢٧)
- مخطط خط نقل (٤٥٢ ، ٤٦٣)
- مخطط سميت (٤٥٢ ، ٤٦٣)
- مدار الكرون (١٤٢ ، ٣١٦ ، ٣١٨)
- مدارة ، قشرة (طبقة) (١٤٢ ، ٣١٦)
- مربعات متحدة الخطوط (١٨٨ ، ١٩٤ ، ٢٠٣)
- ٢٥٣ ، ٢٨٣
- مرجع جهد
- مرجع صفري للجهد (١٠٨)
- مركب ، تردد (٣٨٦)
- مركب ، مقياسي (١٠)
- مركبة (مركبات) :
- تحويلات الـ (٢٧ ، ٣٠ ، ٣٢ ، ٣٤)
- عمودية (أنظر مركبة عمودية)
- كرتيزية (١٥ ، ٢٩ ، ٣٢)
- متجهة (١٢ ، ١٥ ، ٢٠)
- مماسة (أنظر مركبة مماسة)
- مركبة عمودية :
- عند حدود عازل (١٦٢)
- عند حدود مغناطيسية (٣٢٧)
- عند حدود موصل (١٤٩)
- عند موصل تام (٣٧٢)
- مركبة مقياسية (١٧ ، ٢٠)
- مركبة مماسة :
- عند حدود عازل (١٦١ ، ١٦٣)
- عند حدود مغناطيسية (٣٢٨)
- عند حدود موصل (١٤٨ ، ١٥٠)
- عند موصل تام (٣٧٢)
- مرن ، فضاء (٢٠٦)
- مسائل تدريبية ، تعليمات حل (١٧)
- مساحة :
- سطح متجه (١٩)
- متوازي أضلاع (٢٢)
- مسار :
- لتكامل (١٠٠ ، ١١٠)
- متحرك (٣٦٢ ، ٣٦٠)
- مغلق (١١٤ ، ٢٥٥)
- مسار قلب جسم (٢٠٧)
- مسار مغلق (١١٤ ، ٢٥٥)
- مسافة :
- تفاضلية (١٤ ، ٢٦ ، ٣١ ، ١٠٤)
- موجية (١٦ ، ٤١)
- مسافات متجهات (٣٢)
- مساحة (٤٦٠ ، ٤٦٢)
- مستويات نصف قطرية :
- مجال E لـ (٢٢٦)
- مجال جهد لـ (٢٢٥)
- مستوى ، خط نقل (٤٤٦ ، ٤٤٧)
- مستوى طاقة (١٤٢)
- مستوية منتظمة ، موجهة (٣٨٩ ، ٣٩٣ ، ٣٩٧)
- ٤٠٧ ، ٤١٣ ، ٤٣٨
- مسقط :
- متجه (٢١)
- مقياسي (٢١)
- مطلق ، جهد (١٠٨)
- معاوقة :
- حمل (٤٤١ ، ٤٥٣)
- دخل (٤٤١ ، ٤٤٩ ، ٤٥٢ ، ٤٧٦)
- ذاتية (٣٩٧ ، ٣٩٦ ، ٣٩٨ ، ٤٠٢ ، ٤١٠)
- دخل (٤٢٦)
- معايرة (٤٥٣)
- مميزة (٤٥٣ ، ٤٤٠)
- معاوقة دخل ذاتية (٤٢٦)
- معادلات ماكسويل :
- تطبيقات لـ (٣٨٥ ، ٣٩١ ، ٤٠٢ ، ٤٣٦ ، ٤٣٩ ، ٤٧١ ، ٤٧٥ ، ٤٨٥)
- غير متغيرة مع الزمن (٨٧ ، ٢٧٠ ، ٢٧٧)
- متغيرة مع الزمن (٣٥٨ ، ٣٧٣)
- معادلة الاستمرارية (١٤٠ ، ١٤١ ، ١٦٥ ، ٢٤٩ ، ٣٦٤)
- معادلة بواسون (٢١٨ ، ٢٢٨ ، ٢٣٢)
- معادلة لابلاس (١٩٥ ، ٢١٥ ، ٢٢٧ ، ٢٣٣)
- ٢٤٣ ، ٢٨١
- معادلة موجية (٣٧٧ ، ٣٨٨ ، ٣٩٣)
- معادلة هيلمهولتز (٣٨٨)
- معامل انعكاس (٤١٧ ، ٤٤٠ ، ٤٥٣)
- معامل نفاذ (٤١٧)
- معايرة ، معاوقة (٤٥٣)
- مغطى (١٥٣ ، ٢٢٨)
- معكوس مسافة ، مجال (٥٦ ، ١١١ ، ١١٣ ، ٤٩٠)
- مغلق ، سطح (٧٢ ، ٧٣ ، ٢٧٥)
- مغناطيس دائم (٢٤٧)
- مغناطيسي ، تدفق (٢٧٦ ، ٢٧٩ ، ٣٣٠)
- ٣٤٣ ، ٣٥٦ ، ٤٧٢ ، ٤٧٣
- معرف (٢٧٧)
- مغناطيسي ، ثنائي قطب (٣١٥)
- مغناطيسي ، سطح بيني (٣٢٥ ، ٣٢٨)

مغناطيسي ، قطب (٣٦٩)	ممانمة (٣٣٠)
مغناطيسية ، تخلفية (٣٣٣ ، ٣١٩)	ميزية ، معاوقة ، (٤٥٣ ، ٤٤٠)
مغناطيسية ، شحنة (٣٦٩ ، ٣٣٦ ، ٣٧٧)	منبع (٨٦)
مغناطيسية ، شروط حدود (٣٢٥ ، ٣٢٨ ، ٣٧١ ، ٣٧٣)	منحنى تمغنط (٣٣٢)
مغناطيسية ، قابلية التأثير الـ (٣٧٣)	منقلة ، موجة (٤١٥ ، ٤٢٠)
مقاطعة فرومغناطيسية (٣١٨)	منطقة ماكروسكوبية (١٤٤)
مقاومة (١٤٥ ، ٢٠٣ ، ٢٠٤ ، ٣٣٠ ، ٤١٣ ، ٤٧٤)	منعكسة موجة (٤١٣ ، ٤٢٠ ، ٤٤٠ ، ٤٤١)
	م هـ د (هيدروديناميكا مغناطيسية)
	مولد (٣٠٥)
- اشعاع (٤٩٧)	مهر ، معرف (١٤٣)
- تردد عالي (٤٤٥)	موانمة (٤٧٧ ، ٤٦٠ ، ٤٦٤ ، ٤٩٢)
- داخلية (٤٤٥)	عقب (٤٦٠ ، ٤٦٤)
- خارجية (٤٤٥)	موانمة بعقب مفرد (٤٦٢ ، ٤٦٤)
- معرفة (١٤٥)	مواد (أنظر توصيل ، لي معادن ، عازل ، مواد مغناطيسية ، شبه موصل)
مقاومية ، معرفة (١٤٣)	مواد مغناطيسية (٣١٦ ، ٣٢٠)
مقدار متجه (أنظر : متجه ، مقدار)	مواصلة (٤٣٧ ، ٢٤٢ ، ٤٤٦ ، ٤٤٧)
مقياسي (١٠)	موجة :
مركب (١٠)	- ساقطة (٤١٥ ، ٤١٧ ، ٤٢٠ ، ٤٤١)
مركبة (١٧ ، ٢٠)	- ك م م ، (٣٩٢ ، ٤٣٧)
مقياسي ، جبر (١١)	- منتقلة (٣٩١ ، ٤٢٢)
مقياسي ، جهد مغناطيسي (٢٨٠ ، ٢٨٣ ، ٣٢٩ ، ٣٣٠)	- مستوية منتظمة (٣٩٠ ، ٣٩٤ ، ٣٩٨ ، ٤٠٧ ، ٤١٣ ، ٤٣٨)
مقياسي عامل (٨٩)	- منقلة (٤١٥ ، ٤٢٠)
مقياسي مجال (١٠ ، ١١٠ ، ١١٩)	- منعكسة (٤١٣ ، ٤٢٠ ، ٤٤٠ ، ٤٤١)
مقياسي ، مسقط (٢١)	- واقفة (٤١٩ ، ٤٢٢)
مقيدة ، شحنة (١٥٣ ، ١٦٠ ، ١٦٣ ، ٣٢١)	موجة كهرومغناطيسية مستعرضة (ك م م) (٣٩٣ ، ٤٣٦ ، ٤٣٧)
المكتب القوس للمعايير (٥٠٦)	موجهة ، مسافة (١٦ ، ٤٢)
مكتف :	موصل :
طاقة مختزنة في (١٧٠)	- تام (٢٠٣ ، ٣٧٢ ، ٤١٧ ، ٤٢١ ، ٤٢٢)
- عازل متعدد (١٧٢ ، ١٧٥)	- ثنائي (١٣٧ ، ٢٤٧ ، ٣٤٣ ، ٤٧٤)
- كمصدر دائري (٤٧٣)	- متحرك (٣٥٦ ، ٣٦٣)
- كروى (١٧٠ ، ١٧٢ ، ٢٢٧)	- معدني (أنظر : توصيل ، في معادن)
- متوازي الألواح (١٦٩ ، ١٧٠ ، ١٧٢ ، ١٧٥ ، ٢٢٤)	موصلات متوازية ، قوة بين (٣١١)
- محوري (١٣٠ ، ١٧٠ ، ١٩٢ ، ٢٢٥)	موصل- عازل ، شروط حدود (أنظر شروط حدود ، موصل- عازل)
ملتقى pm (٢٢٨)	موصل- نضاه حر ، شروط حدود ، (١٥٠ ، ٣٧٣ ، ٣٧١)
ملح روئيل (١٥٨)	موصل معدني (أنظر توصيل ، معادن)
ملف حلقي :	موصل ، ورق (٢٠٤)
مجال H لـ (٢٦١ ، ٢٦٢)	موصلية (١٤٣ ، ٤٠٨)
محالة (٣٣٩)	تغير مع التردد (٤٠٢ ، ٤٠٣)
ملف لولبي :	
مجال H لـ (٢٦١)	
محالة (٣٤٤)	

- لابلاسى (٢٠٧)
 - للتعبير عن الالتواء (٢٦٧)
 - للتعبير عن الانفرج (٨٧)
 - للتعبير عن التدرج (١٧١)
 نظام وحدات :
 - انجليزى (٤١ ، ٥١٠)
 بادلت لـ (٥١١)
 - جاوسى (٥٠٨ ، ٥١١)
 جدول تحويل (٥١١)
 - دولى (٤١ ، ٥٠٦ ، ٥١٢)
 - من ح ث (٥٠٨)
 - م ك ث مرشد (٥١٢ ، ٥٠٦)
 - و ك س (٥٠٨ ، ٥١١)
 - و ك م (٥٠٨ ، ٥١١)
 - هفسيد - لورنز (٥٠٨)
 نظام وحدات كهروستاتيكي (c s u) (٥٠٨ ، ٥١١)
 نظام وحدات كهرومغناطيسى (c m u) (٥٠٨ ، ٥١١)
 نظرية الانفرج (٩٠ ، ٩٣)
 نظرية بويتنج (٤٠٦)
 نظرية ستوكس (٢٧١ ، ٢٧٦)
 نظرية الكم (١٤٢ ، ٣١٦)
 نقطة ، احداثيات (١٣)
 نقطة اصل (١٣ ، ٢١)
 نقطية ، شحنة (٤٠ ، ٤٢ ، ٧٤ ، ١٠٧ ، ١٢٢ ، ٢١٦)
 مجال E لـ (٤٥ ، ٤٦)
 مجال جهد لـ (١٠٩ ، ١١١)
 نمط أنقى (٤٩١)
 نمط رأسى (٤٩١)
 نواة ذرية (١٤١ ، ٣١٦)
 نوع قوة ، مجال (٤٣ ، ٦٨)
 نوع للمجال ، كثافة تدفق (٦٨ ، ٨٥)
 نووى ، دوران مغزلى (٣١٧ ، ٣٢١)
 نيبير (Neper) (٣٩٨)
 نيوتن ، معرف (٤١ ، ٥٠٦)
 هفسيد - لورنز ، نظام وحدات (٥٠٨)
 هنرى ، معرف (٣٧٦ ، ٣٣٩)
 هوائى (٤٩٢ ، ٤٩٧)
 - احادى قطب ، (٤٩٤ ، ٤٩٥)
 - ثنائى قطب ، (٤٩٣ ، ٤٩٤)
 - قصير (٤٩٣)
 هوائى ، أنماط ، (٤٩١)
- جدول قيم (٥١٣ ، ٥١٤)
 لاشباه موصلات (١٥٣)
 - لمازل ذى فقد (٣٩٧)
 معرفة (١٤٣)
 مناظر مغناطيسى (٣٣١)
 نسبة موجة واقفة (٤٢١ ، ٤٢٨ ، ٤٤١ ، ٤٥٢ ، ٤٦٠)
 نسبة (٣٦٢)
 نسبية ، انفاذية (٣٢٤)
 جدول قيم (٥١٤)
 نسبية ، سماحية (١٥٨)
 جدول قيم (٥١٣)
 نطاق :
 - تكافؤ (١٤٢ ، ١٥٣)
 - توصيل (١٤٢ ، ١٤٦ ، ١٥٣)
 - طاقة (١٤١ ، ١٤٢)
 - محرم (١٤٢ ، ١٥٣)
 نظام احداثيات :
 - اسطوانى (أنظر نظام الاحداثيات الاسطوانية)
 تحويلات بين (٣١ ، ٣٣ ، ٣٧)
 - الخطوط المنحنية العامة (٣٤ ، ٥٠١ ، ٥٠٤)
 - كرتيزى (أنظر نظام الاحداثيات الكرتيزية)
 - كروى (أنظر نظام الاحداثيات الكروية)
 - متعامدة (أنظر نظام الاحداثيات الكرتيزية)
 - اليمينى - اليد (١٣ ، ٢٢ ، ٢٦ ، ٢٩ ، ٥٠٢)
 نظام الاحداثيات الاسطوانية (٢٤ ، ٢٩ ، ٨٧ ، ١٠٤ ، ١٢١ ، ٢١٦ ، ٢٢٦)
 تحويلات بين (٢٦ ، ٢٩)
 لابلاسى (٢١٦)
 - للتعبير عن الالتواء (٢٦٦)
 - للتعبير عن الانفرج (٨٧)
 - للتعبير عن التدرج (١٧١)
 نظام الاحداثيات الكرتيزية (١٣ ، ٢٣ ، ٨٧ ، ١٠٤ ، ١٢٠ ، ٢١٦ ، ٢٦٥ ، ٥٠٢)
 تحويلات لنظم احداثيات اخرى (٢٦ ، ٢٩ ، ٣١ ، ٣٣)
 لابلاسى (٢٠٧)
 - للتعبير عن الالتواء (٢٦٥)
 - للتعبير عن الانفرج (٨٧)
 - للتعبير عن التدرج (١٢٠)
 نظام الاحداثيات الكروية (٢٩ ، ٣٢ ، ٨٧ ، ١٠٤ ، ١٢١ ، ٢١٦ ، ٢٦٧ ، ٥٠٢)
 تحويلات الى كرتيزية (٣١ ، ٣٣)

وحدات م ك ث مرشدة (٥٠٦ ، ٥١٢)
 وحدة متجه (١٥ ، ١٧ ، ٢٣ ، ٢٦ ، ٣٠ ، ٥٤ ، ٥٧)
 ورق موصل (٢٠٤)
 وصلية تدفق (٣٣٩ ، ٣٦٢)
 يمينى اليد ، لولب (١٣ ، ٢١ ، ٢٢)
 يمينى اليد ، نظام احدائيات (١٣ ، ٢٢ ، ٢٦ ، ٣١)

هيدروديناميكا مغناطيسية (٣٠٥)
 هيدروليكا (٢٠٧ ، ٢٦٧)
 واقفة ، موجة (٤١٨ ، ٤٢١)
 وير ، معرف (٢٧٧)
 وحدات (٥٠٦ ، ٥١٢)
 اختصارات لـ (٥١٠ ، ٥١١)
 جدول تحويل لـ (٥١١)
 نظام دولي لـ (٤١ ، ٥٠٦ ، ٥١٢)
 وحدات م ك ث (٥٠٦ ، ٥١٢)

الانفراج

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \quad \text{الاحداثيات الكرتيزية}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho D_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \quad \text{الاحداثيات الاسطوانية}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 D_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (D_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} \quad \text{الاحداثيات الكروية}$$

التدرج

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{a}_z \quad \text{الاحداثيات الكرتيزية}$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial \rho} \mathbf{a}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{a}_z \quad \text{الاحداثيات الاسطوانية}$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r} \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi \quad \text{الاحداثيات الكروية}$$

الاتواء

الاحداثيات الكرتيزية

$$\nabla \times \mathbf{H} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \mathbf{a}_x + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \mathbf{a}_y + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \mathbf{a}_z$$

الاحداثيات الاسطوانية

$$\nabla \times \mathbf{H} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z} \right) \mathbf{a}_\rho + \left(\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right) \mathbf{a}_\phi + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial(\rho H_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial H_\rho}{\partial \phi} \right] \mathbf{a}_z$$

الاحداثيات الكروية

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial(H_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial H_\theta}{\partial \phi} \right] \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial H_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r H_\phi)}{\partial r} \right] \mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r H_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{a}_\phi$$

اللابلاسى

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \quad \text{الاحداثيات الكرتيزية}$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \quad \text{الاحداثيات الاسطوانية}$$

الاحداثيات الكروية

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$$

رقم الايداع بدار الكتب

١٩٨٢ / ٥٦٩٥



1EDN 014270 '1

